Метод найменших квадратів відновлення функції

Нехай маємо таблично задану функцію:

x_i	x_0	x_1	…	x_n
y_i	y_0	y_1	…	y_n

Будемо шукати аналітичну залежність у лінійному виді:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x$$

Невідомі коефіцієнти будемо шукати методом найменших квадратів, тобто щоб сума квадратів відхилів прагнула до мінімуму:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \to min.$$

Це функція багатьох змінних, тому щоб вона приймала мінімальне значення необхідно, щоб її частинні похідні дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

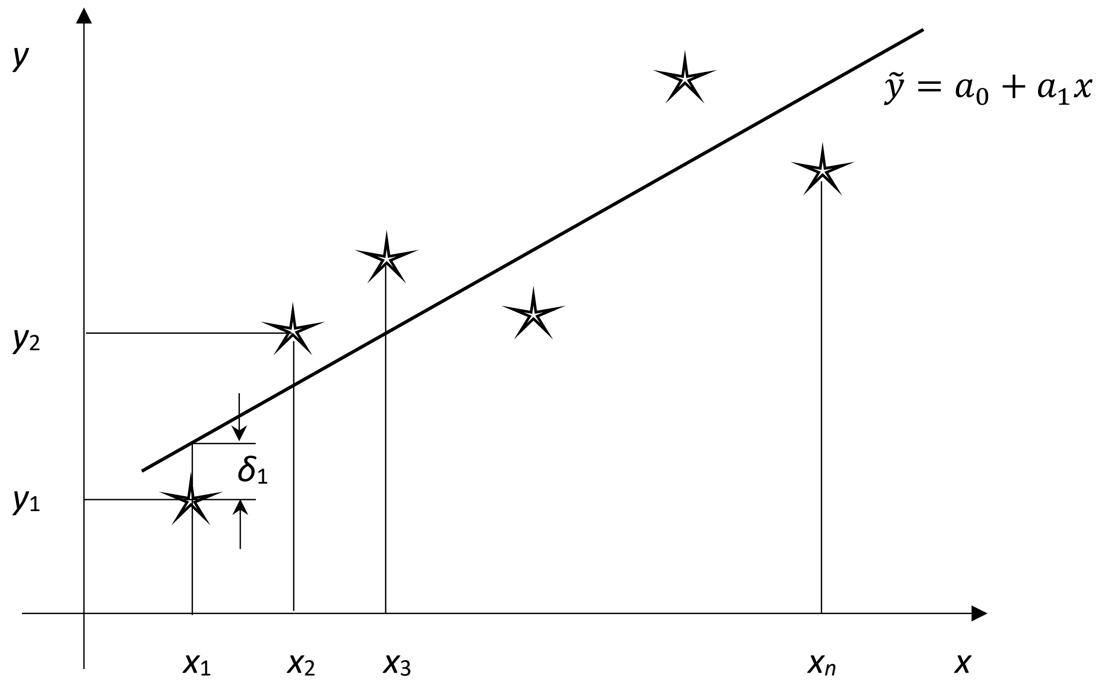
або

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація



Якщо взяти аналітичну залежність у квадратичному виді:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Невідомі коефіцієнти будемо шукати методом найменших квадратів, тобто щоб сума квадратів відхилів прагнула до мінімуму:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2 \to min.$$

Це функція багатьох змінних, тому щоб вона приймала мінімальне значення необхідно, щоб її частинні похідні дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot x_i^2 = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Математичні моделі на основі фундаментальних законів природи

Закон збереження енергії.

Визначити швидкість пулі скориставшись пристроєм типу маятника – грузика, підвішеного на легкому жорсткому стержні, що вільно обертається (рис. 1).

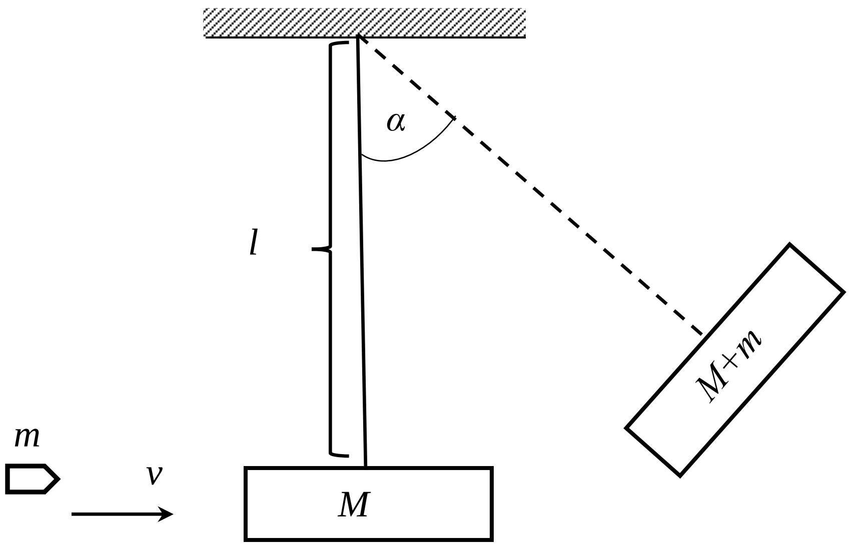


Рис. 1

Пуля, що застрягла у грузику, передає системі «пуля-грузик» свою кінетичну енергію яка у момент найбільшого відхилення стержня від вертикалі повністю перейде в потенціальну енергію системи. Ця трансформація описується ланцюгом рівностей:

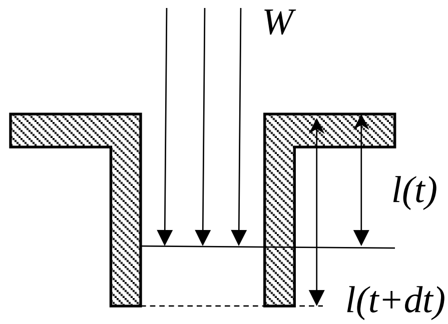
$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-cos\alpha).$$

Тут v – швидкість кулі, m – маса кулі, M – маса грузика, V – швидкість системи «куля-грузик» відразу після зіткнення, g – прискорення вільного падіння, l – довжина стержня, α – кут найбільшого відхилення.

Тоді шукана швидкість визначається формулою:

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-cos\alpha)}{m}}.$$

Оцінити час t_k свердління шару металу товщиною L лазером з потужныстю W, випромінювання якого перпендикулярно поверхні матеріалу (рис. 2).



Якщо енергія лазеру повністю йде на випарювання стовпчику металу вагою $LS\rho$ (L – площа опромінювання, LS – об'єм стовпчика, ρ – щільність речовина), то закон збереження енергії прийме вид:

$$E_0=Wt_k=hLS\rho,$$

тут h – енергія, необхідна для випарювання одиниці ваги.

Зміна глибини виямки $l(t)$ із часом визначається із детального балансу енергії в проміжку часу від t до $t+dt$. На випарену за цей час вагу

$$[l(t+dt)-l(t)]S\rho=dlS\rho$$

витрачається енергія $dlhS\rho$, що дорівнює енергії Wdt, яка передається речовені лазером:

$$dlhS\rho=Wdt,$$

звідки маємо диференціальне рівняння

$$dl/dt=W/(hS\rho).$$

Його інтегрування дає

$$l(t)=Wt/(hS\rho)=E(t)/(hS\rho).$$

Закон збереження імпульсу.

Побудувати найпростішу математичну модель реактивного руху ракети.

Нехай продукти горіння ракетного палива покидають сопла ракети зі швидкістю u (u=3-5 км/с). За малий проміжок часу dt між моментами t та $t+dt$ частина палива вигоріла й вага ракети змінилась на величину dm. Змінився також імпульс ракети, однак сумарний імпульс системи «ракета + продукти горіння» залишився таким же, що і в момент часу t, тобто

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm[v(t+\theta dt) - u]$$

$v(t)$ – швидкість ракети.

Враховуючи, що $m(t+dt) = m(t) + \left(\frac{dm}{dt}\right)dt + O(dt^2)$, закон збереження імпульсу можна переписати у виді диференціального рівняння:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u,$$

перетворимо його до виду

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt},$$

після інтегрування маємо

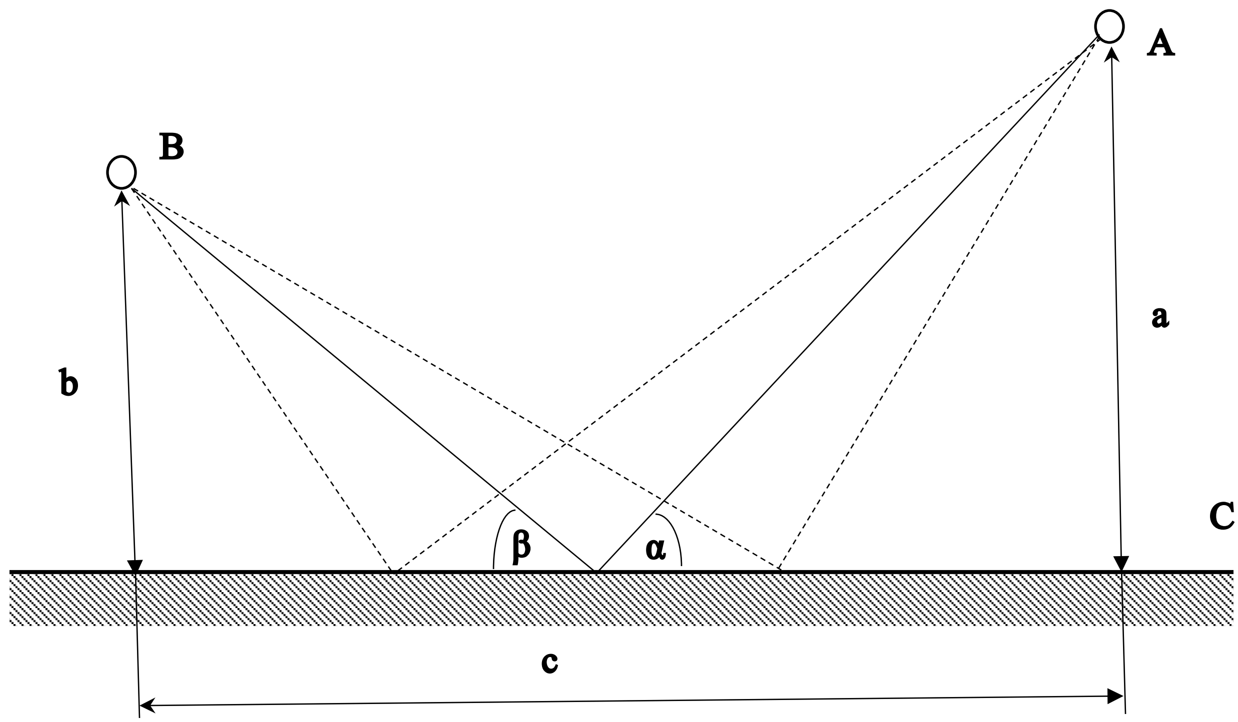
$$v(t) = v_0 + uln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right).$$

Якщо $v_0 = 0$, то максимальна швидкість ракети, що досягається при повному згоранні палива, дорівнює

$$v = uln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right).$$

Введемо величину

$$\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}.$$



Витрачений час:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v sin\alpha} + \frac{b}{v sin\beta(\alpha)}.$$

Умова екстремальності

$$\frac{dt}{d\alpha} = 0,$$

або

$$\frac{a cos\alpha}{sin^2\alpha} + \frac{b cos\beta(\alpha)}{sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Геометрична умова:

$$c = \frac{a}{tg\alpha} + \frac{b}{tg\beta(\alpha)}.$$

Диференцюючи його, маємо

$$\frac{a}{sin^2\alpha} + \frac{b}{sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

з умови мінімальності

$$cos\alpha = cos\beta(\alpha).$$

Ієрархічний підхід.

Модель багатоступеневої ракети.

Початкова вага ракети:

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Після витрати палива першої ступені:

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3.$$

За формулою Ціолковського швидкість дорівнює

$$v_1 = uln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

При досягненні цієї швидкості вага стає

$$m_p + m_2 + m_3.$$

За формулою Ціолковського швидкість дорівнює

$$v_2 = v_1 + uln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right).$$

На наступному етапи за формулою Ціолковського швидкість дорівнюватиме

$$v_3 = v_2 + uln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right).$$

Остаточно маємо

$$\frac{v_3}{u} = ln\left(\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)\right).$$

У загальному випадку

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, P = exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right).$$