Тема 7. Лінійні оператори в евклідовому просторі

Нехай V - евклідовий простір, A - лінійний оператор в просторі V.

Оператор A^* називається *спряженим* з лінійним оператором A, якщо для будь-яких $x, y \in V$ виконується рівність $(Ax, y) = (x, A^* y)$.

Будь-якому лінійному оператору A відповідає єдиний спряжений оператор A^*, причому його матриця в ортонормованому базисі є матриця A^t ($A^* = A^t$).

Лінійний оператор A називається ***самоспряженим***, якщо він задовольняє умові $A = A^*$ або

$$(Ax, y) = (x, Ay) \text{ для будь-яких } x, y \in V$$

Самоспряжений оператор в евклідовому просторі називається ***симетричним***.

Симетричному оператору в кожному ортонормованому базисі відповідає симетрична матриця.

Лінійний оператор в еквлідовому просторі буде самоспряженим тоді і тільки тоді, коли в просторі існує ортонормований базис, складений з його власних векторів.

Лінійний оператор A в просторі V називається ***ізометричним***, якщо він зберігає скалярний добуток, тобто

$$(Ax, Ay) = (x, y) \text{ для будь-яких } x, y \in V.$$

Для ізометричного оператора A спряжений оператор A^* дорівнює оберненому оператору A^{-1}.

Ізометричні оператори, що діють в евклідовому просторі називають ***ортогональними***.

Полярний розклад оператора

Теорема. Нехай A_φ - невироджений лінійний оператор в евклідовому просторі. Тоді існують ортогональний оператор A_ψ та самоспряжений оператор A_χ з додатними власними значеннями (додатний оператор) такі, що $A_\varphi = A_\chi \cdot A_\psi$ - полярний розклад.

Алгоритм

1. Знаходимо $A^* = A^t$.
2. Знаходимо $A_\varphi A_\varphi{}^* = A_\varphi A_\varphi{}^t = A_{\chi^2}$ - матриця симетрична і додатна
3. Для матриці A_{χ^2} знаходимо канонічний базис (ортонормований базис з власних векторів).
4. Складаємо матрицю C, стовпцями якої є координати векторів канонічного базису. Оскільки базис ортонормований, то $C^{-1} = C^t$.
5. $A'_{\chi^2} = C^{-1} A_{\chi^2} C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
6. Знаходимо $A'_\chi = \sqrt{A'_{\chi^2}}$, тоді $A_\chi = C A'_\chi C^{-1}$.
7. Знаходимо $A_\psi = A_\chi^{-1} A_\varphi$.

Приклад. Знайти полярний розклад лінійного оператора з матрицею

а) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1. Матриця лінійного оператора $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Матриця спряженого оператора

$A_{\varphi^*} = A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайдемо $A_{\chi^2} = A_\varphi A_\varphi{}^* = A_\varphi A_\varphi{}^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$.

3. Для матриці A_{χ^2} знаходимо власні значення та ортонормований базис з власних векторів:

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} 40-\lambda & 18 \\ 18 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 49$

$$\begin{pmatrix} 40-49 & 18 \\ 18 & 13-49 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{a} = (2{,}1) \Rightarrow \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2{,}1)$$

$\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} 40-4 & 18 \\ 18 & 13-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{a} = (1,-2) \Rightarrow \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$$

4. Складаємо матрицю $C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, стовпцями якої є координати векторів канонічного базису. Оскільки базис ортонормований, то $C^{-1} = C^t = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $A'_{\chi^2} = C^{-1}A_{\chi^2}C = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Знаходимо $A'_\chi = \sqrt{A'_{\chi^2}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тоді

$$A_\chi = CA'_\chi C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Знаходимо $A_\psi = A_\chi^{-1}A_\varphi = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Таким чином, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.