Практичне заняття

Тема. Диференціальні рівняння 1-го порядку
з відокремленими і відокремлюваними змінними.

Цілі та задачі: познайомитися з видами диференціальних рівнянь 1-го порядку; формулювати завдання і теорему Коши; визначати загальне, приватне рішення, загальний і частиний інтеграл; знати методи рішення диференціальних рівнянь з відокремленими і відокремлюваними змінними

Знання та вміння: студенти повинні знати види диференціальних рівнянь 1-го порядку, види рішень; повинні уміти визначати тип диференціального рівняння, знаходити загальне рішення або інтеграл, вирішувати задачу Коші з використанням початкової умови; освоїти методи рішення диференціальних рівнянь з відокремленими і відокремлюваними змінними.

Час:2 год.

Теоретичні відомості.

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними – це рівняння виду:

$$\varphi(x)dx + f(y)dy = 0, \quad (1)$$

у якому множник при dx є функція, що залежить тільки від x, а множник при dy - функція, що залежить тільки від *y*, $\varphi(x), f(y)$ - задані, неперервні на деякому інтервалі функції.

$$\varphi(x)dx = - f(y)dy$$

Так як останнє рівняння містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються друг від друга на постійну величину, тобто

$$\int\varphi(x)dx = -\int f(y)dy + C$$

або

$$\int\varphi(x)dx + \int f(y)dy = C$$

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними - це рівняння виду:

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

Воно приводиться до диференціального рівняння виду (1) діленням обох частин на функцію $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$, одержимо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$$

Отримане диференціальне рівняння з відокремленими змінними інтегруємо:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$$ - загальний інтеграл.

Практична частина.

1) Решить примеры.

№1. Показать, что данная функция $y = \frac{\sin x}{x}$ является решением дифференциального уравнения $xy' + y = \cos x$.

Решение:

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2};\; x\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} = \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x}\cdot\cos x = \cos x$$

№ 2. Показать, что функция $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, где C – const, является решением дифференциального уравнения $y' = +2y = e^x$

Решение:

$$y' = -2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x; \quad -2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + 2Ce^{-2x} + \frac{2}{3}e^x = e^x \qquad e^x \equiv e^x$$

№ 3. Показать, что данное соотношение $e^{-y} - Cx = 1$ является общим интегралом дифференциального уравнения $xy' + 1 = e^x$

Решение:

$$-e^{-y}\cdot y' - C = 0;\; y' = -Ce^y;\; e^{-y} = 1 + Cx;\; e^y = \frac{1}{1+Cx}, \text{ тогда}$$

$$y' = -\frac{C}{1+Cx};\; -\frac{Cx}{1+Cx} + 1 = \frac{1}{1+Cx} = e^y; \qquad e^y \equiv e^y$$

2) Розв’язати диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

№ 4 Знайти загальний інтеграл $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0;$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2C;\; 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 2C;\; \sqrt{x} + \sqrt{y} = C$ - загальний інтеграл;

$\sqrt{y = C - \sqrt{x}};\; y = (C - \sqrt{x})^2$ - загальний розв’язок.

№ 5 Знайти загальний інтеграл $x^2dx + (y+1)dy = 0;$

$\int x^2dx + (y+1)dy = C;$

$\frac{x^3}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} = C$ - загальний інтеграл

3) Розв’язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

№ 6 Знайти загальний інтеграл

$(e^y + 1)dx + xe^y dy = 0$

Розв’язок.

Розділимо змінні, розділивши рівняння на $x(e^y + 1)$

$$\frac{dx}{x} + \frac{e^y}{e^y + 1} = 0$$

Почленно інтегруючи, одержимо шуканий загальний інтеграл

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{e^y}{e^y + 1} = \ln C;\quad \ln x + \ln(e^y + 1) = \ln C$$

(довільну постійну зручно записати у виді $\ln C$, щоб можливо було подальше спрощення шляхом потенціювання).

Потенціюючи, одержимо загальний інтеграл: $x(e^y + 1) = C$

7) Знайти загальний інтеграл $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})y'-y=0$

Розв’язання.

Запишемо $y'=\dfrac{dy}{dx}$, приведемо до загального знаменника і розкладемо коефіцієнт при dy

на множники: $\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)\dfrac{dy}{dx}-y=0$; $\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)dy-ydx=0$

Розділимо змінні $\dfrac{\sqrt{y}+1}{y}dy-\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=0$

Інтегруючи, одержуємо загальний інтеграл

$\int(\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{y})dy-\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=0;$ $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C$

8) $y\ln ydx+xdx=0;$

$\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y\ln y}=0;$ $\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{dy}{y\ln y}=\ln|c|;$ $\ln x+\ln|\ln y|=\ln c;$

$\ln y=\dfrac{c}{x};$ $y=e^{\frac{c}{x}}$ - общее решение

9) $x\sqrt{1+y^2}+y\cdot y'\sqrt{1+x^2}=0;$

$x\sqrt{1+y'^2}+y\cdot\dfrac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2}=0;$

$x\sqrt{1+y'^2}dx+ydy\sqrt{1+x^2}=0;$

$\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=0;$ $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\dfrac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=c;$

$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}c$ - общий интеграл

10) Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию, $y(0)=-1,$ т.е. решить задачу Коши.

$y'ctgx+y=2.$

$\dfrac{dy}{dx}ctgx=2-y;$ $ctgxdy=(2-y)dx;$ $\dfrac{dy}{2-y}=tgxdx;$

$tgxdx+\dfrac{dy}{y-2}=0;$ $\int tgxdx+\int\dfrac{dy}{y-2}=0;$ $\dfrac{y-2}{\cos x}=c;$

$-\ln\cos x+\ln(y-2)=\ln c;$

$y=c\cos x+2$ - общее решение;

$-1=c+2;$ $c=-3;$

$y=-3\cos x+2.$

Приклади для самостійного розв’язання

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Показать, что данная функция $y=\varphi(x)$ удовлетворяет Дифференциальные уравнения:			

1 $y=\ln(C+e^x)$ $y'=e^{x-y}$ 2. $y-\sin x+C\cos x$ $y'+ytgx=\frac{1}{\cos x}$	1. $y=2+C\sqrt{1-x^2}$ $(1-x^2)y'+xy=2x$ 2. $y=Ce^x-x^2-1$ $y'=2x(x^2+y)$	1. $y=Ce^x-x^2-1$ $y-y=2x-3$ 2. $y=C\ln^2 x-\ln x$ $(xy'-1)\ln x=2y$	1. $y=\frac{2e^{x2}}{C-e}$ $y'-xy^2=2xy$ 2. $y=Ce^2+x^4$ $xy'-2y=2x^4$
Найти общий интеграл (общее решение):			
3. $xydx+(x+1)dy=0$	3. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$	3. $(1+2y)xdx+$ $+(1+x^2)dy=0$	3. $\sqrt{x^2+1}dy=$ $=xydx$
Решить задачу Каши:			
4. $(1+e^x)yy'=e^x$ $y(0)=1$	4. $y'=2\sqrt{y}\,y(0)=1$	4. $(2x+1)y'+y^2=0$ $y(4)=1$	4. $y'\sin x=y\ln y$ $y(\frac{\pi}{2})e$

Питання і завдання для самоконтролю.

1. Дайте визначення дифференциальных уравнений *n*–го порядка, запишіть види дифференциальных уравнений *1-го* порядка.
2. Перелічите основні види розв'язків дифференциальных уравнений.
3. Сформулюйте задачу и теорему Коши для дифференциальных уравнений *1-го* порядка.
4. Назвіть основні методи розв'язання дифференциальных уравнений *1-го* порядка з відокремленими та відокремлюваними змінними.
5. Розв'яжіть наступні задачі

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Показать, что данная функция удовлетворяет Дифференциальные уравнения:			
1. $y=x(C-\ln x)$ $xy'+x-y=0$	$y=C_1\cos x++C_2\sin x-$ $-x\cos x;$ $y''+y=2\sin x$	1. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ $y''-2y'-3y=0$	1. $y=\sqrt{x^2-Cx}$ $(x^2-y^2)-2xyy'=0$
Проинтегрировать Дифференциальные уравнения:			
2. $(e^{x+y}+e^x)dx+$ $(e^{x+y}-e^4)dy=0$	2. $(y-1)^2dx+$ $+(1-x)^3dy=0$	2. $(\sqrt{xy}-2\sqrt{x})y'=1$	2. $\cos x\cos ydx-$ $-\sin x\sin ydy=0$