

3.4 Алгоритм застосування принципу максимуму

Алгоритм застосування принципу максимуму для задачі оптимального програмного керування складається з наступних етапів:

1. Скласти функцію Гамільтона

$$H(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \sum_{j=1}^n \psi_j f_j(t, \bar{x}, \bar{u}) - f_0(t, \bar{x}, \bar{u}). \quad (3.30)$$

2. З умови максимуму функції Гамільтона по всім допустимим керуванням знайти оптимальне програмне керування $\bar{u}^*(t)$.

3. Скласти систему канонічних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ \dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.31)$$

4. З умови трансверсальності (3.28) отримуємо відсутні крайові умови для рівнянь (3.31). При цьому варіації $\delta t_0, \delta t_1, \delta x_{j0}, \delta x_{j1}, j = 1, 2, \dots, n$, повинні задовольняти систему (3.29). Варіації δg та δh_j визначаються за формулами:

$$\delta g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_{i1}, \quad \delta g_0 = \frac{\partial g}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_{i0}, \quad (3.32)$$

$$\delta h_j = \frac{\partial h_j}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_{i0}} \delta x_{i0} + \frac{\partial h_j}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_{i1}} \delta x_{i1}. \quad (3.33)$$

5. Розв'язати отриману крайову задачу для системи канонічних рівнянь (3.31), визначити $\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t)$, за необхідності t_0^*, t_1^* .

Приклад 3.1. Задано модель об'єкта керування $\dot{x} = u(t), x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{2}$ з функціоналом якості $I = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min$. Знайти оптимальне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$, на яких досягається мінімум функціонала якості.

Розв'язання. Запишемо функцію Гамільтона. $f_0 = x^2 + u^2$, $f_1 = u$, $g_1 = g_0 = 0$. $H = \psi_1 f_1 - f_0 = \psi_1 u - x^2 - u^2$. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню u , якщо обмеження на керування відсутні.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - 2u = 0 \Rightarrow u^* = \frac{\psi_1}{2}.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$, то u^* надає максимум по керуванню функції Гамільтона. Запишемо систему канонічних рівнянь (3.31).

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1 = u, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\psi_1}{2}, \\ \dot{\psi}_1 = 2x. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її, звівши до одного рівняння. Диференціюючи перше з рівнянь системи по t , отримуємо:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \dot{\psi}_1 = x.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 1$. Розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = C_1 \text{cht} + C_2 \text{sht}$. З заданих крайових умов знаходимо:

$$x(0) = C_1 = 0, x(1) = C_2 \text{sh}1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2 \text{sh}1}.$$

Отже, $x = x^* = \frac{\text{sht}}{2 \text{sh}1}$, $u = u^* = \dot{x}^* = \frac{\text{cht}}{2 \text{sh}1}$. Оскільки поведінка об'єкта керування моделювалася лінійним диференціальним рівнянням, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимальності. Тому знайдені фазова траєкторія та керування є оптимальними.

$$\text{Відповідь: } x^* = \frac{\text{sht}}{2 \text{sh}1}, u^* = \frac{\text{cht}}{2 \text{sh}1}.$$

Приклад 3.2. Модель об'єкта керування має вигляд: $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(t_1) = t_1 - 1$, $I = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt + 4x(t_1) \rightarrow \min$. Знайти оптимальне керування та оптимальну фазову траєкторію.

Розв'язання. Оскільки функціонал якості містить інтегральний та термінальний члени, то маємо задачу Больца. Функція Гамільтона для задачі має вигляд:

$$H = \psi_1 f_1 - f_0 = \psi_1 u - \frac{u^2}{2}.$$

Знайдемо максимум цієї функції по керуванню u .

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - u = 0 \Rightarrow u^* = \psi_1, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1 < 0.$$

У точці $u^* = \psi_1$ досягається максимум. Канонічні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = u = \psi_1, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = C \\ \dot{x} = C \end{cases} \Rightarrow x(t) = Ct + A.$$

З крайової умови $x(0) = 1$ знаходимо:

$$x(0) = A = 1 \Rightarrow x(t) = Ct + 1.$$

Запишемо для даної задачі умову трансверсальності (3.28). Вона має наступний вигляд:

$$\delta g_1(t_1) - H(t_1) \delta t_1 + \psi_1 \delta x_1 = 0.$$

Тут функція Гамільтона $H(t_1) = \left(\psi_1 u - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_{t=t_1} = C^2 - \frac{C^2}{2} = \frac{C^2}{2}$. За формулою

(3.3) $\delta g_1(t_1) = 4\delta x_1$. Тоді умова трансверсальності набуває вигляду:

$$4\delta x_1 - \frac{C^2}{2} \delta t_1 + C\delta x_1 = 0 \Rightarrow (4 + C)\delta x_1 - \frac{C^2}{2} \delta t_1 = 0.$$

Зв'язок між величинами δx_1 та δt_1 знаходимо, використовуючи умови на рухомій межі $t = t_1$:

$$x_1 - t_1 + 1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 - \delta t_1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 = \delta t_1.$$

Отже, з умови трансверсальності отримуємо:

$$\left(4 + C - \frac{C^2}{2} \right) \delta t_1 = 0 \Rightarrow 4 + C - \frac{C^2}{2} = 0 \Rightarrow C^2 - 2C - 8 = 0.$$

Коренями останнього квадратного рівняння є значення $C_1 = -4$, $C_2 = -2$. Нехай $C = -2$. Тоді $x(t) = x^*(t) = 1 - 2t$, $u = u^* = -2$. Значення t_1^* знаходимо з умови перетину кривої $x(t_1) = t_1 - 1$, по якій рухається гранична точка, та фазової траєкторії у точці $t = t_1$:

$$t_1 - 1 = 1 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = \frac{2}{3}.$$

Розглянемо випадок, коли $C = 4$. Отримуємо:

$$x(t) = x^*(t_1) = 4t + 1, u(t) = u^*(t) = \dot{x}^* = 4,$$

$$t_1 - 1 = 4t_1 + 1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = -\frac{2}{3} < 0.$$

Оскільки $t_1 > 0$, то при $C = 4$ задача не має розв'язку.

Відповідь: $x^*(t) = 1 - 2t, u^* = -2, t \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

3.5 Оптимальне керування лінійними системами

Розглянемо об'єкт керування, модель якого подається у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t) \cdot \bar{x}(t) + B(t) \cdot \bar{u}(t), \quad (3.34)$$

де $\bar{x}^T = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $\bar{u}^T = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $A(t), B(t)$ – матриці, порядок яких відповідно дорівнює $n \times n$ та $m \times n$, їх елементи є неперервними на $[t_0, t_1]$ функціями, моменти t_0 та t_1 початку та завершення процесу керування відомі, обмеження на керування $\bar{u}(t)$ відсутні, права межа $\bar{x}(t_1)$ фазової траєкторії вільна. Початкова умова $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ задана та визначає початковий стан системи.

Функціонал якості є квадратичним:

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\bar{x}^T(t) S(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T Q(t) \bar{u}(t)) dt + \frac{1}{2} [\bar{x}^T(t_1) P \bar{x}(t_1)], \quad (3.35)$$

де S та P – невід'ємно визначені симетричні матриці порядку $n \times n$, $Q(t)$ – додатно визначена симетрична матриця порядку $m \times m$.

Потрібно знайти оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $\bar{x}^*(t)$, на яких функціонал (3.35) досягає мінімуму.

Порівнюючи сформульовану задачу з загальною постановкою задачі оптимального керування, маємо:

$$\bar{f} = A(t) \cdot \bar{x}(t) + B(t) \cdot \bar{u}(t), f_0 = \bar{x}^T(t) S(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T Q(t) \bar{u}(t),$$

$$g_1(\bar{x}(t_1)) = g(\bar{x}(t_1)) = \frac{1}{2}[\bar{x}^T(t_1)P\bar{x}(t_1)].$$

Застосуємо до сформульованої задачі оптимального керування лінійними системами (3.34), (3.35) принцип максимуму. При цьому використовуємо відомі формули матричного числення:

$$1) \frac{\partial(A\bar{x})}{\partial\bar{x}} = A^T; 2) \frac{\partial(\bar{x}^T A\bar{x})}{\partial\bar{x}} = A\bar{x} + A^T\bar{x}; 3) (AB)^T = B^T A^T.$$

Згідно з алгоритмом принципу максимуму виконуємо наступні кроки.

1. Складемо функцію Гамільтона:

$$H(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \bar{\psi}^T (A\bar{x} + B\bar{u}) - \frac{1}{2}(\bar{x}^T S\bar{x} + \bar{u}^T Q\bar{u}).$$

2. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню. Оскільки обмеження на керування відсутні, то застосуємо необхідну умову безумовного екстремуму:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = B^T \bar{\psi} - \frac{1}{2} Q \bar{u} - \frac{1}{2} Q^T \bar{u} = 0.$$

Враховуючи, що матриця Q є симетричною і $Q = Q^T$, з останньої рівності отримуємо:

$$B^T \bar{\psi} - Q \bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}^* = Q^{-1} B^T \bar{\psi}. \quad (3.36)$$

Знайдене керування забезпечує максимум функції Гамільтона по керуванню \bar{u} , оскільки $\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} = -Q$ – від'ємно визначена матриця (матриця Q визначена додатно).

3. Запишемо умову трансверсальності. Оскільки час t_1 заданий, а фазовий вектор $\bar{x}(t_1)$ є вільним, то $\delta t_1 = 0$, $\delta \bar{x}(t_1)$ може набувати довільних значень. Отримуємо:

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{x}^T P \bar{x}, \delta g = \left[\frac{\partial g}{\partial \bar{x}} \right]^T \delta \bar{x} = \bar{x}^T P \delta \bar{x}.$$

Умова трансверсальності набуває вигляду:

$$\left[\bar{x}^T P + \bar{\psi}^T \right] \Big|_{t=t_1} \cdot \delta \bar{x}(t_1) = 0.$$

Оскільки $\delta \bar{x}(t_1)$ є довільним і $(AB)^T = B^T A^T$, то отримуємо рівність:

$$\bar{\psi}(t_1) = -P\bar{x}(t_1). \quad (3.37)$$

4. Запишемо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u}, \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -A\bar{\psi} + S\bar{x}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Фазовий вектор \bar{x} повинен у початковий момент часу задовольняти умову:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \quad (3.39)$$

Отже, використовуючи принцип максимуму, отримали крайову задачу у вигляді системи (3.9) та крайових умов (3.37), (3.39).

Приклад 3.3 Записати крайову задачу для задачі оптимального керування лінійною системою:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_3 - u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + 3u_2, \end{cases} \quad \bar{x}(0) = (0, 1, 2),$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 (x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2) dt + \\ + 2x_1^2(2) + x_2^2(2) + 3x_3^2(2) + 2x_1(2)x_2(2) + 4x_1(2)x_3(2) \rightarrow \min.$$

Розв'язання. Запишемо матриці A, B, S, Q, P для рівнянь (3.37) – (3.39).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Підставивши ці матриці у канонічну систему рівнянь (3.38), отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{dt} \\ \frac{d\psi_2}{dt} \\ \frac{d\psi_3}{dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

При $t = 0$ маємо $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, 1, 2)$, умови трансверсальності на рухомій межі $t = 2$ мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(2) \\ \psi_2(2) \\ \psi_3(2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{pmatrix}.$$