Практичне заняття

Тема. Елементи теорії сполук. Безпосередній розрахунок ймовірності

Цілі та задачі: навчити студентів обчислювати імовірності подій, використовуючи класичне, статистичне і геометричне визначення імовірності; формулювати події; розрізняти випадки застосування зрозуміти теорії комбінаторики при розв'язанні практичних задач.

Знання й уміння: студент повинний знати формули для обчислення імовірності; уміти застосовувати їх при розв'язані задач; уміти користуватися формулами для обчислення перестановок, розміщень, сполучень

Час:2 год.

Теоретичні відомості

Основним поняттям теорії імовірності є поняття випадкової події.

Випадковою подією називається така подія, яка може відбутись або не відбутися в даному експерименті в даних конкретних умовах.(Позначаються – A,B,C і т.д.)

Події бувають достовірні, неможливі і випадкові.

Подія називається **достовірною,** якщо при даному комплексі умов вона обов'язково наступить. Подія називається **неможливою,** якщо при даному комплексі умов вона ніколи не наступить.

Події утворять **повну групу** (єдино можливі), якщо в результаті іспиту хоча б одна з них відбудеться.

Події називаються **неспільними,** якщо поява однієї з них, виключає можливість появи іншої.

Події називаються **спільними,** якщо поява однієї не виключає поява інших.

Події називаються **рівноможливими,** якщо немає підстави вважати, що одна з них більш можлива, чим інша.

Визначення імовірності.

Імовірністю події називається відношення числа *m* сприятливих до даної події випадків до загального числа неспільних і рівноможливих випадків *n* : $\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$.

Для будь-якої події $0 \le P(A) \le 1$, де *P(A)=0* – імовірність неможливої події, *P(A)=1* – імовірність появи достовірної події.

Відносна частота події *A* визначається рівністю

$$\boxed{W(A) = \frac{m}{n}},$$

де *m* – число іспитів, у яких подія *A* наступила; *n* – загальне число зроблених іспитів. При статистичному визначенні імовірності події приймають його відносну частоту.

Для підрахунку числа появи подій використовують елементи комбінаторики.

Сполуки – це групи, складені з яких-небудь предметів.

Предмети, з яких складені з'єднаннями, називаються **елементами**.

Найбільш важливі: перестановки, розміщення, сполучення.

Розміщеннями з *n* елементів по *m* називаються такі з'єднання, кожне з яких містить *m* елементів, узятих з даних *n* елементів, і які відрізняються друг від друга або порядком елементів, або самими елементами.

Число розміщень $A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Перестановками з *n* елементів по *n* називаються розміщення з *n,* узяті по *n,* які відрізняються тільки порядком елементів.

Число перестановок $\boxed{P_n = n!.}$

Сполучення з *n* елементів по *m* називаються такі з'єднання, кожні з яких містить *m* елементів, узятих з даних *n* елементів, і які відрізняються друг від друга самими елементами.

Число сполучень $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Практична частина.

Задача. Підлягає контролеві 250 деталей, з яких 5 нестандартних. Яка імовірність того, що узята на удачу для контролю деталь виявиться:

а) нестандартної;

б) стандартної.

Рішення: а) $P(A) = \frac{5}{250} = 0.02$

б) $P(\overline{A}) = \frac{245}{250} = 0.98$ або $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.02 = 0.98$

Задача. У книзі 205 сторінок. Яка імовірність того, що порядковий номер навмання узятої сторінки закінчується цифрою 3?

Рішення. Число таких сторінок, що закінчуються цифрою 3, буде 21. Шукана імовірність: $P(A) = \frac{21}{205}$

Задача. На верстаті на кожні 100 деталей одержують у середньому деталі з діаметром наступних розмірів:

1 деталь з розміром менш 15,98 мм;

4 деталі -/ -/- /--/- /- /- від 15,98 до 15,99 мм;

25 деталей -/ -/- /--/- /- /- від 15,99 до 16 мм;

40 деталей -/ -/- /--/- /- /- від 16 до 16,01 мм;

27 деталей -/ -/- /--/- /- /- від 16,01 до 16,02 мм;

3 деталі -- від 16,02 і більш.

Деталь вважається стандартної, якщо діаметр її знаходиться в межах від 15,98 мм до 16,02 мм. Знайти імовірність того, що узята на удачу деталь задовольняє стандартові.

Рішення. Кількість деталей, що задовольняють стандартові, буде 4+25+40+27=96; тоді $P(A) = \frac{96}{100} = 0.96$

Задача. У записаному номері телефону виявилася стертої остання цифра. Яка імовірність того, що навмання набираючи останню цифру телефонного номера, ви відразу подзвоните потрібній особі?

Рішення. Усього цифр на телефонному диску 10. Число цифр сприятливих появі події, 1.

$$P(A)=\frac{1}{10}$$

Задача. Вантажна машина, що обслуговує торговельну базу, у плині кварталу (90 днів) перевозила: 20 днів по 18 тонн вантажу, 35 днів по 15 тонн і 5 днів по 5 тонн. Яка частість перевезення цією машиною не менш 15 тонн у день?

Рішення. Більш 15 тонн машина перевозила 20+35=55 днів, усього днів протягом кварталу 90. Тоді

$$P(A)=\frac{55}{90}=\frac{11}{18}=0.61$$

Задача. При стрілянині з гвинтівки відносна частота влучення в мету виявилася рівної 0,85. Знайти число влучень, якщо всього було зроблено 120 пострілів?

$\frac{n}{m}=0.85$; $n=0.85\cdot 120=102$ улучення

Задача. На зборку надходять деталі з двох автоматів. Перший автомат дає 0,3% шлюбу, а другий – 0,2%. Знайти імовірність улучення на зборку бракованої деталі, якщо з першого автомата надійшло 3000, а з другого 2000 деталей?

Рішення. Перший автомат випускає $\frac{3000}{100}\cdot 0.3=9$ бракованих деталей

Другий автомат випускає $\frac{2000}{100}\cdot 0.2=4$ браковані деталі

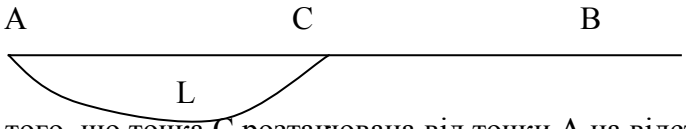
Усього бракованих деталей із двох автоматів – 13

Усього деталей, що випускаються обома автоматами, 2000+3000=5000.

Тоді $P(A)=\frac{13}{5000}=0.0026$

Задача. У точці С, положення якої на телефонній лінії рівноможливо, відбувся розрив. Визначити імовірність того, що точка С вилучена від точки А на відстань, не менше l.

Відповідь: імовірність того, що точка С розташована від точки А на відстань, менше l, дорівнює $\frac{l}{4}$



А імовірність того, що точка С розташована від точки А на відстань, не менше l,

$$P(A)=1-\frac{l}{4}$$

Задача. У партії з 100 виробів бракованих 5 штук. Визначити імовірність того, що серед обраних на удачу для перевірки 30 штук виробів рівно 3 виявляться бракованими?

Рішення. Число можливих способів узяти 30 виробів з 100 дорівнює C_{100}^{30}. Сприятливими виявляться випадки, коли з загального числа 5-ти бракованих узято 3 бракованих (це можна зробити C_5^3 способами), а інші 30 – 3 не браковані, тобто вони узяті з загального числа 100 – 5 не бракованих C_{100-5}^{30-3} способами. Тому число сприятливих випадків дорівнює $C_5^3 \cdot C_{95}^{27}$. Тоді шукана імовірність $P(A) = \frac{C_5^3 \cdot C_{95}^{27}}{C_{100}^{30}} =$

Приклади для самостійного розв'язання

1) Учасники жеребкування тягнуть із шухляди жетони з номерами від 1 до 100. Знайти імовірність того, що номер першого на удачу витягнутого жетона не містить цифру 5.
2) У мішечку мається 5 однакових кубиків. На всіх гранях шкірного кубика написана одна з наступних букв : с, п, р, о, т. Знайти імовірність того, що на вийнятих по одному і розташованих «в одну лінію» кубиків можна буде прочитати слово «спорт».
3) Усередину кола радіуса R на удачу кинута крапка. . Знайти імовірність того, що крапка виявиться усередині уписаного в коло квадрата. Передбачається, що імовірність улучення крапки в квадрат пропорційно площі квадрата і не залежить від його розташування щодо кола.

Зразок виконання запропонованого завдання (задача №3).

Імовірність влучення в квадрат дорівнює відношенню площ квадрата і кола. $P(A) = \frac{S_{кв}}{S_{кр}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$ X – сторона квадрата, $X = R\sqrt{2}$, $S_{кв} = 2R^2$.

Питання і завдання для самоконтролю.

1. Дайте визначення випадкової події. Які види випадкових подій існують?
2. Які події складають повну групу подій?
3. Що називається несумісною, незалежною подією?
4. Сформулюйте класичне визначення ймовірності Перелічите основні властивості ймовірності.
5. Дайте геометричне визначення ймовірності.
6. Сформулюйте статистичне визначення ймовірності
7. Запишіть різні формули для обчислення ймовірності
8. Назвіть види сполук та запишіть формули для їх обчислення.
9. Як зв'язані розміщення та перестановки?
10. У яких випадках при розв'язанні задач використовується комбінація, у яких - розміщення?
11. Вирішите наступні задачі:

1) На кожній із шести однакових карток надрукована одна з наступних букв: а, т, м, р, с, о. Картки ретельно перемішані. Знайти імовірність того, що на чотирьох, вийнятих по одній і розташованих «в одну лінію» картках можна буде прочитати слово «трос».
2) Вісім різних книг розставлених на удачу на одну полицю. Знайти імовірність того, що дві визначені книги виявляться поруч.

3) З 80 узятих навмання дисків виявлено 8 бракованих. Визначити частість появи бракованого диска. Відповідь: $P(A)=\frac{1}{10}$

4) Мається 5 відрізків, довгі яких рівні 1,3,5,7,9 одиницям. Визначити імовірність того, що за допомогою узятих на удачу трьох відрізків з п'яти можна побудувати трикутник. Рішення. З даних відрізків можна побудувати 3 трикутники зі сторонами (3,5,7), (5,7,9), (3,7,9), а всіх можливих комбінацій з 5-ти по 3 елементи $C_5^3=10$. Тоді $P(A)=\frac{3}{10}=0.3$

Список використаної літератури.

1. Гурман В.Е. “Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике ”, учеб.пособие для ВТУЗов.Изд. 2-е доп.,М.: Высшая школа, 1975. -333 с.
2. Кремер Н.Ш. “Теория вероятностей и математическая статистика ”, Учебник для вузов.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 543 с.