Практичне заняття

Тема. Визначений інтеграл, властивості та методи обчислення.

Цілі та задачі: розглянути питання теорії: визначення інтеграла як границі інтегральної сум, найпростіші властивості інтегралів; познайомити з формулою Ньютона-Лейбница й основними методами знаходження визначених інтегралів.

Знання та вміння: студенти повинні познайомитися з поняттям інтегральної суми, визначеного інтеграла; повинні вміти застосовувати формулу Ньютона-Лейбница для знаходження інтегралів, володіти основними методами обчислення інтегралів, використовуючи основні властивості інтегралів.

Час:2 год.

Теоретичні відомості.

Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку [*a,b*] і якщо:

1) розділити цей відрізок довільним способом на *n* часток відрізків довжини $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 ..., \Delta x_n$;
2) вибрати в кожнім частковому відрізку по однієї довільної точки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$
3) обчислити значення функції *f(x)* в обраних точках
4) скласти суму $f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + ... + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$; те вона називається <u>інтегральною сумою</u> функції $f(x)$ на відрізок [*a,b*].

По-різному поділяючи відрізок *[a,b]* на *n* часткових відрізків і як і раніше вибираючи в них по одній точці ε_i, можна для всякої заданої функції $f(x)$ і всякого заданого відрізка *[a,b]* скласти незліченна безліч різних інтегральних сум.

При цьому виявляється, що всі ці різні інтегральні суми при необмеженому зростанні *n* і при прагненні до нуля найбільшої з довжин часткових відрізків, мають одну загальну границю.

Ця загальна границя всіх інтегральних сум функції $f(x)$ на відрізку *[a,b]* називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ в границях від *a* до *b* і позначений: $\int_a^b f(x)dx$.

<u>Найпростіші властивості визначеного інтеграла:</u>

1. При перестановці границь змінюється знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Інтеграли з однаковими границями дорівнюють нулеві:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Відрізок інтегрування можна розбити на частині:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів усіх доданків:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$$

5. Постійний множник можна виносити знак інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Для обчислення визначеного інтеграла, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл, служить формула Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

- визначений інтеграл дорівнює різниці невизначеного інтеграла при верхній і нижній границях інтегрування.

Крім того, визначений інтеграл можна обчислити методами:

1) заміни перемінної: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta F(t)dt}$

2) інтегрування частинами:

$$\boxed{\int_a^b udu = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu}$$

<u>**Практична частина**</u>.

<u>Розв’язати приклади:</u>

<u>Обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбница</u>

1)

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy = \int_1^4 y^{-2}dy + \int_1^4 y^{-\frac{3}{2}}dy = \frac{y^{-1}}{-1}\Big|_1^4 + \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = -\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{\sqrt{y}}\right)\Big|_1^4 = = -\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{2} - 1 - 2\right) = -\left(-1\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

2) $\int_1^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\int_1^7 (3t+4)^{-\frac{1}{2}}d(3t+4) = \frac{2}{3}(3t+4)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}(5-1) = \frac{8}{3}$;

3) $\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + 4\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}\frac{dx}{4} = x + 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = 4 + 4 + 4 = 12$;

4) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^2 \frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Big|_1^2 = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$;

<u>Обчислення визначеного інтеграла методом інтегрування частинами:</u>

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \begin{cases} u = x; du = dx \\ dv = dx; v = x \end{cases} = \frac{x}{2}\sin 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

2) $\int_1^e \ln x dx = \left\{\begin{matrix} \ln x = u; du = \frac{dx}{x} \\ dx = dx; v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x|_1^e = e - e + 1 = 1.$

<u>Обчислення визначеного інтеграла</u> методом заміни перемінної:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta F(t)dt}$$

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3x+1}=t;\, x=\frac{t^2-1}{3};\, x=0, x=5 \\ 3x+1=t^2;\, dx=\frac{2}{3}tdt;\, t=1, t=4 \end{Bmatrix} = \int^4 \frac{\frac{2t}{3}dt}{\frac{2}{3}\left(t^2-1\right)+t} =$$

$$=\frac{1}{2}\int^4 \frac{4tdt}{2t^2-2+3t} = \begin{Bmatrix} v=2t^2+3t-2 \\ dv=(4t+3)dt \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int^4 \frac{(4t+3-3)dt}{2t^2+3t-2} =$$

1)
$$=\frac{1}{2}\int^4 \frac{(4t+3)dt}{2t^2+3t-2} - \frac{3}{2}\int^4 \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|2t^2+3t-2\right| - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{t+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right| =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln 42 - \frac{3}{10}\ln\left|\frac{4-\frac{2}{4}}{4+2}\right|\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{3}{10}\cdot\ln 3 - \frac{3}{10}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{2}}{3}\right|\right) = \frac{1}{5}\ln 112.$$

2)
$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \begin{Bmatrix} x=\ln t;\, x_1=\ln 2, t_1=2 \\ dx=\frac{dt}{t};\, x_2=\ln 3, t_2=3 \end{Bmatrix} = \int_2^3 \frac{dt}{t(t-t-1)} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3 =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 1{,}5}{2}.$$

3)
$$\int^{\sqrt{3}} \frac{(x_3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \begin{Bmatrix} x=2\sin t;\, x_1=1;\, t_1=\frac{\pi}{6} \\ dx=2\cos tdt;\, x_2=\sqrt{3};\, t_2=\frac{\pi}{3} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\sin^3 t+1}{4\sin^2 t}dt =$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin tdt + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} = -2\cos t - \frac{1}{4}ctgt\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right) = = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.$$

Приклади для самостійного розв'язання

<u>№1525.</u>
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{1}{3}\int_0^3 (25+3x)^{-\frac{1}{2}} d(25+3x) = \frac{2\sqrt{25+3x}}{3}\Big|_0^{-3} = \frac{8}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}.$$

<u>№1530.</u>
$$\int^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int^4 \frac{dx}{(x-1{,}5)^2-0{,}25} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-1{,}5-0{,}5}{x-1{,}5+0{,}5}\right|\Big|_3^4 = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| = = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

<u>№1531.</u>
$$\int_0^1 \frac{z^3dz}{z^8+1} = \begin{Bmatrix} z^4=t;\, z=0;1 \\ 4z^3dz=dt;\, t=0;1 \end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2\cdot 1} = \frac{2}{4}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}rctgt\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16.}$$

<u>№1539.</u>
$$\int^e \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \begin{Bmatrix} u=\sin(\ln x);\, du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x} & \ln x=t;\, 1, e \\ dv=\frac{dx}{x};\, v=\ln x & \frac{dx}{x}=dt^0 \end{Bmatrix} = = \int_0^1 \sin tdt = -\cos t\Big|_0^1 = -\cos 1 + 1.$$

<u>№1542.</u>
$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \begin{Bmatrix} e^x=t;\, x=0;1 \\ e^xdx=dt;\, t=1;e \end{Bmatrix} = \int^e \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_1^e = arctg\, e - \frac{\pi}{4}.$$

Самостійна робота

Обчислити визначені інтеграли:

1. а) $\int_1^4 \left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$. (*Відповідь:* а) 21; б)7+2 ln 2)

2. а) $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$; б) $\int_0^4 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$. (*Відповідь:* а) 23/3; б) 16/3 – 2 ln 3.)

3. а) $\int_4^9 \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; б) $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$ (*Відповідь:* а) 3/16; б) 3+4 ln 2.)

Питання і завдання для самоконтролеві.

1. Дайте визначення визначеного інтеграла.
2. Перелічите основні властивості визначеного інтеграла.
3. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла.
4. Запишіть формули методів заміни змінної та інтегрування частинами.
5. Розв'яжіть наступні задачі:

1. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \left| e^x - 1 = z^2 \right| = 2 - \frac{\pi}{2}$

2. $\int_1^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$

3. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = -\frac{2}{3}$

4. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

5. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln\frac{4}{3}$

6. $\int_0^1 \frac{z^3dz}{z^8+1} = \frac{\pi}{16}$

7. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)dx}{x} = -\cos 1 + 1$

8. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = arctg\ e - \frac{\pi}{4}$

Список використаної літератури.

1. Збірник задач за курсом математичного аналізу за редакцією Г.Н.Бермана
2. Збірник задач за курсом математичного аналізу для втузів за редакцією Б.П.Демідовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
3. Пискунів Н.С. Диференціальне й інтегральне вирахування. Для втузів. Т.1.- М., Наука,1985