МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА «ВИЩА МАТЕМАТИКА І ФІЗИКА»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЗМІСТ

Вступ

Згідно з вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу важливою частиною удосконалення форм навчального процесу є організація самостійної роботи та модульного контролю навчальної інформації студентів. В зв'язку з цим виникла необхідність в розробці методичних вказівок за темами, які необхідні для аналізу і моделювання пристроїв, процесів і явищ при пошуку оптимальних розв'язків задач, що виникають в діяльності спеціалістів служби охорони праці, вибору найкращих методів реалізації отриманих результатів.

Методичні вказівки містять теми:

Тема 1. Матриці, визначники. Методи розв'язання систем лінійних рівнянь

Тема 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Тема 3. Функції. Границя змінної величини та функції.

Тема 4. Похідна та її застосування

Тема 5. Інтеграл.

Тема 6. Диференціальні рівняння

Тема 7. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

Вони містять в собі теоретичні відомості, приклади розв'язання за даними темами (розділ 1) та завдання для самостійної, індивідуальної роботи студентів, тестові завдання (розділ 2). В розділі 1 методичних рекомендацій студент має змогу ознайомитися з питаннями теорії і розібрати наведені приклади до виконання практичних завдань. В розділі 2 – набути навичок розв'язання завдань та перевірити якість їх засвоєння. Також указані основні літературні джерела.

Розділ 1. Матриці, визначники. Методи розв'язання систем лінійних рівнянь

Мета: сформувати поняття лінійної алгебри: виродженої, оберненої матриці, навички її знаходження, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) методом оберненої матриці.

Після вивчення теми 1 «Матриці, визначники. Методи розв'язання систем лінійних рівнянь» студент повинен:

а) *знати*: види матриць, елементарних перетворень та дій над ними; методи знаходження оберненої матриці, алгоритми розв'язання СЛАР.

б) *вміти*: застосовувати метод оберненої матриці при розв'язанні практичних задач; обчислювати суму, різницю, добуток матриць, виконувати елементарні перетворення над матрицями, знаходити транспоновану та обернену матрицю.

Джерела навчальної інформації:

- Конспект лекцій
- Список рекомендованої літератури: [1, с. 16…20]

1.1. Завдання для самостійної роботи.

1.1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь методом оберненої матриці.

1.	$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + 5y + z = 10 \\ 4x - 7y + 5z = 7 \end{cases}$	**2.**	$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 7 \\ x + 3y - z = 3 \\ 4x + y + 3z = 8 \end{cases}$	**3.**	$\begin{cases} 5x - 8y - 4z = 6 \\ 7x - 5z = 9 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

4.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2y+4z=3 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$	**5.**	$\begin{cases} x-5y+3z=-2 \\ y+2z=3 \\ -3x+4y+2z=6 \end{cases}$	**2.**	$\begin{cases} 3x+5y-6z=-1 \\ 2x+4y+3z=7 \\ -3x+y+z=2 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$	**8.**	$\begin{cases} 8x-y-z=6 \\ 5x-5y-z=-1 \\ 10x+3y+2z=15 \end{cases}$	**9.**	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 2x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x+3z=4 \\ 3x+y+7z=10 \\ 2x+y+8z=10 \end{cases}$	**11.**	$\begin{cases} 6x+7y+3z=16 \\ 3x+y=4 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}$	**12.**	$\begin{cases} 6x+9y+4z=19 \\ -x-y+z=-1 \\ 10x+y+7z=18 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x+7y+3z=-11 \\ -4x+9y+4z=-9 \\ -3y+2z=-5 \end{cases}$	**14.**	$\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-4y+z=-4 \\ 4x-3y+z=2 \end{cases}$	**15.**	$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 8x-7y-6z=1 \\ -3x+4y+2z=1 \end{cases}$
16.	$\begin{cases} 2x-y-4z=0 \\ 4x-9y+3z=11 \\ 2x-7y-z=3 \end{cases}$	**17.**	$\begin{cases} 5x+4y+2z=-1 \\ x+2y+4z=1 \\ 3x+5z=-3 \end{cases}$	**18.**	$\begin{cases} 3x+y+2z=6 \\ -x+2z=1 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 2x+2y+5z=12 \\ 3x+3y+6z=9 \\ 4x+3y+4z=8 \end{cases}$	**20.**	$\begin{cases} 8x+5y-z=14 \\ x+5y+3z=8 \\ x+y=2 \end{cases}$	**21.**	$\begin{cases} -6x+y+11z=12 \\ 9x+2y+5z=7 \\ 3y+7z=10 \end{cases}$
22.	$\begin{cases} 3x-7y+2z=-2 \\ x-8y+3z=-4 \\ 4x-2y+3z=5 \end{cases}$	**23.**	$\begin{cases} x+7y+3z=-11 \\ -4x+9y+4z=-9 \\ -3y+2z=-5 \end{cases}$	**24.**	$\begin{cases} 5x+y-2z=9 \\ x+3y-z=0 \\ 8x+4y-z=21 \end{cases}$

25.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2y+4z=3 \\ 3x-5y+3z=1 \end{cases}$	**26.**	$\begin{cases} 2x+6y+z=6 \\ x+3y+2z=6 \\ 2y+z=2 \end{cases}$	**27.**	$\begin{cases} 3x+y=4 \\ 4x+3y+2z=11 \\ 2x+2y-7z=-10 \end{cases}$
28.	$\begin{cases} x-2y+5z=12 \\ 3x+6z=18 \\ 4x+3y+4z=16 \end{cases}$	**29.**	$\begin{cases} 8x+5y-z=14 \\ x+5y+3z=8 \\ x+y=2 \end{cases}$	**30.**	$\begin{cases} x+3z=4 \\ 3x+y+7z=10 \\ 2x+y+8z=10 \end{cases}$

Приклад розв'язання задач

Розв'язати системи рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-\ x_3=\ 1 \\ -\ x_1+\ x_2 \qquad =\ 2 \\ 2x_1+3x_2+\ x_3=-2 \end{cases}.$$

Розв'язання. а) Знайдемо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=4+0+3+2-0+2=11\neq 0.$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок та обернену матрицю.

Знайдемо обернену матрицю, для цього знайдемо алгебраїчні доповнення :

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-(12-4)=-8$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-(-1-0)=1 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0+1=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3-2=-5 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-(0-1)=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(2+3)=-5 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=4+2=6$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4+2=6.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ -5 & -8 & 6\end{pmatrix}$$

Оскільки $X=A^{-1}\cdot H$, то

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-5)+1\cdot(-2)\\ 1\cdot1+6\cdot2+1\cdot(-2)\\ (-5)\cdot1+(-8)\cdot2+6\cdot(-2)\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11\\ 11\\ -33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix},$$

тобто маємо $x_1=-1, \quad x_2=1, \quad x_3=-3$.

Відповідь. $(-1;1;-3)$.

2. Завдання для для самоперевірки

1.2.1. Теоретичні питання.

1. Матриці. Види матриць.
2. Ранг матриці та його обчислення.
3. Лінійні операції над матрицями. Транспонування матриць.
4. Обернена матриця. Методи обчислення.
5. Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.
6. Умови сумісності систем лінійних рівнянь. Теорема Кронекера - Капеллі.

1.2.2. Тестові завдання.

1. Одиничною матрицею називається:

А) матриця, всі елементи першого рядка якої є одиницями;

Б) квадратна матриця, визначник якої дорівнює1;

В) квадратна матриця, на головній діагоналі якої стоять одиниці, а всі інші елементи – нулі;

Г) матриця, всі елементи якої є одиницями.

2. Визначник одиничної матриці n-го порядку дорівнює:

А) n;

Б) 0;

В) 1;

Г) 1/n

3. Якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, тоді для неї транспонована є матриця:

А) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

Г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

4. Матриці A та B мають однакову розмірність 2×3. Над ними можна провести операцію:

А) перемножити A на B;

Б) поділити B на A;

В) додати;

Г) перемножити B на A.

5. Яка матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A?

А) Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A \cdot A^{-1} = 0$;

Б) Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку;

В) Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A^{-1}A = A$;

Г) Квадратна матриця A^{-1} того ж порядку, що і A, називається оберненою до A, якщо $A \cdot A^{-1} = A$

6. Обернена матриця обчислюється за формулою:

А) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

В) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

Б) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$;

Г) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

7. Матрицею називається

А) прямокутна таблиця чисел (дійсних або комплексних);

Б) число;

В) фігура на площині;

Г) числова послідовність

8. Елемент a_{12} матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ дорівнює:

А) 0;

Б) 5;

В) 3;

Г) 1.

9. Які елементарні перетворення не використовують над матрицями:

А) множення(ділення) рядка на число відмінне від 0;

Б) додавання(віднімання) рядків;

В) додавання допоміжних рядків;

Г) викреслювання нульового рядка.

10. Матриці A та B мають розмірності 2×3 та 3×4 відповідно. Над ними можна провести операцію:

А) додати;

Б) від A відняти B;

В) перемножити B на A;

Г) перемножити A на B.

Розділ 2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Мета: сформувати вміння виконувати лінійні операції над векторами, застосовувати їх для розв'язання практичних задач; складати та використовувати різні види рівнянь прямої на площині.

Після вивчення теми 2 «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії» студент повинен:

а) *знати*: основні поняття векторної алгебри та аналітичної геометрії, види лінійних операцій над векторами, властивості скалярного, векторного, мішаного добутків векторів; види рівнянь прямої на площині, умови паралельності та перпендикулярності прямих.

б) *вміти*: застосовувати методи векторної алгебри та аналітичної геометрії до розв'язання практичних задач..

Джерела навчальної інформації:

- Конспект лекцій
- Список рекомендованої літератури: [1, с. 54…65.76…82]

2.1. Завдання для самостійної роботи.

1.1.2. Виконати лінійні операції над векторами.

№1

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(6,-1,0), В(-2,5,9), С(-4,3.5), Д(0,-3,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;-4;5\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добуток векторів.

№2

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(2,-3,-1), В(-1,4,0), С(-8,-4.5). Д(9,0,3).*
2. Дано вектори $a = \{2,-5,7\}; b = \{3,-6,2\}$ Знайти векторний та скалярний добутки векторів.

№3

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(1,-7,-1), В(3,4,0), С(-2,-3.5). Д(8,-2,3)*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-6;3\}, \vec{b} = \{4;-5;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів.

№4

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(7,0,-1), В(-3,2,-6), С(3,-4.5). Д(-5,2,3)*
3. Дано вектори $\vec{a} = \{4;-2;5\}, \vec{b} = \{1;-5;10\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів.

№5

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(2,-3,-1), В(-1,4,0), С(-8,-4.5). Д(5,2,5)*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;-4;5\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів.

№6

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *A(7,-3,-5), B(0,4,0), C(-2,1.5). Д(4,2,4).*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-8;1\}, \vec{b} = \{0;-2;5\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів.

№7

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *A(5,2,-1), B(-8,4,0), C(0,-4.5). Д(2,2,-3).*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{6;0;-5\}, \vec{b} = \{12;-1;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№8

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *A(3,-3,-1), B(-5,4,1), C(4,-4.5). Д(1,3,3).*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{9;-1;2\}, \vec{b} = \{-3;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№9

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *A(-5,3,-1), B(-1,5,0), C(6,-4.5). Д(1,-2,4)*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{1;2;5\}, \vec{b} = \{3;-2;3\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№10

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *A(-3,-3,3), B(-1,6,0), C(1,-4.1). Д(8,0,-5)*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;-4;5\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№11

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *A(3,2,-1), B(7,-4,2), C(-5,-4.5). Д(6,-2,3)*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{1;-2;5\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№12

3. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-3,0,-1),В(-4,5,0), С(-1,-2.5). Д(-5,1,3.*

4. Дано вектори $\vec{a} = \{2;7;5\}, \vec{b} = \{-1;6;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№13

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-3,0,-1), В(7,4,0), С(2,-4.5). Д(3,-2,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;-4;5\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№14

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-2,5,-1), В(6,4,1), С(-2,-4.5). Д(7,0,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{4;8;5\}, \vec{b} = \{1;3;-2\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№15

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(6,-6,-1), В(-1,7,2), С(0,-4.5). Д(1,-2,3)*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;6;0\}, \vec{b} = \{-1;-4;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№16

3. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-4,-5,1), В(1,2,0), С(-2,-4.5). Д(4,1,3).*
4. Дано вектори $\vec{a} = \{-2;-3;5\}, \vec{b} = \{-5;2;1\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№17

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-3,-3,-1), В(6,4,2), С(-8,1.5). Д(-5,2,3)*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;0;5\}, \vec{b} = \{2;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№18

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(12,-3,-1), В(-1,4,0), С(-1,-4.5).Д(1,4,1)*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{-6;4;1\}, \vec{b} = \{1;3;1\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№19

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-4,3,1), В(1,2,2), С(-2,-4.5). Д(-4,0,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;1;2\}, \vec{b} = \{4;-8;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№20

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-6,-3,1), В(-10,4,-5), С(-8,-4.0). Д(1,4,-3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{8;4;3\}, \vec{b} = \{5;-10;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№21

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(3,-2,1), В(-1,4,2), С(2,-7.5). Д(0,-2,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{9;-4;5\}, \vec{b} = \{6;-2;-3\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№22

5. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(5,0,-1), В(-1,4,8), С(-2-4.5). Д(5,0,3).*
6. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-6;1\}, \vec{b} = \{10;-2;3\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№23

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-4,0,1), В(-1,4,7), С(-3,6.5). Д(4,-2,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{-6;3;5\}, \vec{b} = \{4;-2;4\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№24

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(6-1,-1), В(-3,4,3), С(-9,-4.1). Д(1,0,-3)*

2. Дано вектори $\vec{a} = \{-2;0;1\}, \vec{b} = \{5;-6;10\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№25

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(7,-5,-1), В(0,4,2), С(-8,-6.1). Д(-3,2,5).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{6;-3;15\}, \vec{b} = \{-4;4;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№26

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(4,1,-1), В(-3,4,2), С(7,-4.5). Д(-2,2,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{5;-4;1\}, \vec{b} = \{6;-12;1\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№27

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(3,-5,-1), В(-1,4,2), С(-8,9.5). Д(-1,2,0).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-10;5\}, \vec{b} = \{-3;-2;3\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№28

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(12,-3,-11), В(-1,4,2) С(0,-4.5).Д(6,1,3)*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{9;-1;1\}, \vec{b} = \{1;-10;5\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№29

1. Визначити об'єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(-2,3,-9), В(-1,-3,1), С(-2,-4.1). Д(0,2,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{2;-4;-9\}, \vec{b} = \{7;-14;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

№30

1. Визначити об’єм піраміди *АВСД*, якщо: *А(4,-5,-1), В(-1,5,10), С(-3,-6.5). Д(-1,4,3).*
2. Дано вектори $\vec{a} = \{3;-4;5\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}$. Знайти векторний та скалярний добутки векторів

Приклад розв’язання задач

Відомі координати вершин тетраедра – точки $A(-5;-3;1), B(6;7;-1), C(-14;-15;4), D(-1;5;3)$. Знайти:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ у системі орт і модулі цих векторів;
2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
4) площу трикутника ABC;
5) об’єм тетраедра $ABCD$.

Розв’язання.

1) Відомо, що будь-який вектор $\vec{a}$ може бути зображеним у системі орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ за допомогою формули:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (1)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox, Oy, Oz, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрямки яких збігаються з додатними напрямками Ox, Oy, Oz.

Коли відомі координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатні осі знаходять за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1;\ a_y = y_2 - y_1;\ a_z = z_2 - z_1 \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (3)$$

Підставимо у (2.3) координати точок A і B, знайдемо:

$$\overrightarrow{AB} = \left(6-(-5)\right)\vec{i} + (7-(-3))\,\vec{j} + \left(-1-1\right)\vec{k} = 11\vec{i} + 10\,\vec{j} - 2\vec{k}$$

Аналогічно знайдемо координати векторів

$$\overrightarrow{AC} = -9\vec{i} - 12\,\vec{j} + 3\vec{k}; \qquad \overrightarrow{AD} = 4\vec{i} + 8\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

Відомо, що модуль вектора, який заданий за формулою (1), знаходять за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (4)$$

Застосуємо формулу (2.4) для обчислення модулів векторів і отримаємо:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{11^2 + 10^2 + \left(-2\right)^2} = \sqrt{121 + 100 + 4} = \sqrt{225} = 15;$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(-9\right)^2 + \left(-12\right)^2 + 3^2} = \sqrt{234} = 3\sqrt{26};$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 64 + 4} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

2) Відомо, що косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів. Звідси:

$$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{11\cdot\left(-9\right) + 10\cdot\left(-12\right) + \left(-2\right)\cdot 3}{15\cdot 3\sqrt{26}} = \frac{-225}{45\sqrt{26}} =$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26} \approx -0{,}9806; \qquad \varphi = \arccos\left(-0{,}9806\right) \approx 168^0 42'.$$

3) Проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ знайдемо як відношення скалярного добутку цих векторів до модуля вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто, за формулою:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \qquad (5)$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{11\cdot 4 + 10\cdot 8 + \left(-2\right)\cdot 2}{15} = \frac{44 + 80 - 4}{15} = \frac{120}{15} = 8.$$

4) Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ як вектор $\vec{P}$. Тоді, як відомо, модуль вектора $\vec{P}$ дорівнює площі

паралелограма, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Таким чином, площа трикутника ABC дорівнює половині модуля вектора $\vec{P}$, тобто $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{P}\right|$.

$$\vec{P}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 11 & 10 & -2\\ -9 & -12 & 3\end{vmatrix}=6\vec{i}-15\vec{j}-42\vec{k};$$

$$\left|\vec{P}\right|=\sqrt{6^2+(-15)^2+(-42)^2}=\sqrt{2025}=45;\quad S_{ABC}=\frac{45}{2}=22,5.$$

5) Відомо, що об'єм паралелепіпеда, що побудований на трьох не компланарних векторах, дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку. Якщо відомі проекції векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k},$$

то мішаний добуток цих векторів знаходять за формулою:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Застосуємо формулу (6) для обчислення мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}11 & 10 & -2\\ -9 & -12 & 3\\ 4 & 8 & 2\end{vmatrix}=-180.$$

Таким чином, об'єм паралелепіпеда, що побудований на векторах $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 180. Шуканий об'єм тетраедра $ABCD$ становить шосту частину від знайденого об'єму паралелепіпеда.

Отже,

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{180}{6}=30.$$

1.1.3. Розв’язати задачі.

1. Дано трикутник з вершинами $A(-1;2)$, $B(3;4)$ і $C(1;6)$. Обчислити відстань від вершини B до медіани, проведеної з вершини B. Зробити малюнок.

2. Через точку перетинання прямих $5x-2y-13=0$ і $x+3y-11=0$ провести пряму перпендикулярно до прямої $4x-7y+12=0$.Зробити малюнок.

3. Знайти точку, симетричну точці $Q(2;1)$ відносно прямої $2x+5y-38=0$.Зробити малюнок.

4. На прямій $2x+y+6=0$ знайти точку, рівновіддаленну від двох даних точок $A(2;3)$ і $B(4;5)$. Зробити малюнок.

5. Обчислити відстань від точки $A(1;2)$ до прямої, що проходить через точки $B(3;8)$ і $C(5;-13)$. Зробити малюнок.

6. Знайти проекцію точки $P(-\frac{7}{5};3)$ на пряму $15x-5y-2=0$. Зробити малюнок.

7. Скласти рівняння сторони AC ΔABC, якщо $A(5;-5)$ і $B(-3;1)$ – дві його вершини, а $D(2;5)$ – точка перетинання його висот. Зробити малюнок.

8. На прямій $2x+y+6=0$ знайти точку, рівновіддаленну від двох даних точок $A(-1;0)$ і $B(1;-1)$.

9. Знайти центр кола радіуса $R=8$, що стосується двох даних прямих $3x=4y+10=0$ і $3x+4y=0$. (Дати яке-небудь одне рішення).

10. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $2x-3y-5=0$ і $6x-4y+7=0$, суміжного з кутом, що містить точку $C(2;-1)$.

11. На осі ординат знайти таку точку M, відстань якої до точки $N(-8;13)$ було рівним 17.

12. Дано вершини трикутника: $A(3;-5)$; $B(-3;3)$ і $C(-1;-2)$. Визначити довжину бісектрис його внутрішнього кута при вершині A.

13. Дано рівняння двох сторін квадрата $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох сторін цього квадрата.

14. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *(-2;5)* під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $4x+3y-1=0$. Зробити малюнок.
15. Дано трикутник з вершинами: $A(1;2), B(3;7), C(5;-13)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини C на сторону AB. Зробити малюнок.
16. Відомі дві вершини трикутника *АВС: А(-4,4). В(4,-12)* та точка *М(4,2)* перетину його висот. Знайти вершину *С.*
17. Знайти рівняння прямої, яка відсікає на осі ординат відрізок, який дорівнює *2* та проходить паралельно прямій *2у-х=3.*
18. Довести, що чотирикутник *АВСД* – трапеція, якщо *А(3,6), В(5,2), С(-1,-3), Д(-5,5).*
19. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *А(3,1)* перпендікулярно до прямої *ВС,* якщо *В(2,5), С(1,0).*
20. Знайти точку *О* перетину діагоналей чотирикутника *АВСД,* якщо *А(-1,-3), В(3,5), С(5,2), Д (3,-5).*
21. Відомі рівняння сорони *АВ* трикутника *АВС 4х+у=12*, його висот *ВН 5х-4у=12* та *АМ х+у=6* . Знайти рівняння двоїх інших сторін трикутника *АВС.*
22. Відомі дві вершини трикутника *АВС: А(-6,2), В(2,-2)* та точка *Н(1,2)* перетину його висот. Знайти координати точки *М* перетину сторони *АС* та висоти *ВН.*
23. Знайти рівняння висот трикутника *АВС*, які проходять через вершини *А* і *В,* якщо *А(-4,2), В(3,-5), С(5,0).*
24. Знайти координати точки *М* перетину перпендикулярів, які проведено через середини сторін трикутника з вершинами *А(2,3), В(0,-3), С(6,-3).*
25. Знайти рівняння висоти трикутника *АВС,* яка проходить через вершину *А*, якщо відомі рівняння його сторін: *-2х-у-3=0 (АВ), -х+5у-7=0 (АС),*
 –3х-2у+13=0(ВС).
26. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *О(0,0)* та проходить через точку перетину прямих *2х+5у+8=0, 2х+3у=4=0.*
27. Відомі рівняння двох сторін ромбу *2х-5у-1=0* та *2х-5у-34=0* та рівняння однієї з його діагоналей *х+3у-6=0*. Знайти рівняння другої діагоналі.

28. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *A(-2,1*) перпендікулярно до прямої *BC*, якщо *B(-3,-2), C(1,6).*
29. Знайти рівняння медіани *CM,* висоти *CK* трикутника *ABC*, якщо координати вершин *A (4,6), B(-4,0), C(-1,-4).*
30. Відомі рівняння двох сторін ромбу *4x+y-1=0* та *3x-2y-4=0* та рівняння однієї з його діагоналей *x+6y-5=0*. Знайти рівняння другої діагоналі.

Приклади розв'язання задач

Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(-2;9)$, $B(7;-3)$, $C(13;14)$. Знайти:

1) Довжину сторони AB;
2) Рівняння сторін AB і AC та їх кутові коефіцієнти;
3) Рівняння медіан, що проведені з вершин A і B, точку перетину медіан;
4) Кут A трикутника в радіанах з точністю до двох знаків;
5) Рівняння висоти CT, що проведена з вершини C на сторону AB та її довжину;
6) Координати точки M, що симетрична до точки A відносно прямої CT.

Розв'язання.

1) Відстань d між двома точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ визначають за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1)$$

Застосуємо (3.1) для визначення довжини сторони AB:

$$AB = \sqrt{(7-(-2))^2 + (-3-9)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15.$$

2) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,. \qquad (2)$$

Для того, щоб одержати рівняння сторони AB, підставимо у (2) координати точок A і B:

$$\frac{y-9}{-3-9}=\frac{x+2}{7+2};\quad \frac{y-9}{-12}=\frac{x+2}{9};\quad \frac{y-9}{-4}=\frac{x+2}{3};\tag{3}$$
$$3y-27=-4x-8;\qquad 4x+3y-19=0.$$

Для визначення кутового коефіцієнта сторони AB розв'яжемо знайдене рівняння AB відносно змінної y:

$$3y=-4x+19;\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{19}{3}.$$

звідси кутовий коефіцієнт $k_{AB}=-\frac{4}{3}$.

Підставимо тепер у (2) координати точок A і C, знайдемо рівняння прямої AC та її кутовий коефіцієнт:

$$\frac{y-9}{14-9}=\frac{x+2}{13+2};\quad \frac{y-9}{5}=\frac{x+2}{15};\quad \frac{y-9}{1}=\frac{x+2}{3};$$
$$3y-27=x+2;\qquad x-3y+29=0;$$
$$y=\frac{1}{3}x+\frac{29}{3};\quad k_{AC}=\frac{1}{3}.$$

3) Нехай точка D є серединою відрізка BC, а точка E – середина відрізка AC. Для визначення координат точок D і E застосуємо формули для ділення відрізка навпіл:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2};\tag{4}$$

$$x_D=\frac{7+13}{2}=10;\quad y_D=\frac{-3+14}{2}=5{,}5;\quad D(10;5{,}5);$$

$$x_E=\frac{-2+13}{2}=5{,}5;\quad y_D=\frac{9+14}{2}=11{,}5;\quad E(5{,}5;11{,}5).$$

Підставимо у (2) координати точок A і D, отримаємо рівняння медіани AD:

$$\frac{y-9}{5{,}5-9}=\frac{x+2}{10+2};\quad \frac{y-9}{-3{,}5}=\frac{x+2}{12};\frac{y-9}{-7}=\frac{x+2}{24};\tag{5}$$
$$-7x-14=24y-216;\quad 7x+24y-202=0.$$

Аналогічно, підставимо у (3.2) координати точок B і E і відшукаємо рівняння медіани BE:

$$29x+3y-194=0.\tag{6}$$

Нехай точка N – точка перетину медіан. Для того, щоб знайти координати цієї точки, треба розв'язати систему з рівнянь (5) і (6):

$$\begin{cases} 7x+24y-202=0; \\ 29x+3y-194=0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x=6$; $y=\dfrac{20}{3}$. Таким чином, $N\left(6;\dfrac{20}{3}\right)$ – точка перетину медіан.

4) Відомо, що кут φ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 і k_2, обчислюють за формулою:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (7)$$

Шуканий кут A утворюють прямі AB і AC, кутові коефіцієнти яких було знайдено у пункті (2). Застосуємо (3.7), матимемо:

$$\mathrm{tg}A=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}=\frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=3;$$

$$A=\mathrm{arctg}3=71^{\circ}34'; \quad \text{або у радіанах} \quad A\approx 1,249.$$

5) Рівняння прямої, що проходить у заданому напрямку через задану точку, має вигляд:

$$y-y_1=k\left(x-x_1\right). \qquad (8)$$

Висота CT перпендикулярна до сторони AB. Для знаходження кутового коефіцієнта висоти CT використаємо умову перпендикулярності прямих CT *і* AB. Оскільки $k_{AB}=-\dfrac{4}{3}$, то $-\dfrac{4}{3}k_{CT}=-1$; $k_{CT}=\dfrac{3}{4}$.

Підставимо у (3.8) координати точки C і знайдений кутовий коефіцієнт висоти CT, відшукаємо рівняння CT:

$$y-14=\frac{3}{4}(x-13); \quad 4y-56=3x-39; \quad 3x-4y+17=0. \qquad (9)$$

Для знаходження довжини висоти CT визначимо спочатку координати точки перетину прямих AB і CT, тобто координати точки T. Для цього розв'яжемо систему рівнянь (3) і (9):

$$\begin{cases} 4x+3y-19=0 \\ 3x-4y+17=0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x=1;\ y=5$, тобто $T(1;5)$. Довжину висоти CT знаходимо за формулою (1):

$$d_{CT}=\sqrt{(13-1)^2+(14-5)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15.$$

6) Оскільки пряма AB перпендикулярна до прямої CT, то шукана точка M, яка симетрична до точки $A(-2;9)$ відносно прямої CT, належить прямій AB. Крім того, точка $T(1;5)$ є серединою відрізка AM. Застосуємо формули (4) і знайдемо координати шуканої точки M:

$$1=\frac{-2+x_M}{2},\ \text{звідки}\quad x_M=4;\qquad 5=\frac{9+y_M}{2},\quad \text{звідки}\quad y_M=1.$$

Таким чином, $M(4;1)$ – шукана точка

2. Завдання для для самоперевірки

2.2.1. Теоретичні питання.

1. Розкладання вектора за ортонормованим базисом. Координати вектора. Напрямні косинуси вектора.
2. Лінійні дії з векторами в координатній формі. Координати вектора з відомим кінцем і початком.
3. Правила знаходження суми, різниці, добутку вектора на число.
4. .Скалярний добуток векторів, його властивості. Скалярний добуток у координатній формі.

5. Векторний добуток векторів, його властивості. Векторний добуток у координатній формі.
6. Мішаний добуток векторів, його геометричний зміст. Мішаний добуток у координатній формі

2.2.2. Тестові завдання.

1.Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати його початку $A(x_A, y_A, z_A)$ і кінця $B(x_B, y_B, z_B)$?

А) $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B\,; y_A + y_B\,; z_A + z_B)$;

Б) $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B\,; y_A - y_B\,; z_A - z_B)$;

В) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,; y_B - y_A\,; z_B - z_A)$;

Г) $\overrightarrow{AB} = (x_A \cdot x_B\,; y_A \cdot y_B\,; z_A \cdot z_B)$

2. Як обчислюється модуль (довжина) вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$?

А) $|\vec{a}| = |a_x| + |a_y| + |a_z|$;

В) $|\vec{a}| = -\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 - a_z{}^2}$;

Б) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 - a_y{}^2 + a_z{}^2}$;

Г) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

3. Що називається скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

А) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$;

Б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$;

В) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$;

Г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\vec{b} \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$

4. Чому дорівнює векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$?

А) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$;

В) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$;

Б) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & -a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$;

Г) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & b_x & a_x\\ \vec{j} & b_y & a_y\\ \vec{k} & b_z & a_z\end{vmatrix}$

5. Векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю, якщо

А) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні $(\vec{a}\perp\vec{b})$;

Б) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $\vec{a}\parallel\vec{b}$;

В) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\pi/4$;

Г) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють між собою кут $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\pi/6$

6.Відомі координати точок: *A (5;-1;-4), B(9;-3;-6).* Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$

А) (-4; 2; 2); Б) (4; -2; -2)+ В) (4; -4; -10); Г) (-4; -4;-10)

7. Мішаним добутком трьох векторів називається:

А) векторний добуток першого на векторний добуток другого і третього;
Б) скалярний добуток першого на векторний добуток другого і третього;
В) добуток першого на скалярний добуток другого і третього;
Г) добуток їх довжин

8.Рівняння прямої на площині, яка проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$, має такий вигляд:

а) $(x-x_1)(x_2-x_1)=(y-y_1)(y_2-y_1)$;

б) $(x-x_1)(x_2-x_1)+(y-y_1)(y_2-y_1)=0$;

в) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}+\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=0$;

г) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

9.Прямі $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ паралельні, якщо:

а) $k_1\cdot k_2=1$;

б) $k_1\cdot k_2=-1$;

в) $k_1 = k_2$;
г) $k_1 = -k_2$;

10.Прямі $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярні, якщо:

а) $k_1 \cdot k_2 = 1$;
б) $k_1 \cdot k_2 = -1$;
в) $k_1 = k_2$;
г) $k_1 = -k_2$;

Розділ 3. Функції. Границя змінної величини та функції

Мета: ознайомитися з поняттям функції, її області визначення, значень, з видами, властивостями, сформувати поняття границі функції, теореми про границі; ознаки існування границь; поняття нескінченно малих та великих величин, встановити їх взаємозв'язок.

Після вивчення теми 3 «Функції. Границя змінної величини та функції» студент повинен:

а) *знати*: поняття границі змінної величини, її геометричну інтерпретацію; теореми про границі; ознаки існування границь; поняття нескінченно малих та великих величин та їх застосування при розв'язанні прикладів; методи обчислення границь; визначні границі; означення границь функції.

б) *вміти*: застосовувати теореми про границі при обчисленні прикладів; розкриття невизначеностей різних видів; методику застосування першої та другої визначних границь при розв'язанні прикладів.

Джерела навчальної інформації:

- Конспект лекцій
- Список рекомендованої літератури. [1, с.132...138; 149…179]

3.1. Завдання для самостійної роботи.

Знайти границі функцій:

1	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 3x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x+1}$.
2	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ tg 4x}{\sin 2x-\sin 4x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x+1}$.
3	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\, tg 3x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x-2}\right)^{-3x+1}$.
4	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{tg 3x\cdot\sin x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{2x+3}$.
5	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 2x}{tg 2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{3x+5}$.
6	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\, tgx}{\cos 3x-\cos^2 3x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x+1}\right)^{x-2}$.
7	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot tg 5x}{x\, tg 2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-6}{5x-4}\right)^{5x+4}$.
8	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^3 x}{x\arcsin x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^{2x+1}$.
9	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{\cos 3x-\cos x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x+5}$.
10	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{\sin 2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+1}\right)^{4x-2}$.
11	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 x}{1-\cos x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x+1}\right)^{6x+1}$.
12	а)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+2}\right)^{2x-4}$.

13	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg3x}{\sin 3x-\sin 5x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-5}{7x+2}\right)^{x+3}$.
14	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg5x}{\cos 6x-\cos 4x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{2x+1}$.
15	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{\cos 3x-\cos x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-5}\right)^{x+1}$.
16	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 6x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{3x+5}$.
17	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x-3}\right)^{2x+1}$.
18	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \mathrm{tg}3x}{x^2}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$.
19	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+3}\right)^{3x}$.
20	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \mathrm{tg}5x}{3x^2}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{2x+5}$.
21	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{1-3x}$.
222	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{2x-3}$.
23	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{x\cdot\sin 4x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x+1}$.
24	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x-1}$.
25	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\mathrm{tg}\,x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x+1}$.
26	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{x-1}$.

27	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{1-x}$.
28	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{x+5}$.
29	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}2x}$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-2}\right)^{6x}$.
30	a)	$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{ctg}5x$;	b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2-3x}$

Приклади розв'язання задач

Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\dfrac{\lim\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot 8x}=\dfrac{3}{8}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+6x}-1}{tg8x}=\dfrac{1}{16}\ !!!}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 9x}{9x^2}\cdot 9=18$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{x\cdot\sin 5x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{x(2x)^2}\cdot\dfrac{4x^2}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{4}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\arcsin 5x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=4\cdot\left\{\begin{array}{l}\arcsin 5x=y;\ x=\dfrac{1}{5}\sin y\\ \sin y=5,x\to 0,y\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{5y}{\sin y}=20$

5)
$$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\pi-x=y;\ x=\pi-y\\ x\to\pi,y\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{y}{2})}{y}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$$
$$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{y}{2}}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{y}{4}}{y}\cdot\dfrac{(\dfrac{y}{4})^2}{(\dfrac{y}{4})^2}=2\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{16}=0$$

6)
$$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{1-\cos x}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{2}\cdot x}\cdot\dfrac{x}{\dfrac{x}{2}}\cdot$$
$$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\quad \textit{или}\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

7) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos\alpha x}-\sqrt{\cos\beta x}}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{(\alpha+\beta)x}{2}\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}{x^2} =$$

$$= -2\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}{\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}{\frac{(\alpha-\beta)x}{2}}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{\alpha^2-\beta^2}{2} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\pi-2x=y, x\to\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi-y}{2}; y\to0\end{array}\right\} = \lim\limits_{y\to0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{2})}{y} = \lim\limits_{y\to0}\frac{\sin\frac{4}{2}}{\frac{4}{2}2} = \frac{1}{2}$

1) $\lim\limits_{x\to2}4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim\limits_{x\to2}\frac{2x}{x+1}} = 4^{\frac{4}{3}} = 4^3\cdot\sqrt{4};$ 2) $\lim\limits_{x\to2}a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\frac{1}{4}}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(8x-1)-\ln x] = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{8x-1}{x} = \ln\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-1}{x} = \ln 8.$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x-4})^{-2x+1} = \{1^\infty\} = [\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x-4})^{\frac{3x-4}{2}}]^{\frac{2}{3x-4}\cdot(-2x+1)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(-2x+1)}{3x-4}} = e^{-\frac{4}{3}}.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x-2}{3x+1})^{\frac{x}{2}-2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+[\frac{3x-2}{3x+1}-1])^{\frac{x}{2}-2} = \lim\limits_{x\to\infty}[1+\frac{-3}{3x+1}]^{\frac{-3x(\frac{x}{2}-2)\cdot\frac{3x+1}{-3}}{3x+1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(\frac{x}{2}-2)}{3x+1}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

5) $\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{t-3}{t+2})^{2t+1} = \lim\limits_{t\to\infty}[1+[\frac{t-3}{t+2}-1]]^{2t+1} = \lim\limits_{t\to\infty}[1-\frac{5}{t+2}]^{\frac{t+2}{-5}\cdot\frac{-5}{t+2}(2t+1)} = e^{-10}$

6)

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^x = \left\{\begin{array}{l}\textit{виділимо}\\ \textit{цілу частину}\end{array}\right\} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7})^x =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\textit{перетворимо функцію так, щоб}\\ \textit{використати 2чудову границю}\end{array}\right\} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7})^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}]^{\frac{x(8x-3)}{x^2+3x+7}} = e^8;$$

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x} = \left\{\begin{array}{l}\cos x=\alpha, x\to\frac{\pi}{2}\\ x=\arccos\alpha, \alpha\to0\end{array}\right\} = \lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}} = e^2$

9) $\lim\limits_{x\to0}(1+3tg^2x)^{ctg^2x} = \lim\limits_{x\to0}(1+3tg^2x)^{\frac{3}{3tg^2x}} = e^3$

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+9tg^2x)^{\frac{6}{x^2}}=\left\{1^{\infty}\right\}=[\lim\limits_{x\to 0}(1+9tg^2x)^{\frac{1}{9tg^2x}}]^{\frac{9tg^2x\cdot 6}{x^2}}=e^{54}$! можна замінити

11) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\pi x}=\left\{1^{\infty}\right\}=[\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}]^{\cos\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}=e^{-1}$. заміна!

12) $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{5}{x-2}}=\left\{\begin{array}{l} 7-3x=1+\alpha;\ \dfrac{5}{x-2}=\dfrac{5}{-\dfrac{\alpha}{3}+2-2}=\dfrac{-15}{\alpha}; \\ x=(-\alpha+6)\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{-15}{\alpha}}=e^{-15}.$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+3)-\ln 3}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x^2+3}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{x^2}{3})}{\dfrac{x^2}{3}\cdot 9}=\dfrac{1}{3}$!

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}=-3;$ 15) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg6x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg6x}\cdot\dfrac{6}{6}=\dfrac{1}{6}$!;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[5]{x+1}-1}=2\cdot 5=10$!; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{x}\lim\dfrac{x}{\ln+x}=2;$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\left\{\begin{array}{l}1+x=y^5 \\ y\to 1\,при\,x\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y+1}=\dfrac{3}{5}$

3.2. Завдання для для самоперевірки

3.2.1. Теоретичні питання.

1.Запишіть першу та другу визначні границі та їх різновиди.

2.Перелічите основні тереми про границі.

3.Дайте означення числа *e* як основи натуральної системи логарифмів.

4.Назвіть основні методи розв'язання границь.

3.2.2.Тестові завдання

1. Перша визначна границя має вигляд

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

2. Границя $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x}{x^2-1}$ дорівнює

a) 0
b) 1
c) 1/2
d) Не існує

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x+1}=$

a) ∞
b) 5
c) 1
d) 0

4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x(x+3)}=$

А) 0;
Б) 1;
В) $\frac{1}{4}=0{,}25$;
Г) $\frac{5}{3}=1{,}(6)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$

А) 1;
Б) x;
В) e;
Г) ∞

6. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{5}{x}} =$

А) 1;
Б*)* *x*;
В) e;
Г) ∞

7. Границя сталої величини дорівнює:

a) Одиниці;
b) Нулю;
c) «е»
d) Нескінченності

8. Функція виду $y=kx+b$ називається:

a) Логарифмічною;
b) Тригонометричною;
c) Показовою;
d) Лінійною.

9. Величина, обернена до нескінченно великої є:

a) Сталою;
b) Нескінченно малою;
c) Не існує;
d) Нескінченно великою.

10. Перша визначна границя дорівнює:

a) Одиниці;
b) Нулю;
c) «е»
d) Нескінченності.

Розділ 4. Похідна та її застосування

Мета: сформувати поняття похідної елементарних функцій, правила знаходження похідних, навички їх диференціювання; дослідження функції на екстремум, опуклість, вгнутість та побудови графіків функцій

Після вивчення теми 4 «Похідна та її застосування» студент повинен:

а) *знати***:** означення,геометричний зміст похідної елементарних функцій, правила та формули їх диференціювання; алгоритм дослідження функції на екстремум, опуклість, вгнутість та побудови графіків функцій.

б) *вміти*: застосовувати правила та формули знаходження похідних елементарних функцій для розв’язання прикладів; визначати вид функції, її властивості, аналізувати їх для характеристики, застосовувати план дослідження функції та побудови її графіка.

Джерела навчальної інформації:

- Конспект лекцій
- Список рекомендованої літератури. **[**1, с.191...207; 246…260] .

4.1. Завдання для самостійної роботи.

Знайти похідні функцій:

1.

$$y=\left(2x^4-3\sqrt{x^5}-1\right)^4$$

$$y=3^{ln4x-2x}$$

$$y=\frac{\ln 4x}{x^2-6x}$$

$$y=\frac{9}{\sqrt[7]{x^5+4x-1}}$$

$$y=3^{7x^2}\cdot ln(4x^3-5)$$

2.

$$y=\left(3x-4\sqrt{x}+2\right)^5$$

$$y=e^{3x-6}\ln(8x+3)$$

$$y=5^{-x^3-4x+5\ln 5}$$

$$y=\frac{6}{\ln^3(4x-7)}$$

$$y=\frac{\sqrt{6^x-5}}{8x+10x^2}$$

3.

$$y=\left(x^2-\frac{1}{x}+5\sqrt{x}\right)^3$$

$$y=\sqrt[5]{\left(x^5-3x\right)^7}$$

$$y=\ln(6x-x^6-9)$$

$$y=\frac{-7}{\sqrt[4]{5x-3x^2}}$$

$$y=\frac{(4x-7)^3}{\ln 7x}$$

$$y=(x^3+2x-7)\ln\sqrt{5x}$$

4.

$$y=\left(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4\right)^2$$

$$y=\sqrt[5]{\left(x^5-3x\right)^7}$$

$$y=\frac{\ln 6x-9}{x+7x^6}$$

$$y=9^{x^3-\ln(6x+7)}$$

$$y=\frac{3}{\sqrt[6]{7+\ln x}}$$

5.

$$y=\left(x^5-\sqrt[3]{x}+1\right)^5$$

$$y=\frac{\sqrt{3^x-6x}}{1+9x^3}$$

$$y=\frac{-4}{\ln^3 9x}$$

$$y=\ln\left((4x^3-5)^2\right)$$

$$y=3^{2x}\left(x^5-\ln 6x\right)$$

6.

$$y=\left(6x^3-\frac{3}{x^3}+4\right)^2$$

$$y=5^{-5x^3-\ln 4}$$

$$y=\frac{4x-x^5}{\ln\left(x^3+6\right)}$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[4]{5^{x^5}-x^3}}$$

$$y=7^x\cdot\ln(x^3+\ln\sqrt{3x}-1)$$

7.

$$y=\left(3x^5-\frac{1}{x^4}+7\right)^3$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[4]{9x^5-2x}}$$

$$y=\frac{\ln 4x}{x^2-7}$$

$$y=\sqrt[5]{4x^3+x}$$

$$y=(3-x^3)\cdot 2^{x^5-4x^2}$$

8.

$$y=\left(x^3-4\sqrt{x^3}-2\right)^3$$

$$y=8^{(4x-5\ln 2x)}$$

$$y=\frac{9}{\ln\left(x^5-1\right)}$$

$$y=e^{(3^x-4x)}\cdot x^5$$

$$y=\frac{6x^2-9^x}{\sqrt{3x^2+7x}}$$

9.

$$y=\left(x^4-2\sqrt[3]{x}-1\right)^3$$

$$y=\ln^8(4x+3x^7-5)$$

$$y=\frac{-2}{\sqrt[9]{6x^3+4x-8}}$$

$$y=9^{\ln(x^3-4x)+5}$$

$$y=\frac{8^{4x^2}}{\ln\left(x^2-1\right)}$$

10.

$$y=\left(3x^2-\frac{5}{x^3}-2\right)^5$$

$$y=\ln^6(\ln 3x-4)$$

$$y=(3-x^3)\cdot 2^{x^5-4x^2}$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[4]{\ln(-3x)^3}}$$

$$y=\frac{\sqrt{2^x-x}}{3x^2+x^4}$$

11.

$$y=\left(2x^4-\frac{2}{x^4}-7\right)^5$$

$$y=\frac{-3}{\ln(4-x)^2}$$

$$y=5^{2x-3e^{4x^2-3}}\cdot x^{-8}$$

$$y=\ln((8x+5)^6)$$

$$y=\frac{\sqrt{9+3x^2}}{7^x+\ln\sqrt{\mathrm{x}}}$$

12.

$$y=\left(3x^2-2\sqrt[4]{x}+5\right)^5$$

$$y=e^{2x^2+6}\cdot(4x^{-3}-5)$$

$$y=\frac{5}{\ln^3\left(-7x^2-1\right)}$$

$$y=-\ln(\ln\ 4x^7)$$

$$y=\frac{5x+3^x}{\sqrt{2x^3-7x}}$$

13.

$$y=\left(x^3-4\sqrt[4]{x^3}-2\right)^3$$

$$y=\frac{\sqrt{5^x+2}}{3-4x^2}$$

$$y=e^{5x}\cdot(x^2-5x+1)$$

$$y=\frac{5}{\ln(\ln\ 4x)}$$

$$y=\frac{\sqrt{10+x^2}}{8^x-\ln 3x}$$

14.

$$y=\left(x^3-2\sqrt[3]{x}+7\right)^4$$

$$y=4^x\cdot(5x^9-5x^4+2)$$

$$y=\ln^7(6x^3+7x-1)$$

$$y=\frac{7x-2^x}{\sqrt{4x+5}}$$

$$y=\frac{-3}{\ln^4\left(x^2+9\right)}$$

15.

$$y=\left(x^6-\frac{3}{x^2}-8\right)^3$$

$$y=\frac{\ln 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

$$y=4^{tx}\cdot(x^2+5x-\ln 8)$$

$$y=\frac{-6}{\sqrt{x-3x^9}}$$

$$y=\ln^6(7x^3+6x^2-9x)$$

16.

$$y=\left(4x^5-3\sqrt[5]{x^2}-7\right)^3$$

$$y=\frac{5x-\ln x}{\sqrt{5x^3-1}}$$

$$y=e^{x^3}\cdot(2x-x^3)$$

$$y=\ln^4(5x^2+4x-1)$$

$$y=\frac{-7}{\sqrt[4]{9x-3x^8}}$$

17.

$$y=\left(3x^2-\frac{5}{x^3}+1\right)^4$$

$$y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\ln x}$$

$$y=e^{5x}\cdot(5x^3-4x^2+3)$$

$$y=\ln^5(ln6x+1)$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[4]{(-3x^3-4)^3}}$$

18.

$$y=\left(2-3x+6\sqrt[3]{x^2}\right)^3$$

$$y=\frac{\sqrt{2-x^2}}{\ln 2x}$$

$$y=5^x\cdot(4x^2+2x+1)$$

$$y=\ln^7(3x^3-2x^2+2)$$

$$y=\frac{-8}{\ln^3(x-2)}$$

19.

$$y=\left(\frac{12}{\sqrt[4]{x^3}}-3x^2+1\right)^4$$

$$y=\frac{\sqrt{7x-2}}{e^{2x}+4}$$

$$y=2^{6x}\cdot\sqrt{3x+2}$$

$$y=\ln^6(ln5x-5)$$

$$y=\frac{4}{\ln^5(9-x^6)}$$

20.

$$y=\left(4\sqrt[3]{x}-3x-5\right)^5$$

$$y=\frac{x^4+\ln x}{\sqrt{4x^2+7}}$$

$$y=e^{5x}\cdot(6x^4+7x^2-3)$$

$$y=\ln 7^x-5x+1$$

$$y=1/\sqrt[5]{\ln 2x-x^7}$$

21.

$$y=\left(x^4-\frac{12}{\sqrt{x}}+3\right)^4$$

$$y=\frac{5^x+2x}{1-9x^2}$$

$$y=3^{2x}\cdot\ln(2x-\frac{9}{x}-1)$$

$$y=ln^6(5x^3+2x-\sqrt{x})$$

$$y=\sqrt[8]{\left(4x^3\right)-x^2}$$

22.

$$y=\left(12-\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)^3$$

$$y=\frac{\sqrt{3-5x^4}}{e^x-4x}$$

$$y=2^x\cdot(2x+\sqrt{x-2})$$

$$y=\ln^4(7x-\ln x)$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[8]{2x^5-x^6+5}}$$

23.

$$y=\left(5x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)^3$$

$$y=\frac{3^x-6x^2}{\sqrt{5x+1}}$$

$$y=e^{x^2}\cdot(2x^3+\sqrt{x}-2)$$

$$y=ln(2x+4x^3-8)^2$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[7]{\ln x^5-3x^3}}$$

24.

$$y=\left(x^2-3x+2\sqrt[6]{x^5}\right)^2$$

$$y=\frac{10x^2+7x-1}{x^4+e^x}$$

$$y=e^{6x}\ln(6x^5-\sqrt{x}+2)$$

$$y=\ln\sqrt[3]{3-x^2}$$

$$y=\frac{5}{\sqrt{5x^2-7x+3}}$$

25.

$$y=\left(3x^6-\frac{6}{\sqrt{x^3}}+1\right)^8$$

$$y=\sqrt[5]{x^3-6x^2}$$

$$y=(6x^3+5x^2-2)\cdot e^{9x}$$

$$y=\ln(\ln 3x^3-2x^2+x)$$

$$y=\frac{4x+7^x}{\sqrt{9x^2-1}}$$

26.

$$y=\left(9-3\sqrt{x}+\frac{4}{x}\right)^6$$

$$y=\frac{6}{\sqrt[6]{2x^5-3x^3}}$$

$$y=\frac{x^3-e^x}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$y=4^x\cdot\ln(2x-\sqrt{5x}+3)$$

$$y=\ln^7(5x^3+4x^2-1)$$

Приклади розв’язання задач

Основні правила диференціювання.

1. $(C)'=0, c-const$
2. $(C\cdot u)'=C\cdot u'$
3. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$
4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
6. $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{c}{v^2}\cdot v'$

Таблиця похідних основних функцій

1.$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

2.$(\sqrt{n})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

3.$(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$

4.$(a^n)' = a^n \cdot \ln a \cdot u'$

5.$(e^n)' = e^n \cdot n'$

6.$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

7.$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

8.$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

9.$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

10.$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

11.$(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

12.$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

13.$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

14.$(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

15.$(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

9.$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

10.$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

11.$(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

12.$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

13.$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

14.$(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

15.$(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приклад 1. Знайти похідну функції: 1) $y = x^5$, 2) $y = \sqrt{x}$, 3) $y = \sqrt[4]{x^3}$.

Розв'язок. Використовуємо формулу (1) таблиці, те що $(x)' = 1$.

В цьому прикладі показник степеня $n = 5$, тому $y' = 5x^4$.

Тут $n = \dfrac{1}{2}$, тому $y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

При рішенні цього прикладу можна було використати формулу (2).

Тут $n = \dfrac{3}{4}$, тому $y' = (\sqrt[4]{x^3})' = (x^{\frac{3}{4}})' = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$.

Приклад 2. Знайти похідну функцій 1) $y=5x^3$, 2) $y=-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язок. Враховуємо правило знаходження похідної 4 та формулу (1).

1) Тут $n=3$: $y'=(5x^3)'=5(x^3)'=5\cdot 3x^2=15x^2$;

2) Тут $n=-2/3$: $y'=\left(-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=-4\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-4\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1}=\dfrac{8}{3}x^{\frac{-5}{3}}=\dfrac{8}{3\sqrt[3]{x^5}}$,

В прикладі 2) можна було використати правло знаходження похідної 7.

Приклад 3. Знайти похідну функції $\qquad y=27x^3-\dfrac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}-11.$

Розв'язок. Надана функція є алгебраїчна сума декількох функцій, тому використаємо правило диференціювання суми та різниці функцій; насамперед переходячи до дробових показників степенів:

$$y'=\left(27x^3-\frac{81}{2}x^{\frac{8}{3}}+6x^{-\frac{1}{3}}-11\right)'=27(x^3)'-\frac{81}{2}\left(x^{\frac{8}{2}}\right)'+6\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'-(11)'=27\cdot 3x^{3-1}-\frac{81}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot x^{\frac{8}{3}-1}+$$

$$+6\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}-0=81x^2-108\cdot x^{\frac{5}{3}}-2x^{-\frac{4}{3}}=81x^2-108x\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y=(5x^2+7x+2)^3$.

Розв'язок. Тут ми маємо справу зі складною функцією. Нехай $u=5x^2+7x+2$,

Тоді $y'=3u^2\cdot u'=3(5x^2+7x+2)^2\cdot(5x^2+7x+2)'=3(5x^2+7x+2)^2(10x+7)$.

Але можна і не використовувати проміжні записи, тобто введення змінної u.

Приклад 5. Знайти похідну $y=\left(1+2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}\right)^4$.

Розв'язок.

$$y'=\left(\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^4\right)'=4\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^3\cdot\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)'=4\left(1+2\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^3\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=$$

$$=4\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}\right).$$

Приклад 6. Знайти 1) $y=\sqrt{x^2+2}$; $\quad$ 2) $y=\dfrac{2}{(3x^2-5)^5}$.

Розв'язок.

1) $y' = (\sqrt{x^2+2})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot (x^2+2)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$

Використали правило диференціювання складної функції.

2) $y' = \left(\frac{2}{(3x-5)^3}\right)' = -\frac{2}{(3x^2-5)^6} \cdot \left((3x^2-5)^3\right)' = -\frac{2}{(3x^2-5)^6} \cdot 3(3x^2-5)^2 \cdot (3x^2-5)' =$

$= -\frac{6}{(3x-5)^4} \cdot 6x = -\frac{36x}{(3x^2-5)^4}.$

Приклад 7. Знайти похідну $y = \frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}.$

Розв'язок.

Тут слід використати правило (5) диференціювання дробу.

$$y' = \frac{(5+3x+x^2)'(5-3x+x^2)-(5+3x+x^2)(5-3x+x^2)'}{(5-3x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(3+2x)(5-3x+x^2)-(5+3x+x^2)(-3+2x)}{(5-3x+x^2)^2},$$

а після спрощень $y' = \frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$

Приклад 8. Знайти похідну 1) $y = 3\sin^2 x$, 2) $y = \sqrt{tgx}$, 3) $y = \frac{1}{\cos^3 x}.$

Розв'язок.

1) Запишемо приклад у вигляді $y = 3U^2$ при $U = \sin x$, і тоді $y' = 6U \cdot U' = 6\sin x \cdot (\sin x)' = 6\sin x \cdot \cos x = 3\sin 2x.$

Тепер покажемо, як розв'язати задачу, не вводячи U. Насамперед продиференцюємо степінь, а так як у степінь підноситься $\sin x$, то продиференцюємо і $\sin x$. Знайдені похідні перемножуємо, постійний множник 3 винесемо за знак похідної.

Розв'язок.

$y' = 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 3\sin 2x.$

2) $y' = (\sqrt{tgx})' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot (tgx)' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$

3) $y' = \left(\dfrac{1}{\cos^3 x}\right)' = -\dfrac{1}{(\cos^3 x)^2}\cdot(\cos^3 x)' = -\dfrac{1}{\cos^6 x}\cdot 3\cos^2 x(-\sin x) = \dfrac{3\sin x}{\cos^4 x}.$

Приклад 9. Знайти похідну від функції:

1. $y = 2\sqrt[4]{x} - 3\sin\dfrac{x}{3}.$ Використовуємо формулу $(u-v)' = u' - v'$

$$y' = (2\sqrt[4]{x})' - \left(3\sin\frac{x}{3}\right)' = 2(x^{1/4})' - 3\left(\sin\frac{x}{3}\right)' = 2\cdot\frac{1}{4}x^{-3/4} - 3\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x^3}} - \cos\frac{x}{3}.$$

2. $y = \ln^3 x\cdot tg2x.$ Маємо добуток двох функцій, тому застосовуємо формулу $(uv)' = u'v + uv'.$

$$y' = (\ln^3 x)'\cdot tg2x + \ln^3 x(tg2x)' = 3\ln^2 x\cdot(\ln x)'\cdot tg2x + \ln^3 x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' =$$

$$= 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\cdot tg2x + \frac{\ln^3 x}{\cos^2 2x}\cdot 2 = \frac{\ln^2 x}{x\cos^2 2x}(3tg2x\cos^2 2x + 2x\ln x) =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{x\cos^2 2x}(1{,}5\sin 4x + 2x\ln x).$$

5.1. Завдання для самостійної роботи

1. Для даної функції треба:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;

3) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;

4) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину,

1. $y = x^2(x-2)^2$	16 $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 5$
2. $y = \dfrac{27(x^3 - x^2)}{4} - 4$	17 $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 20$
3. $y = -\dfrac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}$	18. $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$
4. $y = (x-1)^2(x-3)^2$	19. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$

5 $y=\frac{1}{4}\left(x^3+3x^2\right)-5$

6 $y=6x-8x^3$

7 $y=16x^2\left(x-1\right)^2$

8. $y=-\frac{(x-2)^2(x-6)^2}{16}$

9. $y=2x^3+3x^2-5$

10. $y=2-12x^2-8x^3$

11. $y=\left(2x-1\right)^2\left(2x+1\right)^2$

12. $y=2x^3+9x^2+12x$

13. $y=12x^2-8x^3-2$

14. $y=\left(2x-1\right)^2\left(2x-3\right)^2$

15. $y=16x^3+12x^2-5$

20. $y=-x^3+3x^2+9x-1$

21. $y=3\sqrt[3]{x^2}-x$

22. $y=2x^3-3x^2-12x+8$

23. $y=\frac{1}{8}\left(16-6x^2-x^3\right)$

24. $y=16x^3-12x^2-4$

25. $y=16x^3-36x^2+24x-9$

26. $y=x^3-6x^2+9x+1$

27. $y=\frac{1}{8}\left(6x^2-x^3-16\right)$

28. $y=\frac{1}{8}\left(11-9x-5x^2-x^3\right)$

29. $y=\frac{1}{16}x^2\left(x-4\right)^2$

30. $y=\frac{1}{8}x\left(12-x^2\right)$

Приклади розв’язання задач

4.2. Завдання для для самоперевірки

4.2.1. Теоретичні питання.

1. Правила та формули диференціювання.
2. Похідна показникової функції
3. Похідна степеневої функції
4. Похідна степенево-показникової функції
5. Умови монотонності функції. Екстремуми функції,
6. Необхідна та достатня умови існування екстремуму.
7. Дослідження опуклості, вгнутості функції. точки перегину.

4.2.2. Тестові завдання.

1. Функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$

а) спадає на проміжку $(-2;1)$;

б) спадає на проміжках $(-\infty;-2) \cup (1;3)$;

в) зростає на проміжках $(-2;1) \cup (3;+\infty)$;

г) усюди зростає.

2. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = (x-1)^4$:

а) $x=1$ – точка min, б) $x=1$ – точка max, в) $x=4$ – точка max, г) $x=4$– точкаmin

3. Знайти інтервали опуклості функції, якщо $y = 30x^3 - x^5$:

а) $(-\infty;-3) \cup (0;3)$,б) $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$,в) $(-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$,г) $(-3;0) \cup (3;+\infty)$.

4. Знайти інтервали зростання функції $y = x + \dfrac{4}{x+2}$.

а) $(-\infty;-4) \cup (-2+\infty)$,б) $(-4;-2) \cup (2;+\infty)$,в) $(-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$,г) $(-\infty;-4) \cup (2;+\infty)$

5. Точками перегину графіка функції $y = x\ln^2 x$ є

а) $M(e^{-1};\, e^{-1})$; б) $M(e;e)$; в) $M(e^{-1};0)$; г) $M(-1;0)$.

6. Точками перегину графіка функції $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 10x - 4$ є

а) не існує; б) $M(-1;0)$; в) $M_1(2;-4);\ M_2(1;1)$; г) $M(2;2)$.

7. Знайти інтервали спадання функції $y = x^5 - 5x$.

а) $(-\infty;+\infty)$,б) $(-1;1)$,в) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$,г) 5. Точка екстремуму – це

а) точка максимуму,

б) точка мінімуму,

в) або точка максимуму, або точка мінімуму,

г) точка, в який похідна цієї функції дорівнює нулю.

8. Якщо $f'(a) = 0$, то

а) $f(a)=0$, б) $f(a)\neq 0$,

в) функція $f(x)$ обов'язково має екстремум в точці a,

г) функція $f(x)$ може мати екстремум в точці a.

9. Яке з тверджень є вірним

а) між двома максимумами функції обов'язково лежить мінімум,

б) між двома максимумами функції обов'язково лежить максимум,

в) між двома максимумами функції обов'язково лежить нуль функції,

г) між двома максимумами функції обов'язково лежить ось координат.

10. Похідна використовується

а) для знаходження екстремумів функції,

б) для знаходження дискримінанту,

в) для визначення періоду функції,

г) для доведення формул зведення.

Розділ 5 Інтеграл

Мета: сформувати поняття невизначеного інтегралу, первісної, навички інтегрування за таблицею; вміння застосування основних методів інтегрування.

Після вивчення теми 5 «Інтеграл» студент повинен:

а) *знати*:означення невизначеного інтегралу; методи та формули інтегрування.

б) *вміти*: застосовувати методи інтегрування.

Джерела навчальної інформації:

- Конспект лекцій
- Список рекомендованої літератури. [1, с.32...336; 365…380; 406…408]

5.1. Завдання для самостійної роботи.

Варіант 1

1. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx.$

2. $\int \sqrt{3+xdx}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

4. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x-3}$.

5. $\int e^{2x-7}dx.$

6. $\int \sin(2-3x)dx$.

Варіант 3

1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \sqrt[3]{1+x}dx$.

3. $\int \frac{dx}{3x+9}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x+3}}$.

5. $\int e^{3+5x}dx.$

6. $\int \cos(3+2x)dx$.

Варіант 5

1. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx.$

3. $\int \frac{dx}{9x+3}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x-3}}$.

5. $\int e^{2-3x}dx.$

6. $\int \sin(3-2x)dx$.

Варіант 7

1. $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int \frac{dx}{1-4x}$.

3. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x-3}}$.

4. $\int \frac{dx}{5x+2}$.

5. $\int e^{2x+1}dx.$

6. $\int \cos(2+3x)dx$

Варіант 2

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx.$

2. $\int \frac{dx}{2+3x}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x}}$.

4. $\int \frac{dx}{2x+3}$.

5. $\int e^{7x-2}dx.$

6. $\int \sin(5-3x)dx$

Варіант 4

1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \frac{dx}{2-5x}$.

3. $\int \frac{dx}{7x-4}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+1}}$.

6. $\int \cos(5-2x)dx$.

Варіант 6

1. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3 \right) dx$

2. $\int \frac{dx}{3x-2}$.

3. $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x-4}}$.

4. $\int \frac{dx}{2x+9}$.

5. $\int e^{5x+7} dx.$

6. $\int \sin(4-2x)dx$.

Варіант 8

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx.$

2. $\int \frac{dx}{2x+3}$.

3. $\int \frac{dx}{5x+3}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2x}}$.

5. $\int e^{7-2x} dx.$

6. $\int \cos(7x+3)dx$.

Варіант 9

1. $\int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx.$

2. $\int \frac{dx}{3x-4}$.

3. $\int \frac{dx}{8x+3}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-2}}$.

5. $\int e^{3-4x} dx.$

6. $\int \sin(8x-3)dx$.

Варіант 11

1 $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx.$

2 $\int \frac{dx}{4-3x}$.

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$.

4 $\int \frac{dx}{5x-4}$.

5 $\int e^{10x+2} dx.$

6 $\int \cos(2+5x)dx$.

Варіант 13

1 $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2 + 3}{x} dx.$

2 $\int \frac{dx}{3x+4}$.

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$.

4 $\int \frac{dx}{3x^2-7}$.

5 $\int e^{2x-10}dx.$

6 $\int \sin(3+4x)dx$

Варіант 15

1 $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx.$

2 $\int\frac{dx}{4x-2}.$

3 $\int\frac{dx}{\sqrt{4-7x}}.$

4 $\int\frac{dx}{3x+7}.$

5 $\int e^{4x+3}dx.$

6 $\int\cos(4x+3)dx$

Варіант 10

1 $\int\left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx.$

2 $\int\frac{dx}{5-3x}.$

3 $\int\frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

4 $\int\frac{dx}{6x^2-7}.$

5 $\int e^{4x+5}dx.$

6 $\int\sin(3-4x)dx$

Варіант 12

1 $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx.$

2 $\int\frac{dx}{4-7x}.$

3 $\int\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x}}.$

4 $\int\frac{dx}{7x+6}.$

5 $\int e^{6x-1}dx.$

6 $\int\cos(3x+5)dx$

Варіант 14

1 $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$

2 $\int\frac{dx}{5x-3}.$

3 $\int\frac{dx}{\sqrt{7-3x}}.$

4 $\int\frac{\sqrt{14}dx}{2x-7}.$

5 $\int e^{5-2x}dx.$

6 $\int\sin(5x-3)dx$

Варіант 16

1 $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$

2 $\int\frac{dx}{3-2x}.$

3 $\int\frac{6dx}{2x+7}.$

4 $\int\frac{9dx}{\sqrt{3x+1}}.$

5 $\int e^{3-5x}dx.$

6 $\int\cos(5-3x)dx$

Варіант 17

1 $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x}dx.$

2 $\int \frac{dx}{5+3x}.$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}.$

4 $\int \frac{dx}{3x^2+2}.$

5 $\int e^{1-4x}dx.$

6 $\int \sin(3x+6)dx$

Варіант 19

1 $\int \frac{3x^2-\sqrt{x^3}+7}{x^3}dx.$

2 $\int \frac{dx}{3-5x}.$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$

4 $\int \frac{dx}{6x^2+1}.$

5 $\int e^{2-5x}dx.$

6 $\int \cos(5x-8)dx$

Варіант 21

1 $\int \left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx.$

2 $\int \frac{dx}{5+4x}.$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}.$

4 $\int \frac{dx}{3x^2-2}.$

6 $\int \sin(7x+1)dx$

Варіант 23

1 $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$

2 $\int \frac{dx}{6-3x}.$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

4 $\int \frac{dx}{4x^2+3}.$

5 $\int e^{8x+1}dx.$

6 $\int \cos(3x-7)dx$

Вариант 18

1 $\int \left(5\sqrt{x}-\frac{4}{x^5}+2\right)dx$

2 $\int \frac{dx}{6+5x}$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$

4 $\int \frac{dx}{3x^2-5}$

5 $\int e^{2-6x}dx$

6 $\int \sin(7-4x)dx$

Вариант 20

1 $\int \left(\frac{3\sqrt{x^2}}{x}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx$

2 $\int \frac{dx}{1-7x}$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

4 $\int \frac{dx}{2x^2+7}$

5 $\int e^{4-3x}dx$

6 $\int \cos(5x-6)dx$

Вариант 22

1 $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+5}{x^2}dx$

2 $\int \frac{dx}{1+6x}$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}$

4 $\int e^{2-4x}dx$

5 $\int \sin(9x-1)dx$

Вариант 24

1 $\int \left(\frac{5x^3}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$

2 $\int \frac{dx}{2+7x}$

3 $\int \frac{dx}{4x^2-3}$

4 $\int \frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$

5 $\int e^{3-6x}dx$

6 $\int \sin(8x-5)dx$

Вариант 25

1 $\int \frac{3x^4-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2}dx$

2 $\int \frac{dx}{7-3x}$

3 $\int \frac{8dx}{\sqrt{3x+8}}$

4 $\int \frac{10dx}{8x-9}$

5 $\int e^{4-5x}dx$

6 $\int \cos(7x+3)dx$

Вариант 26

1 $\int \frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx$

2 $\int \frac{dx}{7x-3}$

3 $\int \frac{11dx}{\sqrt{8x-9}}$

4 $\int \frac{dx}{4x^2+7}$

5 $\int e^{5-x}dx$

6 $\int \sin(9x+7)dx$

Вариант 27

1 $\int \frac{4\sqrt{x}-6x^2+1}{7x^3}dx$

2 $\int \frac{dx}{5-2x}$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$

4 $\int \frac{2dx}{4+3x}$

5 $\int e^{7+3x}dx$

6 $\int \cos(3x-7)dx$

Вариант 28

11 $\int\left(\frac{5x^3}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$

2 $\int\frac{dx}{2+7x}$

Вариант 29

1 $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}+2\right)dx$

2 $\int\frac{dx}{6x+1}$

3 $\int\frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

4 $\int\frac{dx}{3x^2+4}$

5 $\int e^{4-7x}dx$

Варіант 30

3 $\int\frac{dx}{4x^2-3}$

4 $\int\frac{dx}{\sqrt{8-3x^2}}$

5 $\int e^{3-6x}dx$

6 $\int \sin(8x-5)dx$

1 $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx.$

2 $\int\frac{dx}{4-3x}.$

3 $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x}}.$

4 $\int\frac{dx}{5x-4}.$

5 $\int e^{10x+2}dx.$

6 $\int \cos(2+5x)dx\cdot$

Приклади розв’язання задач

1) $\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+c;$ 2) $\int(3x+1)^4dx=\left\{\begin{matrix}v=3x+1\\ dv=3dx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{3}\int v^4dv=\frac{1}{3}\cdot\frac{v^5}{5}+c=\frac{1}{15}(3x+1)^5+c.$

3) $\int\frac{dx}{x+2}=ln|x+2|+c$.; 4) $\int sin\,5x dx=\left\{\begin{matrix}v=5x\\ dv=5dx\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{5}cos\,5x+c$.

5) $\int tq\frac{1}{7}xdx=\left\{v=\frac{1}{7}x \quad dv=\frac{1}{7}dx\right\}=7\int tqvdv=-7\,ln(cos\,v)+c=-7\,ln\left(cos\frac{1}{7}x\right)+c$.

6) $\int 3^x dx=\frac{3^x}{ln\,3}+c.$ 7) $\int\frac{dx}{4+x^2}=\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\left\{\begin{matrix}a=2\\ v=x\\ dv=dx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}arctq\frac{x}{2}+c.$

8) $\int \frac{dx}{sin^2(3x-1)} = -\frac{1}{3}ctq(3x-1).$; 9) $\int tq4xdx = -\frac{1}{4}ln|cos 4x| + c$.

10) $\int \frac{dx}{sin 3x} = \frac{1}{3}ln\left|tq\frac{3x}{2}\right| + c.$; 11) $\int \frac{dx}{4+7x^2} = \int \frac{dx}{2^2 + \left(\sqrt{7}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2}arctq\frac{\sqrt{7}x}{2} + c$.

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}arcsin\frac{\sqrt{5}x}{3} + c;$

13) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctq^2 x} = \int arctq^{-2}x\frac{dx}{x^2+1} = \left\{\begin{array}{l} v = arctqx \\ dv = \frac{dx}{x^2+1} \end{array}\right\} = \int v^{-2}dv = \frac{v^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{arctqx} + c.$

14) $\int \frac{e^x dx}{1-5e^{2x}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{5}e^x = v \\ dv = \sqrt{5}e^x dx \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}e^x dx}{1-\left(\sqrt{5}e^x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{1+\sqrt{5}e^x}{1-\sqrt{5}e^x}\right| + c$

15) $\int 2^{3x}dx = \left\{\begin{array}{l} v = 3x \\ dv = 3dx \end{array}\right\} = \frac{1}{3}\int a^v dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^v}{ln\,a} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x}}{ln\,2} + c.$

16) $\int 5^{ln\,x}\frac{dx}{x} = \left\{\begin{array}{l} v = ln\,x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{array}\right\} = \frac{5^{ln\,x}}{ln\,5} + c.$; 17) $\int \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{array}{l} v = \sqrt{x} \\ dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} = 2\int \frac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = 2\,sin\sqrt{x} + c.$

18) $\int e^{-3x}dx = \left\{\begin{array}{l} v = -3x \\ dv = -3dx \end{array}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c.$

19) $\int \frac{sin\,xdx}{\sqrt{cos\,x}} = \left\{\begin{array}{l} v = cos\,x \\ dv = -sin\,xdx \end{array}\right\} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -2\sqrt{v} + c = -2\sqrt{cos\,x} + c$.

20) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}} = \left\{\begin{array}{l} v = ln\,x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{array}\right\} = \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\sqrt{v} + c = 2\sqrt{ln\,x} + c.$

21) $\int \frac{dx}{5x+1} = \left\{\begin{array}{l} v = 5x+1 \\ dv = 5dx \end{array}\right\} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{5}ln|v| + c = \frac{1}{5}ln|5x+1| + c.$

12) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx = \left\{\begin{array}{l} v = x^3 + x \\ dv = \left(3x^2+1\right)dx \end{array}\right\} = \int \frac{dv}{v} = ln|v| + c = ln\left|x^3+x\right| + c.$

5.2. Завдання для самостійної роботи.

5.2.1 Обчислити об’єми тіл, утворених обертанням фігур, обмежених графіками функцій, навколо відповідної осі

1. $y=-x^2+5x-6, y=0$
2. $y=2x-x^2, 2x^2-4x+y=0$
3. $y=3\sin x, y=\sin x, 0\le x\le \pi$
4. $y=5\cos x, y=\cos x, x=0, x\ge 0$
5. $y=sin^2 x, x=\frac{\pi}{2}, y=0$
6. $y=4-x^2$ òà $y=0;$ OX
7. $y=3x^2$ та $y=3;$ OY
8. $y=3-x^2$ та $y=-1;$ OY
9. $y=2x-x^2, y=-x+2, x=0$
10. $y=5-x^2$ та $y=0;$ OX
11. $y=x^2, y^2-x=0$
12. $y=x^2$-$3x$ òà $y=0;$ OX
13. $y=x^2$ - 4 òà $y=3;$ OY
14. $y=x^3, y=\sqrt{x}$
15. $y=x^2, y=1, x=2$
16. $y=sin(\frac{\pi x}{2}), y=x^2$
17. $y=2x^2$ òà $y=2;$ OY
18. $y=x^3, y=x$
19. $y=x^2-2x+1, x=2, y=0$ осі Ox
20. $y=x^2+1, y=x, x=1,$ $x=0$
21. $y=x^2, x=2, y=0$
22. $y=\ln x, x=2, y=0$
23. $y^2=x-2, y=x^3, y=0, y=1$
24. $y=x^2-2x+1, x=2, y=0$
25. $y=(x-1)^2, x=0, x=2, y=0$
26. $y=\sqrt{x-1}, y=0, y=1, x=0.5$
27. $y=(x-1)^2, y=1$
28. $y=4-3x^2$ òà $y=1;$ OY
29. $2x+3y-6=0$, $x=0$, $y=0$; Ox
30. $y=6-2x$, $x=0$, $y=0$; Oy

Приклади розв’язання задач

Якщо площа $S(x)$ – переріз тіла площиною, перпендикулярною до вісі OX є неперервна функція на [a; b], то об’єм тіла по відомим площинам поперечних перерізів обчислюється за формулою: $V=\int_a^b S(x)dx$

У випадку тіла обернення $S(x)$ є площа кола, тому при оберненні криволінійної трапеції навколо вісі OX або $OУ$ об’єм обчислюється за формулами:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad \text{або} \qquad V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$, обертається навколо вісі OX, то об’єм тіла обернення:

$$V_x = \pi \int_a^b [\, f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx$$

Приклад.

Обчислити об'єми тіл обертання фігури, яка обмежена лініями $4y=x^2$ та $y=x$, навколо осей OX та OY.

Обчислимо об'єми тіл, які утворюються при обертанні фігури навколо координатних осей. Зробимо малюнок фігури, що обертається. Знайдемо точки перетину прямої лінії $y=x$ і параболи $4y=x^2$.

$$\begin{cases} 4y = x^2, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = x^2, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4) = 0, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 4, \\ y_1 = 4,\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Одержали дві точки з координатами $O(0;0)$ та $B(4;4)$. На проміжку $(0;4)$ малюємо відрізок прямої $y=x$ та фрагмент параболи $4y=x^2$. На Рис.8 і рис.9 схематично подано фігуру, що обертається, та тіла обертання, які утворюються при її обертання навколо осі $OУ$ та OX.

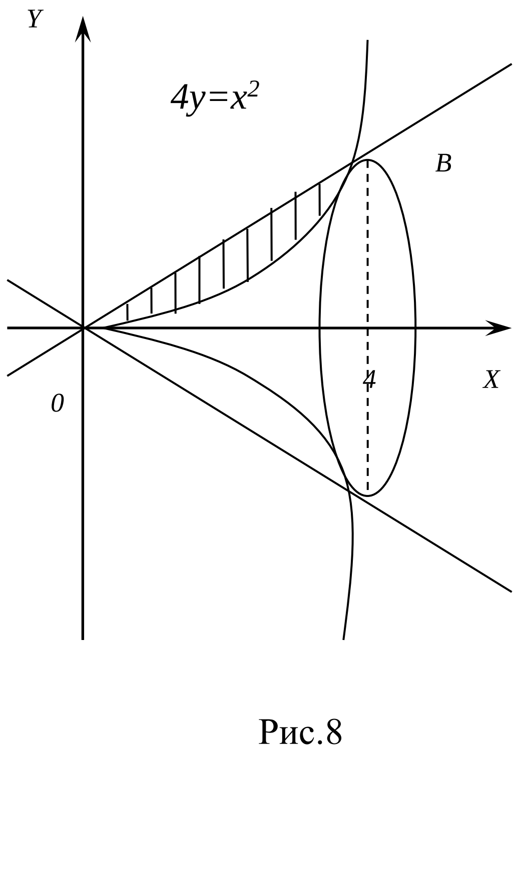

Рис.8

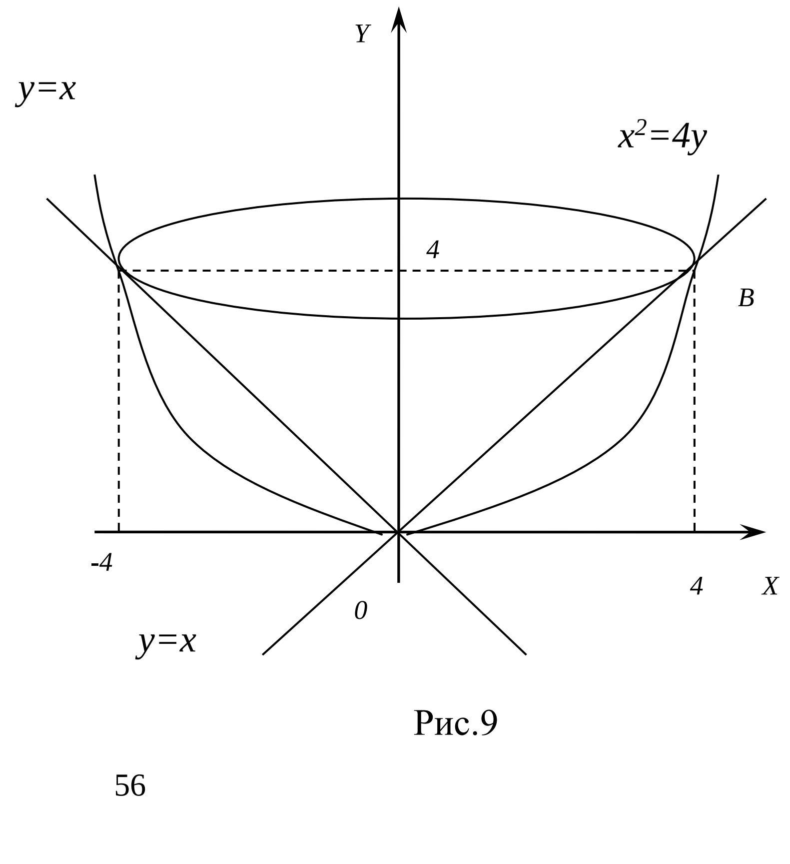

Рис.9

Об'єм тіла обертання, отриманого обертанням заданої фігури навколо осі *OX*, дорівнює різниці об'ємів двох тіл кожен з яких обчислимо за формулою

$$V = \pi\int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx$$
.

1) Одержимо

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^4 x^2 dx - \pi\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}\right) dx = \pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4 dx = \frac{\pi}{3}x^3\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{4^5}{5}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot 64 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{4^5}{5} = \frac{64\pi}{3} - \frac{64\pi(5-3)}{15} = \frac{64\pi\cdot 2}{15} - \frac{128}{15}\pi \text{ (êóá. îä)}$$

2) Аналогічно обчислимо об'єм тіла обертання, отриманого обертанням заданої фігури навколо осі *OY*. При цьому використовуємо формулу:

$$V = \pi\int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^4 y^2 dy + \pi\int_0^4 4y dy = \pi\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^4 + 4\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4 = 2\pi y^2\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{3}y^3\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2\pi\cdot 16 - \frac{\pi}{3}\cdot 16 = \frac{6\pi\cdot 16 - 16\pi}{3} = \frac{16\pi(6-1)}{3} = \frac{16\pi\cdot 5}{3} = \frac{80}{3}\pi \text{ (куб. од)}$$

Приклад .

Знайти об’єм тіла, утвореного оберненням навколо вісі *OX* фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^3}{4}$.

Розв'язання.

Для знаходження точок перетину кривих, розв’язуємо рівняння: $\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{4}$

отримаємо $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

За формулою (12) маємо:

$$V_x = \pi\int_0^2 [(\frac{x^2}{2})^2 - (\frac{x^3}{4})^2]dx = \pi\int_0^2 [\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{16}]dx = \pi\int_0^2 \frac{x^4}{4}dx - \pi\int_0^2 \frac{x^6}{16}dx = (\frac{\pi x^5}{20} - \frac{\pi x^7}{16\cdot 7})\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi(\frac{8}{5} - \frac{8}{7}) = \frac{16\pi}{35}.$$

5.3. Завдання для для самоперевірки

5.3.1. Теоретичні питання

1. Властивості невизначеного інтеграла.
2. Метод інтегрування за таблицею.
3. Метод компенсуючого множника і метод розкладання.
4. Інтегрування методом заміни змінної.
5. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. Означення визначеного інтегралу і його геометричний зміст.
6. Основні властивості визначених інтегралів.
7. Обчислення об’ємів тілобертання за допомогою визначеного інтегралу.

5.3.2. Тестові завдання

1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на $[a,b]$, якщо

а) для $\forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f(x)$;

б) для $\forall x \in [a,b] \quad F'(x) \neq f(x)$;

в) для $\forall x \in [a,b] \quad f'(x) = F(x)$;

г) для $\forall x \in [a,b] \quad F'(x) > f(x)$.

2. Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ називається

а) похідна від підінтегральної функції $f(x)$: $\int f(x)dx = f'(x)$.

б) сукупність усіх первісних для підінтегральної функції $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних, C – довільна стала.

в) сукупність усіх функцій, що визначаються виразом $\int f(x)dx = f(x) + C$, де C – довільна стала.

г) диференціал первісної $F(x)$: $\int f(x)dx = dF(x)$.

3.. Інтеграл $\int[\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)]dx$, де $\forall\alpha, \beta$ – сталі, дорівнює

а) $\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$;

б) $\alpha\int f(x)dx-\beta\int g(x)dx$;

в) $\beta\int f(x)dx+\alpha\int g(x)dx$;

г) $\beta\int g(x)dx-\alpha\int f(x)dx$.

4. Невизначений інтеграл $\int f(ax+b)dx$ дорівнює

а) $\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, C – довільна стала.
б) $F(ax+b)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, C – довільна стала.
в) $\frac{1}{b}F(ax+b)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, C – довільна стала.
г) $aF(ax+b)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, C – довільна стала.

5. Невизначений інтеграл $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ дорівнює

а) $-\frac{1}{f^2(x)}+C$.
б) $-\frac{1}{f(x)}+C$.
в) $\ln|f(x)|+C$.
г) $\lg|f(x)|+C$.

6. Операція інтегрування зворотна до операції:

а) розкладання функції в ряд;

б) диференціювання;

в) знаходження границі функції;

г) обчислення визначників.

7. Метод розкладання підінтегральної функції на суму функцій заснований на:

а) властивості похідної;

б) властивості матриці;

в) властивості невизначеного інтегралу;

г) властивості границь.

8. Інтеграл $\int\left(x+\frac{4}{x}-1\right)dx$ розкладається на :

а) 3 інтеграла;

б) 2 інтеграла;

в) 4 інтеграла;

г) не розкладається.

9. Інтеграл $\int\frac{3x^4-6x+5}{x}dx$ розкладається на:

а) 3 інтеграла;

б) 2 інтеграла;

в) 4 інтеграла;

г) не розкладається.

10. У виразі $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ число $\frac{1}{a}$ називається:

а) диференційним множником;

б) компенсуючим множником;

в) додатковим множником;

г) первісним множником.

Розділ 6. Диференціальні рівняння

Мета: сформувати вміння визначення однорідних функцій та розв'язання однорідних диференціальних рівнянь.

Після вивчення теми 6 «Диференціальні рівняння» студент повинен:

а) *знати*: основні поняття теорії диференціальних рівнянь, означення однорідної функції та підстановки для розв'язання однорідних диференціальних рівнянь.

б) *вміти*: застосовувати методи інтегрування однорідних диференціальних рівнянь

Джерела знань:

- Конспект лекцій
- Список літератури: [1, с. 421…430]

Приклади розв'язання задач

$xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x}$ y(3)=0

$x(u + x\frac{du}{dx}) - ux = x\cos^2 u \quad xu + x^2\frac{du}{dx} - xu = x\cos^2 u$

$x\frac{du}{dx} = \cos^2 u \quad \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{d}{x} \quad tgu = \ln x + \ln c \quad tg\frac{u}{x} = \ln(cx)$

$e^{tg\frac{u}{x}} = c \quad e^{tg0} = 3c \quad c = \frac{1}{3} \quad x = 3e^2$

6.1. Завдання для самостійної роботи.

6.1.1. Розв'язати диференціальні рівняння**.**

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$
2. $xy' = \frac{3y^2 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$
3. $y' = \frac{x + y}{x - y}$
4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$
6. $xy' = 2\frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$
7. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$
8. $xy' = 2\sqrt{x^3 + y^2} + y$
9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$
10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$
11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 + 2xy}$
12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$
13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$
14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$
15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$
16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$
18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$
19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$
20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$
22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$
23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$
24. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$
26. $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$
27. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$
28. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$
29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$
30. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

6. Завдання для для самоперевірки

6.2.1. Теоретичні питання.

1. Диференціальні рівняння. Основні поняття та означення.
2. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача і теорема Коші.
3. Загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння 1 порядку.
4. Диференціальне рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними.
5. Поняття однорідної функції, однорідного рівняння.
6. Метод розв'язання однорідних диференціальних рівнянь.

6.2.2. Тестові завдання

1. Серед наведених рівнянь диференціальним рівнянням першого порядку є:

а) $y' = \dfrac{\sin x}{y}$;

б) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2(x+3)$;

в) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

г) $y'' - 5y''' = 4e^{3x}$.

2. Порядком диференціального рівняння називається:

а) Найвищий порядок похідної невідомої функції;
б) Кількість доданків рівняння;
в) Кількість змінних;
г) Інша відповідь.

3. Серед наведених завдань «задачею Коші» є:

а) $y' + 2y = y^2 e^x,\ y(0) = 1$;

б) $2xydy = \left(x^2 + y^2\right)dx$;

в) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

г) $\mathrm{y} = (x+2)^2 + 3$.

4. Яке з наведених рівнянь є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними:

а) $y' - \dfrac{1}{x} \cdot y = x\cos x$;

б) $y' = 2xy + 3x$;

в) $y = x^2(x-2)^2$;

г) $y' = \frac{y^2 + xy}{xy}$;

5. Диференціальним рівнянням називається рівняння, в яке невідома функція входить:

а) під знаком інтегралу;
б) під знаком похідної або диференціала;
в) під знаком логарифма;
г) в неявному виді

6. Яке з наведених рівнянь є однорідним диференціальним рівнянням 1 порядку:

а) $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x\cos x$;

б) $y' = 2xy + 3x$;

в) $y = x^2(x-2)^2$;

г) $y' = \frac{y^2 + xy}{xy}$;

Розділ 7. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

Мета: ознайомитися з поняттями суми та добутку подій, умовної ймовірності; застосувати теореми додавання та множення ймовірностей подій при розв’язання практичних задач; записати формули для обчислення числових характеристик випадкових величин.

Після вивчення теми 7 студент повинен:

знати: методику розвязання задач на суму та множення ймовірностей подій; знаходження числових характеристик випадкових величин.

вміти: застосовувати теореми додавання та множення ймовірностей подій; визначати математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Джерела знань:

- Конспект лекцій
- Список літератури. [2, с.42...49; 4, 68-80, 120…131]

7.1. Завдання для самостійної роботи

Обчисліть імовірність подій.

1. Комплект із *50* виробів містить *30 %* нестандартних, причому *40 %* нестандартних виробів є бракованими. Знайдіть імовірність того, що серед виробів, навмання взятих із комплекту, а) тільки *3* браковані; б) немає бракованих.

2. Вісім літаків, серед яких *2* літаки Ан-124, випадковим чином ставляться в чергу на технічне обслуговування. Знайдіть імовірність того, що між літаками Ан-124 у черзі опиняться три літаки інших типів.

3. Партія із *50* виробів містить *20%* браку. Із партії випадковим способом відбирають *6* виробів. Знайдіть імовірність того, що серед відібраних виробів: а) не буде бракованих; б) усі виявляться бракованими.

4. Дванадцять виробів, серед яких *4* нестандартні, випадковим способом розбито на дві рівні частини. Знайдіть імовірності того, що: а) в обох частинах буде однакова кількість нестандартних виробів; б) усі нестандартні вироби потраплять в одну частину.

5. До авіа каси звернулись *3* пасажири, кожний з яких рівно-можливо замовляє квиток на один із шести рейсів, що виконуються протягом доби до аеропорту *N*. Знайдіть імовірність того, що вони замовлять квитки на різні рейси.

6. У лабораторії є 6 приладів з номерами від *1* до *6*. Навмання по одному беруться всі прилади і послідовно включаються у схему. Знайдіть імовірність того, що у схемі номери розташуються у зростаючому порядку.

7.Десять однотипних виробів, що сходять з конвеєра, випадковим способом розподіляються по трьох контейнерах, у кожний з яких може потрапити будь-яка кількість цих виробів. Знайдіть імовірність того, що у перший контейнер потрапили *6* виробів, у другий – *3*, а в третій – *1* виріб.

8. Із комплекту, який містить *9* приладів, відбираються будь-які *3* для ввімкнення у схему і після використання повертаються знову в комплект. Яка ймовірність того, що після трьох таких відборів буде використано всі прилади?

9. Комплект містить *7* виробів першого сорту, *6* – другого сорту і *2* – третього сорту. Випадковим способом одночасно з комплекту відібрано *5* виробів. Знайдіть імовірності того, що серед відібраних виробів: а) не буде виробів першого сорту; б) будуть вироби тільки першого сорту.

10. У касі придбано *5* авіаквитків для п'яти пасажирів і навмання роздано їм. Знайдіть імовірності того, що: а) усі пасажири одержали свої квитки; б) тільки три пасажири одержали свої квитки.

11. Комплект містить *5* виробів першого сорту, *4* – другого і *3* вироби третього сорту. Знайдіть імовірність того, що два випадково взяті вироби будуть одного сорту.

12. Із п'ятнадцяти рейсів, які здійснює авіакомпанія протягом доби, *60%* виконуються власним літаковим парком. Знайдіть імовірність того, що з вибраних навмання п'яти рейсів рівно три виконуються власним парком.

13. Сім літаків, серед яких два В-737, прибули в аеропорт і були розміщені випадковим способом на десяти стоянках, розташованих в одному ряду. Знайдіть імовірність того, що між літаками В-737 опинились *4* літаки інших типів і не залишилось вільних стоянок.

14. Комплект містить *10* виробів, *5* із яких коштують по *4* грн. кожний, *3* – по *2* грн. і *2* – по *3* грн. Знайдіть імовірність того, що взяті навмання *2* вироби коштують разом *6* грн.

15. Шість пасажирів придбали квитки на літак в одному ряду крісел із шести місць і випадковим способом зайняли ці місця. Знайдіть імовірності того, що а) кожний пасажир зайняв своє місце; б) тільки *3* пасажири сіли на свої місця.

16. Партія з *30* виробів містить *10%* браку. Знайдіть імовірність того, що серед семи випадково взятих виробів: а) тільки *2* бракованих; б) немає бракованих.

17. Шість літаків, серед яких *2* В-747, після посадки в аеропорту було розміщено випадковим способом на шести стоянках, розташованих в одному ряду. Знайдіть імовірність того, що літаки В-747 опинились: а) на крайніх стоянках; б) на сусідніх стоянках.

18. Із десяти літаків, що прибувають в аеропорт протягом доби, *80%* мають повне комерційне навантаження. Знайдіть імовірності того, що серед п'яти навмання взятих літаків повне комерційне навантаження мають: а) тільки *4* літаки; б) принаймні *4* літаки.

19. Партія містить *6* виробів першого сорту, *4* – другого і *3* – третього сорту. Навмання із партії взято *5* виробів. Знайдіть імовірності того, що серед них: а) є лише *3* вироби першого сорту; б) немає виробів першого сорту.

20 До авіа каси звернулися *4* транзитні пасажири, кожний з яких рівно можливо замовляє квиток на один із 6 рейсів, що виконуються протягом доби до Одеси. Знайдіть імовірності того, що всі пасажири замовили квиток: а) на перший рейс; б) на один і той самий рейс.

21. Комплект містить *12* виробів, *5* із яких коштують по *3* грн. кожний, інші – по *1* грн. Знайдіть імовірності того, що взяті навмання *4* вироби коштують разом: а) *10* грн.; б) *8* грн.

22. В авіа касі було *15* квитків, серед яких *6* – до Львова. До кінця зміни було реалізовано *8* квитків. Знайдіть імовірність того, що в касі не залишилось квитків до Львова, якщо ймовірність продажу кожного квитка однакова.

23. Шість пасажирів придбали квитки на літак в одному шестимісному ряді крісел і випадковим чином зайняли ці місця. Знайдіть імовірності того, що: а) тільки *2* пасажири сіли на свої місця; б) жодний із пасажирів не потрапив на своє місце.

24. В авіа касі заброньовано *8* квитків до Одеси, *5* квитків – до Львова і *3* – до Харкова, проте тільки *10* квитків було викуплено. Знайдіть імовірність того, що викуплено 6 квитків до Одеси і *4* до Львова.

25. Комплект містить *5* виробів вартістю *1* грн. кожний, *3* вироби вартістю *2* грн. кожний і *2* вироби вартістю по *4* грн. кожний. Знайдіть імовірність того, що взяті навмання *3* вироби коштують разом *6* грн.

26. П'ять літаків, серед яких два В-747, що приземлилися в аеропорту, було випадковим чином розміщено на восьми стоянках, розташованих в одному ряду. Знайдіть імовірність того, що літаки В-747 опинились на крайніх стоянках.

27. Комплект із *40* виробів містить *30 %* нестандартних виробів, серед яких *50 %* - браковані. Знайдіть імовірність того, що серед узятих випадковим чином чотирьох виробів: а) тільки *1* бракований; б) усі браковані.

28. Технічне обслуговування кожного із літаків, що прибувають в аеропорт, виконуються окремою бригадою. Усього працює *3* бригади, які випадковим способом призначаються на обслуговування п'яти літаків, що прибули в аеропорт. Знайдіть імовірність того, що будуть обслуговані *3* літаки, які прибули першими.

29. Знайдіть імовірність того, що взяте навмання ціле шестицифрове число складається: а) з однієї і тієї самої цифри; б) із різних цифр; в) із трьох різних пар цифр.

30. Комплект містить *5* виробів першого сорту, *3* вироби другого сорту і *2* браковані вироби. Знайдіть імовірності того, що серед шести навмання взятих виробів буде *4* вироби першого сорту і *2* – другого сорту.

Приклади розв'язання задач

Класична формула (1.1) обчислення ймовірності події незастосовна, якщо простір Ω елементарних наслідків випробування є нескінчена множина. У цьому випадку застосовують геометричний підхід до знаходження ймовірностей, при якому проведення випробування інтерпретується як випадкове кидання точки в область Ω й вимірного простору, а подія A – як потрапляння цієї точки в підобласть A області Ω. Множина всіх наслідків випробування виражається відповідною мірою m_Ω області Ω, а множина наслідків, сприятливих щодо події A, - мірою m_A області A. Імовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A)=\frac{m_A}{m_\Omega}$$

Зокрема, в одновимірному координатному просторі ймовірність у данній формулі визначається відношенням довжин відрізків, у двовимірному просторі – відношенням площ плоских фігур, у тривимірному просторі – відношенням об’ємів просторових тіл. Отже, якщо довжину позначено через *L*, площу – через *S* і об’єм – через *V,* то формула (1.5) в одно-, дво-, тривимірному координатному просторі набирає відповідно такого вигляду:

$$P(A)=\frac{L_A}{L_\Omega}, \quad або \quad P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}, \quad або \quad P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}.$$

Задача. У точці *C*, положення якої на телефонній лінії рівноможливо, відбувся розрив. Визначити імовірність того, що точка *C* вилучена від точки *A* на відстань, не менше *l*.

*Відповідь:*_імовірність того, що точка С розташована від точки *A* на відстань, менше *l*, дорівнює $\frac{l}{4}$ А імовірність того, що точка *C* розташована від точки *A* на відстань, не менше *l*, $P(A)=1-\frac{l}{4}$

Наведемо приклади безпосереднього обчислення ймовірностей за формулою (1.1) із застосуванням формул (1.2) – (1.4).

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове число ділиться на *5*.

Розв’язання. Позначимо подію А - {число ділиться на *5*}. Загальна кількість n наслідків випробування дорівнює 90 (вибирається одне з чисел від *10* до *99*). Ці наслідки рівно можливі, оскільки число вибирається навмання, і утворюють повну групу несумісних подій, так як неодмінно буде вибрано одне з цих чисел

Сприятливими щодо події *А* є ті наслідки, в яких буде вибрано число, що закінчується нулем або п’ятіркою. Кількість таких наслідків *m=18.* отже, за формулою (1.1) *P(A)*=0,2.

Приклад 2. У групі із двадцяти студентів *30%* - відмінники. Для здачі заліку навмання викликаного одного студента. Яка ймовірність того, що викликано відмінника?

Розв'язання. Позначимо подію B - {викликано відмінника}. Випробування полягає у випадковому виборі одного студента із двадцяти, тому загальна кількість наслідків $n=20$. оскільки за умовою в групі 6 відмінників, то кількість сприятливих щодо події A наслідків $m=6$. за формулою (1.1) $P(B)=0,3$.

Приклад 3. Кожний із чотирьох пасажирів може придбати квиток із семи рейсів, що виконуються впродовж дня до аеропорту N. Знайти ймовірність того, що вони придбали квитки:

а) на перший рейс;

б) на один і той самий рейс;

в) на різні рейси.

Розв'язання. Оскільки для кожного пасажира є 7 варіантів придбання квитка, то, згідно з принципом добутку, кількість усіх наслідків випробування $n=7^4$.

а) Позначимо подію B -{всі пасажири придбали на перший рейс}. Цій події сприяє лише один наслідок. Отже, $m_B=1$, а за формулою (1.1) $P(B)=0,0004$.

б) Позначимо подію C -{усі пасажири придбали квитки на один і той самий рейс}. Сприятливими щодо цієї події є 7 наслідків (за кількістю рейсів). Отже, $m=7$, тому $P(C)=0,0029$.

с) Позначимо подію D -{пасажири придбали квитки на різні рейси}. Кількість наслідків, сприятливих щодо цієї події, $m_D= A_7^4 =840$, тому $P(D)=0.35$.

Приклад 4. У комплекті 9 виробів найвищої якості становлять 75 % усього комплекту. Випадковим чином відібрано 6 виробів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виробів:

а) усі найвищі якості;

б) лише 4 найвищої якості.

Розв'язання. Оскільки 9 виробів становлять 75 %, то всього в комплекті міститься 12 виробів, три з яких не найвищої якості. Випробування полягає у виборі 6 виробів із дванадцяти. Отже, кількість усіх наслідків випробування $n = C_{12}^6 = 924$.

а) Позначимо подію *А* - {усі відібрані вироби найвищої якості}. Цій події сприяють лише ті наслідки, в яких відбір шести виробів здійснюється з дев'яти найвищої якості. Отже, $m_A = C_9^6 = C_9^3 = 84$, а *P(A)=0,09*.

б) позначимо подію *В* - {серед відібраних лише *4* вироби найвищої якості}. Сприятливими щодо цієї події є ті наслідки, в яких *4* вироби відбираються із дев'яти найвищої якості і *два* вироби із трьох не найвищої якості. За принципом добутку $m_B = C_9^4 = C_3^2 = 378$, а *P(B)=0,41*.

Приклад 5. Вісім літаків, серед яких два *Ан-140*, що прибули в аеропорт, випадковим чином розміщені на стоянках, розташованих в одному ряду. Яка ймовірність того, що між літаками АН-140 опиниться один літак іншого типу і не залишиться вільних стоянок, якщо кількість стоянок: а) дорівнює *10*; б) є *8*?

Розв'язання.

а) Загальна кількість варіантів розміщення восьми літаків на десяти стоянках обчислюється за формулою (1.3): $n = A_{10}^8 = 1814400$.

Позначимо подію *С* - {між літаками *Ан-140* є один літак іншого типу}. Кількість варіантів такого розташування для літаків *Ан-140* з урахуванням варіантів, що виникають при заміні їх місцями, дорівнює *16*. Для літака, який розташується між ними, є *6* варіантів, а для решти п'яти літаків кількість варіантів розташування на семи вільних стоянках дорівнює $A_7^5 = 2520$.

За принципом добутку число m_c наслідків, сприятливих щодо події *С*, дорівнює m=16·6·2520=241920, а ймовірність події *С*: $P(C) \approx 0{,}133$.

б) Загальна кількість варіантів розташування восьми літаків на восьми місцях обчислюється за формулою (1.4): $n=P_8=8!=40320$.

Кількість варіантів указаного в умові розміщення літаків *Ан-140* дорівнює *12*, а решти шести літаків на шести місцях, що залишились, $P_6=720$. Отже, $m=12\cdot720=8640$, а $P(C)\approx0{,}214$.

7.2. Завдання для самостійної роботи.

Визначити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

Варіант 1

x_i	24	27	31	43	50	55
n_i	8	12	15	58	4	2

Варіант 2

x_i	20	14	18	29	35	37
n_i	2	6	11	38	19	12

Варіант 3

x_i	24	31	36	43	52	57
n_i	4	16	38	24	6	3

Варіант 4

x_i	47	51	56	62	64	69
n_i	3	7	20	39	19	11

Варіант 5

x_i	66	72	77	82	87	89
n_i	19	4	14	22	13	15

Варіант 6

x_i	13	28	33	38	40	44
n_i	5	10	13	18	9	2

Варіант 7

x_i	10	12	16	19	22	28
n_i	3	7	10	20	29	22

Варіант 8

x_i	14	23	31	39	45	51
n_i	9	10	22	14	16	4

Варіант 9

x_i	19	24	32	38	37	40
n_i	1	4	6	21	11	3

Варіант 10

x_i	14	24	34	44	53	61
n_i	2	10	22	32	14	11

Варіант 11

x_i	16	17	18	23	25	27
n_i	6	6	3	1	2	1

Варіант 12

x_i	28	30	32	20	34	32
n_i	11	12	14	16	9	11

Варіант 13

x_i	34	32	30	42	28	32
n_i	11	2	8	3	12	7

Варіант 14

x_i	19	24	32	38	37	40
n_i	1	4	6	21	11	3

Варіант 15

x_i	18	27	30	42	48	50
n_i	6	18	25	22	19	11

Варіант 16

x_i	10	13	15	20	24	29
n_i	8	6	10	17	6	5

Варіант 17

x_i	40	44	48	52	55	60
n_i	9	5	28	35	20	15

Варіант 18

x_i	30	38	47	52	67	79
n_i	11	9	15	20	18	10

Варіант 19

x_i	24	27	31	43	50	55
n_i	8	12	15	58	4	2

Варіант 20

x_i	20	14	18	29	35	37
n_i	2	6	11	38	19	12

Варіант 21

x_i	24	31	36	43	52	57
n_i	4	16	38	24	6	3

Варіант 22

x_i	47	51	56	62	64	69
n_i	3	7	20	39	19	11

Варіант 23

x_i	66	72	77	82	87	89
n_i	19	4	14	22	13	15

Варіант 24

x_i	21	27	32	36	39	44
n_i	19	25	10	18	6	8

Варіант 25

x_i	18	24	31	37	42	48
n_i	18	15	20	27	33	40

Варіант 26

x_i	19	24	32	38	37	40
n_i	1	4	6	21	11	3

Варіант 27

x_i	14	24	34	44	53	61
n_i	2	10	22	32	14	11

Варіант 28

x_i	16	17	18	23	25	27
n_i	6	6	3	1	2	1

Варіант 29

x_i	28	30	32	20	34	32
n_i	11	12	14	16	9	11

Варіант 30

x_i	34	32	30	42	28	32
n_i	11	2	8	3	12	7

7.3. Завдання для для самоперевірки

7.3.1. Теоретичні питання.

1. Основні поняття математичної статистики.
2. Предмет та задачі курсу математичної статистики.
3. Статистичні ряди розподілу, їх графіки.
4. Суть та алгоритм вибіркового методу.

5. Як розрахувати відносні частоти?
6. Як розрахувати числові характеристики випадкової величини?

7.3.2. Тестові завдання.

1. Проаналізуйте, яке з перерахованих подій є неможливим:

   а) Студент відвідав лекцію;
   б) Поява білої кулі з урни, що містить 10 чорних куль;
   в) Поява білої кулі з урни, що містить 18 білих і 2 чорних кулі;
   г) Середа буде дощовим днем.

2. У колоді 36 карт. Навмання виймають одну карту. Знайдіть ймовірність появи короля.

   а) 4/36
   б) 1/36
   в) 1/4
   г) 4/9

3. Відомо, що *P (A) = 0,15*. Вкажіть ймовірність протилежної події $P(\overline{A})$

   а) 0,35
   б) 0,5
   в) 0,85
   г) 0

4. Виберіть яке з понять описує випадкову величину:

   а) матриця;
   б) вектор;
   в) границя;
   г) дисперсія.

5. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює ...

   а) 1
   б) 0
   в) 0,5
   г) 1,5

6. Виберіть випадкову подію::

   а) Студент відповів на всі три питання в білеті, якщо вивчив 24 питання з 25 необхідних;
   б) Монета при підкиданні (на Землі) зависне в повітрі;
   в) При температурі 2^0 С. вода перетвориться в лід;
   г) Після літа наступить осінь.

7. Виникнення або умисне створення певного комплексу умов, результатом якого є той чи інший результат, називається ...

   а) Випробуванням (дослідом)

б) Подією
в) Ймовірністю
г) Поєднанням

8. Ймовірність події задовольняє нерівності –

а) $0 \leq p \leq 1$
б) $1 < p < 2$
в) $-\infty < p < +\infty$
г) $-\infty \leq p \leq +\infty$

9. Рівність $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ має місце для __________ подій

а) залежних
б) довільних
в) протилежних
г) рівно можливих

10. Два стрільця виробляють по одному пострілу. Ймовірність попадання в ціль для першого і другого стрільців рівні *0,9* і *0,4* відповідно. Ймовірність того, що у ціль влучать обидва.

а) 0,36
б) 0,5
в) 0,45
г) 0,4

11. Коефіцієнт варіації:

а) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$; --
б) $\overline{D} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x^2 \cdot n_i}{n} - \overline{x}^2$;
в) $\overline{D}_u = \dfrac{n}{n-1}\overline{D}$;
г) $\overline{V} = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\%$.

12. Виберіть: які з перерахованих характеристик **<u>не</u>** описує випадкову величину:

а) математичне сподівання;
б) інтегральна функція;
в) дисперсія;
г) границя.

13. Виберіть числову характеристику, що не відноситься до показників варіації:

а) розмах варіації;

б) дисперсія;
в) середнє квадратичне відхилення;
г) ймовірність.

14. Задан закон розподілу випадкової величини X:

x_i	-2	0	2	3
p_i	0,2	?	0,5	0,1

Значення p_2 дорівнює…

а) 0,2
б) 0,1
в) 0,3
г) 0,9

15. Чи правильна рівність $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$?

а) неправильна;
б) правильна, якщо змінні однаково розподілені;
в) правильна, якщо змінні незалежні
г) правильна

16. Виберіть вірну відповідь на питання: чому дорівнює дисперсія постійної величини C?

а) постійній C;
б) C^2;

а) $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$ б) $h = \frac{(b-a)}{k}$ в) $\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x^2 \cdot n_i}{n} - \overline{x}^2$ г) $M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

17. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу ймовірностей

X	0	1	2
P	0,4	0,5	0,1

Математичне сподівання $M(X)$ дорівнює:

а) 0,6
б) 0,3
в) 0,7
г) 0,1