

$$r_2(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

Оскільки за означенням $x - x_0 = \Delta x$, $f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, то

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0),$$

з похибкою, що не перевищує

$$|r_2(x)| = \left| \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \right|, x_0 < c < x.$$

7.5. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

7.5.1. Монотонність функцій

7.5.2. Локальні екстремуми функції

7.5.3. Найменше та найбільше значення функції

7.5.4. Опуклість функцій і точки перегину

7.5.5. Асимптоти графіка функції

7.5.6. Схема повного дослідження функції

Застосуємо диференціальне числення до дослідження функцій та побудови їх графіків.

7.5.1. Монотонність функцій

Одним із застосувань похідної є дослідження функцій і побудова їхніх графіків.

1. Теорема 7.10 (критерій сталості функції).

Функція f є сталою на відрізьку $[a; b]$ тоді й лише тоді, коли

$$f'(x) = 0, x \in [a; b].$$

Доведення. $\Rightarrow$ Якщо функція f є сталою на відрізьку $[a; b]$, то вона має на цьому відрізьку похідну, і ця похідна

$$f'(x) = 0, x \in [a; b].$$

$\Leftarrow$ Нехай $f'(x) = 0$ для всіх $x \in [a; b]$. Розгляньмо фіксовану точку $x_0 \in [a; b]$ і будь-яку точку $x \in [a; b]$, $x \neq x_0$. На підставі теореми Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

де $c \in (x_0; x)$. Оскільки $f'(c) = 0$, то $f(x) = f(x_0)$ для всіх $x \in [a; b]$. Це означає, що

$$f(x) = \text{const}, x \in [a; b]. \blacksquare$$

2. Теорема 7.11 (необхідна умова зростання (спадання) функції).

Якщо функція f на відрізку $[a; b]$ диференційовна і зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $x \in [a; b]$.

Доведення. Справді, якщо функція f зростаюча, то

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) > 0 \text{ для } \Delta x > 0;$$

$$\Delta f(x) < 0 \text{ для } \Delta x < 0.$$

В обох випадках $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$, а, отже,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0. \blacksquare$$

3. Теорема 7.12 (достатні умови строгої монотонності).

Якщо функція f :

- 1) неперервна на відрізку $[a; b]$,
- 2) диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і
- 3) $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$),

то функція f зростає (спадає) на відрізку $[a; b]$.

Доведення. Справді, за формулою скінченних приростів для довільних x та x_0 з відрізка $[a; b]$ маємо

$$\Delta f(x_0) = f'(c) \Delta x.$$

Отже, якщо $f'(x) > 0$ в $(a; b)$ і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x) > 0$ і функція f зростає на відрізку $[a; b]$.

Якщо $f'(x) < 0$ в $(a; b)$ і $\Delta x > 0$, то $\Delta f(x) < 0$ і функція f спадає на відрізку $[a; b]$. $\blacksquare$

4. Якщо функція f зростає (спадає) в $(a; b)$, то це ще не означає, що $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) в усіх точках проміжку.

Приміром, функція $y = x^3$ зростає в $(-\infty; +\infty)$, однак $y'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$ (рис. 7.16).

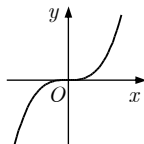


Рис. 7.16. Зростаюча функція

5. Інтервали монотонності функції відокремлюють один від одного або точки, де похідна дорівнює нулеві, або точки, де похідна дорівнює нескінченності чи не існує.

Означення 7.9 (критичної точки 1-го порядку).

Нехай функція f означена в околі точки x_0 . Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку* функції f , якщо виконано одну з умов:

- 1) $f'(x_0) = 0$;
- 2) $f'(x_0) = \infty$;
- 3) $\nexists f'(x_0)$.

Геометрично ці умови означають, що у критичній точці 1-го порядку дотична або паралельна осі Ox (умова 1) (такі точки називають *стаціонарними*), або паралельна осі Oy (умова 2) (такі точки називають *точками вертання*) або дотичної не існує (умова 3) (такі точки називають *кутовими*) (рис. 7.17).

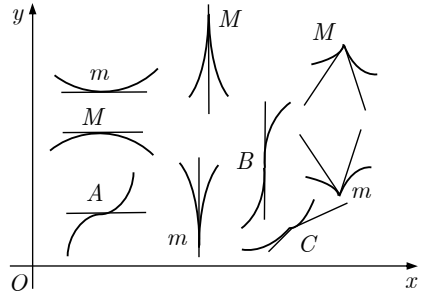


Рис. 7.17. Критичні точки 1-го порядку

7.5.2. Локальні екстремуми функції**1. Означення 7.10 (точок локального екстремуму).**

Точку x_0 називають *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції f , якщо існує δ -оکیل точки x_0 , такий, що для всіх $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконано нерівність

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$

$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Точки локального максимуму та мінімуму називають *точками локального екстремуму функції*.

Значення $f(x_0)$ називають *локальним максимумом (мінімумом)* функції (рис. 7.18).

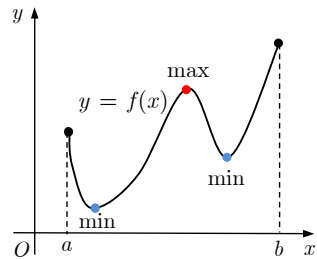


Рис. 7.18. Локальні екстремуми

Локальність екстремуму означає, що відповідна нерівність повинна виконуватись лише в деякому околі точки x_0 , а не на всій області означення. Функція може мати декілька локальних екстремумів, але всі вони

досягаються у внутрішніх точках області означення. Причому можливо, що локальний максимум буде меншим, ніж локальний мінімум.

2. Теорема 7.13 (необхідна умова локального екстремуму).

Якщо функція f у точці x_0 досягає локального екстремуму, то в цій точці виконано одну з умов:

- 1) $f'(x_0) = 0$;
- 2) $f'(x_0) = \infty$;
- 3) $\nexists f'(x_0)$.

Тобто, точка, у якій функція досягає локального екстремуму є критичною точкою 1-го порядку. Обернене твердження неправильне: не всяка критична точка 1-го порядку є точкою локального екстремуму.

3. Теорема 7.14 (перша достатня умова локального екстремуму).

Нехай x_0 — критична точка 1-го порядку функції f і функція f неперервна в деякому околі точки x_0 . Якщо в цьому околі:

- 1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$, і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, то в точці x_0 функція f досягає максимуму;
- 2) $f'(x) < 0$, коли $x < x_0$, і $f'(x) > 0$, коли $x > x_0$, то функція f досягає в точці x_0 мінімуму (рис. 7.19);
- 3) похідна $f'(x)$ не змінює знак переходячи через x_0 , то в точці x_0 функція f екстремуму не має.

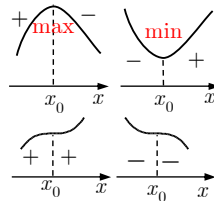


Рис. 7.19. Достатня умова локального екстремуму

Доведення. Нехай x_0 — точка можливого екстремуму, причому $f'(x) > 0$, коли $x \in U_\delta(x_0 - 0)$, та $f'(x) < 0$, коли $x \in U_\delta(x_0 + 0)$.

Тоді

$$\left. \begin{aligned} f'(x) > 0 \forall x \in U_\delta(x_0 - 0) &\Rightarrow f(x_0) > f(x), \\ f'(x) < 0 \forall x \in U_\delta(x_0 + 0) &\Rightarrow f(x) < f(x_0), \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \exists U_\delta(x_0) : f(x_0) > f(x),$$

Тобто точка x_0 є точкою локального максимуму функції f .

Так само доводиться існування точки локального мінімуму.

Якщо $f'(x)$ зберігає знак в околі точки x_0 , то в цьому околі функція монотонна, тобто точка x_0 не є точкою локального екстремуму. ■

4. Приміром, для функції $f(x) = x^2$ точка $x = 0$ є критичною точкою 1-го порядку, оскільки $f'(0) = 2x|_{x=0} = 0$; похідна $f'(x) = 2x$ змінює знак «з мінуса на плюс». Отже, точка $x = 0$ є точкою локального мінімуму функції $f(x) = x^2$.

5. Умова неперервності функції f у самій точці істотна. Приміром, для функції (рис. 7.20)

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

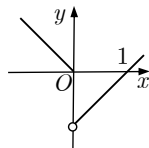


Рис. 7.20. Відсутність локального екстремуму

похідна $f'(x)$ існує в усіх точках, окрім точки $x = 0$. Переходячи через цю точку, похідна змінює знак, але в точці $x = 0$ функція екстремуму не має: не існує околу точки $x = 0$, у якій $f(0) = 1$ було б найбільшим або найменшим значенням функції f . Тут порушена умова неперервності функції f у точці $x = 0$.

6. **Теорема 7.15** (друга достатня умова локального екстремуму).

Нехай функція f має в околі точки x_0 першу та другу похідні, причому $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. Тоді:

- 1) якщо $f''(x_0) > 0$, то функція f має в точці x_0 локальний мінімум;
- 2) якщо $f''(x_0) < 0$, то функція f має в точці x_0 локальний максимум.

7. Приміром, для функції $f(x) = x^2$ точка $x = 0$ є критичною точкою 1-го порядку, оскільки $f'(0) = 2x|_{x=0} = 0$.

Оскільки $f''(x) = 2 > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, зокрема й в точці $x = 0$, то точка $x = 0$ є точкою локального мінімуму.

7.5.3. Найменше та найбільше значення функції

1. За Ваєрштрасовою теоремою 6.14 неперервна на відрізку $[a; b]$ функція досягає на цьому відрізку свого найменшого та найбільшого значення, які ще називають *глобальними екстремумами* функції на відрізку (рис. 7.21).

Ці значення функція може набувати або в точках локальних екстремумів в інтервалі $(a; b)$, або на межі при $x = a$ чи $x = b$.

2. Приміром, функція $f(x) = x^2$ на відрізку $[-1; 2]$ набуває свого найменшого значення в стаціонарній точці $x = 0$, а свого найбільшого значення на правому кінці відрізка — у точці $x = 2$:

$$\begin{aligned}\min_{x \in [-1; 2]} f(x) &= f(0) = 0; \\ \max_{x \in [-1; 2]} f(x) &= f(2) = 4.\end{aligned}$$

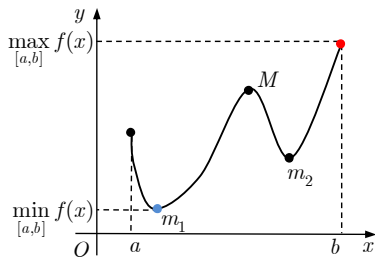


Рис. 7.21. Глобальні екстремуми функції

7.5.4. Опуклість функцій і точки перегину

1. Розгляньмо функцію $f(x), x \in (a; b)$. Нехай x_1 та x_2 — дві різні точки інтервалу $(a; b)$. Через точки $A(x_1; f(x_1))$ та $B(x_2; f(x_2))$ графіка функції f проведемо хорду AB .

Означення 7.11 (опуклості донизу і догори).

Функцію f називають *опуклою донизу* в інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a; b)$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, хорда AB ($A = f(x_1), B = f(x_2)$) лежить не нижче графіка цієї функції і позначають $f \cup$ (рис. 7.22).

Функцію f називають *опуклою догори* в інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-яких x_1 та x_2 з $(a; b)$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, хорда AB лежить не вище графіка цієї функції і позначають $f \cap$ (рис. 7.23).

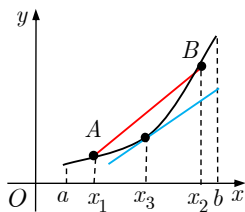


Рис. 7.22. Опукла донизу функція

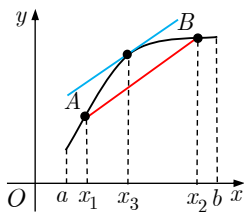


Рис. 7.23. Опукла догори функція

Неперервно диференційовна функція f опукла донизу (догори) в інтервалі $(a; b)$ тоді й лише тоді, коли всі точки $(x; f(x)), x \in (a; b)$, графіка

функції лежать не нижче (не вище) дотичної, проведеної до нього в будь-якій точці $(x_3; f(x_3))$, $x_3 \in (a; b)$.

Теорема 7.16 (достатня умова опуклості функції).

Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі $(a; b)$ двічі неперервно диференційовна. Тоді:

- 1) якщо $f''(x) > 0 \forall x \in (a; b)$, то ця функція в інтервалі $(a; b)$ опукла донизу;
- 2) якщо $f''(x) < 0 \forall x \in (a; b)$, то ця функція в інтервалі $(a; b)$ опукла догори.

2. Нехай функція f неперервна в деякому околі точки x_0 й існує $f'(x_0)$ (скінченна, $+\infty$ або $-\infty$).

Означення 7.12 (точки перегину).

Точку x_0 називають *точкою перегину* функції f , якщо вона відокремлює інтервал опуклості догори функції f від інтервалу опуклості донизу. Тоді точку $M_0(x_0; f(x_0))$ називають *точкою перегину графіка* функції $y = f(x)$. (рис. 7.24).

Отже, під час переходу аргументу x через точку перегину x_0 , напрям опуклості функції змінюється на протилежний.

Інтервали опуклості функції можуть відокремлюватись один від одного або точками, де друга похідна дорівнює нулю, або точками, де друга похідна дорівнює нескінченності, або точками, де друга похідна не існує.

Означення 7.13 (критичної точки 2-го порядку).

Нехай функція f означена в околі точки x_0 . Точку x_0 називають *критичною точкою 2-го порядку* функції f , якщо виконано одну з умов:

- 1) $f''(x_0) = 0$;
- 2) $f''(x_0) = \infty$;
- 3) $\nexists f''(x_0)$.

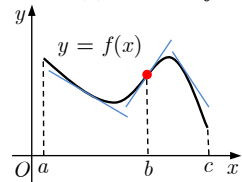


Рис. 7.24. Точка перегину

Теорема 7.17 (необхідна умова точки перегину).

Якщо x_0 є точкою перегину функції f , то в цій точці виконано одну з умов:

- 1) $f''(x_0) = 0$;
- 2) $f''(x_0) = \infty$;
- 3) $\nexists f''(x_0)$.

Ця умова не є достатньою. Приміром, для функції

$$y = x^4, y''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0,$$

але $x = 0$ не є точкою перегину.

Теорема 7.18 (достатня умова точки перегину).

Якщо для функції f точка x_0 є критичною точкою 2-го порядку, і, переходячи через цю точку, друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину функції f .

3. Приміром, для функції $f(x) = x^3$ точка $x = 0$ є критичною точкою 2-го порядку, оскільки $f''(0) = 6x|_{x=0} = 0$; похідна $f''(x) = 6x$ змінює знак. Отже, точка $x = 0$ є точкою перегину функції $f(x) = x^3$.

7.5.5. Асимптоти графіка функції

1. Розгляньмо криву L з нескінченною гілкою.

Означення 7.14 (асимптоти).

Асимптотою кривої L називають таку пряму, що віддаль d від точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки кривої від початку координат (рис. 7.25).

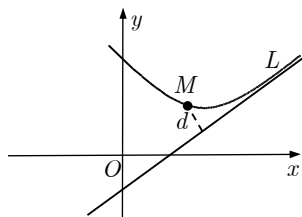


Рис. 7.25. Асимптота кривої

2. Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \pm\infty.$$

Справді, при цьому віддаль

$$d = |x - x_0|$$

від точки $M(x; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$ до прямої $x = x_0$ прямує до нуля і точка M необмежено віддаляється від початку координат (рис. 7.26).

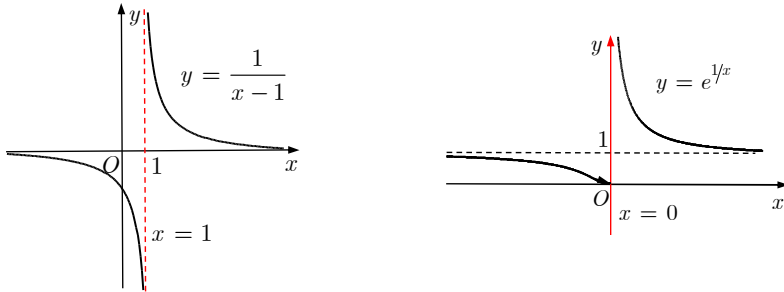


Рис. 7.26. Приклади вертикальних асимптот

3. Розгляньмо функцію f задану в околі $U_\varepsilon(+\infty)$ (випадок $-\infty$ розглядають так само). Нехай пряма $y = kx + b$ є асимптотою графіка функції $y = f(x)$ (її називають *похилою*, а в разі $k = 0$ — *горизонтальною асимптотою*) (рис. 7.27).

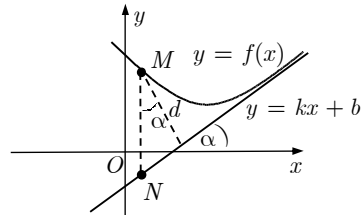


Рис. 7.27. Похила асимптота

Те, що пряма $y = kx + b$ є асимптотою кривої $y = f(x)$, коли $x \rightarrow +\infty$, означає, що віддаль d від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли $x \rightarrow +\infty$. З рисунку бачимо, що

$$d = |MN| |\cos \alpha|,$$

де $N(x; kx + b)$. Оскільки $\cos \alpha \neq 0$, прямування до нуля d , коли $x \rightarrow +\infty$, тягне за собою прямування до нуля

$$|MN| = |f(x) - kx - b|,$$

і навпаки.

Отже, пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ тоді й лише тоді, коли

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Існування асимптоти графіка функції означає, що, коли $x \rightarrow +\infty$ функція поводить себе «майже як лінійна функція».

Теорема 7.19 (критерій існування похилої асимптоти).

Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

4. Приміром, знайдемо асимптоти для функції $y = x - \frac{1}{x}$.

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Оскільки,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty,$$

то пряма $x = 0$ — двобічна вертикальна асимптота графіка функції.

Оскільки,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = 0,$$

то пряма $y = x$ є двобічною похилою асимптотою графіка функції.

7.5.6. Схема повного дослідження функції

Досліджують двічі диференційовну функцію $y = f(x)$ на $D(f)$ (за винятком, можливо, скінченної множини точок) і будують її графік за такою схемою:

- 1) знаходять область означення функції f — множину $D(f)$;
- 2) установлюють можливі симетрії графіка функції f ;
- 3) визначають можливі точки розриву функції f і асимптоти її графіка;
- 4) за допомогою першої похідної функції f визначають інтервали монотонності й точки локального екстремуму функції;
- 5) за допомогою другої похідної функції f визначають інтервали опуклості й точки перегину функції;
- 6) знаходять можливі точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з осями координат;
- 7) будують графік функції $y = f(x)$ за встановленою інформацією.