4.1 Сутність методу дискретного динамічного програмування

Нехай маємо задачу вибору оптимального варіанту вирішення проблеми з деякої скінченної кількості можливих варіантів, тобто задачу дискретної оптимізації. Для розв'язання багатьох типів таких задач можна використати метод дискретного динамічного програмування.

Нехай процес оптимізації розбито на n кроків. На кожному кроці маємо дві змінні – змінну стану x та змінну керування u. Змінна x визначає, у якому стані може знаходитися об'єкт керування на k-му кроці процесу оптимізації. У залежності від значення x на цьому кроці можна вибрати деяке керування u_k. Внаслідок цього отримуємо результат $W_k\left(x, u_k\right)$. При цьому об'єкт керування переходить у новий стан $x'\left(x, u_k\right)$. Для кожного можливого стану об'єкта на k-му кроці серед усіх можливих керувань вибирається оптимальне керування u_k^*, таке, щоб результат, який досягається з k-го по n-й кроки, виявився оптимальним. Числову характеристику цього результату $B_k\left(x\right)$ називають **функцією Беллмана задачі дискретного динамічного програмування**. Вона залежить від номера кроку k та стану об'єкта x.

Перший етап розв'язання задачі дискретного динамічного програмування називають **умовною оптимізацією**. На цьому етапі визначають функцію Беллмана та оптимальне керування для всіх можливих станів об'єкта на кожному кроці, починаючи з останнього. На останньому, n-му кроці знаходять оптимальне керування u_n^* з умови $W_n\left(x, u_n\right) \to \max$ за всіма можливими значеннями u_n. Відповідне значення функції Беллмана

$$B_n = \max_{u_n}\left\{W_n\left(x, u_n\right)\right\}.$$

У залежності від умови задачі максимум замінюють на мінімум.

Рівнянням Беллмана задачі дискретного динамічного програмування називають рекурентне рівняння

$$B_k\left(x\right)=\max_{u_k}\left\{W_k\left(x,u_k\right)+B_{k+1}\left(x'\left(x,u_k\right)\right)\right\}. \qquad (4.1)$$

За необхідності максимум заміняють на мінімум.

Після знаходження функції Беллмана та відповідних оптимальних керувань для всіх кроків, з n-го по перший, переходять до другого етапу розв'язання задачі – **безумовної оптимізації**. На першому кроці безумовної оптимізації стан об'єкта є відомим – це його початковий стан x_0. Використавши його, знаходимо оптимальний результат $B_1\left(x_0\right)$ за всі n кроків та оптимальне керування u_1^* на першому кроці, що надає цей результат.

Після застосування оптимального керування u_1^* об'єкт переходить у новий стан $x'\left(x,u_1^*\right)$. Знаючи цей стан та використавши результати, отримані на етапі умовної оптимізації, можна знайти оптимальне керування u_2^*. Процес продовжується до n-го кроку.

4.2 Задача про оптимальне інвестування підприємств

Дискретне динамічне програмування широко застосовують при плануванні оптимального розподілу ресурсів. Так, однією з найважливіших практичних задач, що виникають у економічній діяльності, є задача про оптимальне інвестування підприємств. Розглянемо розв'язання цієї задачі методом дискретного динамічного програмування.

Нехай потрібно інвестувати кошти обсягом a грошових одиниць у n підприємств, прибуток від яких, у залежності від величини u інвестованих коштів наведено у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 Розподіл прибутку від підприємств у залежності від обсягів інвестованих у них коштів.

u	g_1	g_2	…	g_n
u_1	$g_1(u_1)$	$g_2(u_1)$	…	$g_n(u_1)$
u_2	$g_1(u_2)$	$g_2(u_2)$	…	$g_n(u_2)$
…	…	…	…	…
u_n	$g_1(u_n)$	$g_2(u_n)$	…	$g_n(u_2)$

Тут $g_i(u_j)$ – прибуток -го підприємства при інвестуванні у нього u_j грошових одиниць. Потрібно розподілити інвестиції таким чином, щоб загальний прибуток від діяльності всіх підприємств був максимальним.

Розіб'ємо процес оптимізації на n кроків. На k-му кроці оптимізуємо інвестиції з k-го по n-е підприємство, для чого є кошти $0 \le a \le x_k$, x_k – змінна стану. Змінна керування u_k – це обсяг коштів, що інвестуються у k-е підприємство. Функція Беллмана $B_k(x_k)$ – максимальний прибуток від інвестування підприємств з k-го по n-е суми x_k грошових одиниць (г. о.).

При інвестуванні у k-е підприємство u_k г. о. отримуємо прибуток $g_k(u_k)$. При цьому об'єкт керування до $(k+1)$-го кроку перейде у стан $x_{k+1} = x_k - u_k$, x_{k+1} г. о. залишається на інвестування з $(k+1)$-го по n-е підприємства.

На першому кроці умовної оптимізації $(k = n)$ значення функції Беллмана дорівнює прибутку лише з n-го підприємства, x_n – кошти, які можна використати для його інвестування. Щоб отримати максимум прибутку від цього підприємства, у нього потрібно інвестувати всі кошти, тобто $B_n(x_n) = g_n(x_n), u_n^* = x_n$.

На кожному з наступних кроків для обчислення функції Беллмана використаємо результати попереднього кроку. Нехай на k-му кроці для інвестування підприємств з k-го по n-е залишилось x_k г. о. Від інвестування у k-е підприємство u_k г. о. прибуток складе $g_k(u_k)$, на інвестування решти підприємств залишиться $x_{k+1} = x_k - u_k$ г. о. Максимальний прибуток, який можна отримати з k-го по n-е підприємства:

$$B_k(x_k) = \max_{u_k} \left\{ g_k(u_k) + B_{k+1}(x_k - u_k) \right\}.$$

Максимум досягається при $u_k = u_k^*$ – оптимальному керуванні на k-му кроці для стану x_k. Таким чином знаходять значення функції Беллмана та оптимальні керування до кроку $k=1$ включно. Функція Беллмана $B_1(a)$ дорівнює максимальному прибутку, який можна отримати з усіх n підприємств, u_1^* – оптимальний обсяг інвестицій у перше підприємство. Для всіх наступних кроків обчислюємо $x_k = x_{k-1} - u_{k-1}$, оптимальне керування u_k^* повинне надавати максимум прибутку для стану об'єкта x_k.

<u>Приклад 4.1.</u> Розподілити $a = 80$ г. о. по трьом підприємствам з метою отримання максимального загального прибутку. Обсяги прибутку при інвестуванні u г. о. наведені у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2. Залежність величини прибутку g_i г. о. від величини інвестицій u_j г. о.

u	g_1	g_2	g_3

0	0	0	0
20	34	21	33
40	47	23	40
60	67	34	50
80	70	90	80

Розв'язання. Перший етап розв'язання задачі – умовна оптимізація.

1) $k = n = 3$. $B_3(x_3) = g_3(x_3)$. Будуємо таблицю:

Таблиця 4.3. Перший крок умовної оптимізації, $k = 3$.

u_3 / x_3	0	20	40	60	80	$B_3(x_3)$	u_3^*
0	0	–	–	–		0	0
20	–	33	–	–	–	33	20
40	–	–	40	–	–	40	40
60	–	–	–	50	–	50	60
80	–	–	–	–	80	80	80

2) $k = 2$, $B_2(x_2) = \max\limits_{u_2 \le x_2}\left\{g_2(u_2) + B_3(x_2 - u_2)\right\}$.

Таблиця 4.4. Другий крок умовної оптимізації, $k = 2$.

u_2 / x_2	0	20	40	60	80	$B_2(x_2)$	u_2^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	21+0	–	–	–	33	0
40	0+40	21+33	23+0	–	–	54	20
60	0+50	21+40	23+33	34+0	–	61	20

80	0+80	21+50	23+40	34+33	80+0	90	80

3) $k=1,\ B_1(x_1)=\max\limits_{u_1\le x_1}\left\{g_1(u_1)+B_2(x_1-u_1)\right\}$.

Таблиця 4.5. Третій крок умовної оптимізації, $k=1$.

u_1 / x_1	0	20	40	60	80	$B_1(x_1)$	u_1^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	34+0	–	–	–	34	20
40	0+54	34+33	47+0	–	–	67	20
60	0+61	34+54	47+33	67+0	–	88	20
80	0+90	34+61	47+54	67+33	70+0	101	40

Другий етап розв'язання задачі – безумовна оптимізація.

1) $x_1=a=80,\ B_1(x_1)=101,\ u_1^*=40$.

2) $x_2=x_1-u_1^*=80-40=40,\ B_2(x_2)=54,\ u_2^*=20$.

3) $x_3=x_2-u_2^*=40-20=20,\ B_3(x_3)=33,\ u_3^*=20$.

Оптимальний план інвестування $(u_1^*,u_2^*,u_3^*)=(40,20,20)$. Максимальний прибуток при цьому складає $B_1(x_1)=B_1(80)=101$ г. о.

4.3 Задача про заміну обладнання

Планується експлуатація обладнання на протязі n років. Зі зносом обладнання його продуктивність зменшується і відповідно зменшується річний прибуток від його експлуатації $r(t)$, де t – вік обладнання.

На початку кожного року є можливість продати застаріле обладнання за ціну $s(t)$ та придбати нове обладнання за ціну p. Потрібно визначити оптимальний план заміни обладнання так, щоб загальний прибуток підприємства від його експлуатації за всі n років був максимальним, враховуючи, що до початку експлуатації вік обладнання становив t_0 років.

Вихідними даними до задачі є прибуток $r(t)$ від експлуатації обладнання протягом року, залишкова вартість обладнання $s(t)$, його вік t_0 до початку експлуатації та вартість p придбання нового обладнання.

На k-му кроці оптимізуємо план заміни обладнання з k-го по n-ий роки. Величина максимального прибутку залежить від графіка заміни обладнання та його віку. Вік обладнання t є змінною стану. Вона набуває значень $t = t_0, t_0+1, t_0+2, ..., t_0+n$. Змінною керування є логічна змінна, що приймає значення $u = u_1$ – зберегти обладнання або $u = u_2$ – замінити його.

Функція Беллмана $B_k(t)$ – це максимальний прибуток від експлуатації обладнання з k-го по n-ий рік, якщо до початку k-го року вік обладнання складав t років.

Застосувавши вибране керування, переводимо систему у новий стан: якщо на початку k-го року обладнання зберегти, то на початок $(k+1)$-го року змінна стану $t' = t+1$. Якщо вибрана заміна обладнання, то на початок $(k+1)$-го року $t' = 1$.

Для кожного варіанту керування прибуток визначають як суму двох величин – безпосереднього результату керування та його наслідків. Якщо на початку k-го року зберігаємо обладнання віком t років, то за k-й рік воно дасть прибуток $r(t)$. На початок $(k+1)$-го року його вік досягне $t+1$ років, а максимальний прибуток за решту років, з k-го по n-ий рік, складе $B_{k+1}(t+1)$.

Якщо на початку k-го року міняють обладнання, то спочатку продають старе обладнання віком t років за $s(t)$ г. о., купляють нове обладнання за p г.

о. Воно експлуатується на протязі k-го року з прибутком $r(0)$ г. о. На початок наступного року його вік складе 1 рік і з k-го по n-ий роки максимальний прибуток складе $B_{k+1}(1)$ г. о. З двох можливих варіантів керування вибираємо той, що максимізує прибуток і таким чином знаходимо функцію $B_k(t)$:

$$B_k(t) = \max \begin{cases} r(t) + B_{k+1}(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_{k+1}(1) - u = u_2. \end{cases}$$

На кожному кроці потрібно обчислити цю функцію для всіх $t_0 \le t \le t_0 + k - 1$. Керування, на якому досягається максимум прибутку, є оптимальним.

Функція Беллмана для першого кроку $(k = n)$ має вигляд:

$$B_n(t) = \max \begin{cases} r(t) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) - u = u_2. \end{cases}$$

Знаючи цю функцію, знаходимо $B_{n-1}(t), B_{n-2}(t), ..., B_1(t)$. $B_1(t_0)$ дорівнює максимальному прибутку з 1-го по n-й роки. Цей максимум досягається при деякому керуванні, застосувавши яке на 1-му році, ми визначаємо вік обладнання до початку 2-го року ($t = 1$ або $t = t_0 + 1$). Для цього віку обладнання за результатами, отриманими на етапі умовної оптимізації, вибираємо керування, при якому досягається максимум прибутку за період з 2-го по n-й роки і т. д. На етапі безумовної оптимізації визначають роки, на початку яких потрібно замінити обладнання.

Приклад 4.2. Визначити оптимальний термін заміни обладнання на протязі наступних 6 років, якщо річний прибуток $r(t)$ та залишкова вартість

$s(t)$ наведені у таблиці. Вартість нового обладнання 13 г. о. Вік обладнання на початок планового періоду $t_0 = 1$ рік.

Таблиця 4.6. Річний прибуток $r(t)$ від експлуатації обладнання та його залишкова вартість $s(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	12	11	11	10	8	6	3
$s(t)$	13	10	8	7	5	3	1

Розв'язання. Першим етапом розв'язання задачі є умовна оптимізація.

1) $k = n = 6$, $1 \le t \le 6$. $B_6(t) = \max\begin{cases} r(t) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_6(1) = \max\begin{cases} 11, \\ 10 - 13 + 12. \end{cases} = 11, u = u_1, \; B_6(2) = \max\begin{cases} 11, \\ 8 - 13 + 12. \end{cases} = 11, u = u_1,$$

$$B_6(3) = \max\begin{cases} 10, \\ 7 - 13 + 12. \end{cases} = 10, u = u_1, \; B_6(4) = \max\begin{cases} 8, \\ 5 - 13 + 12. \end{cases} = 8, u = u_1,$$

$$B_6(5) = \max\begin{cases} 6, \\ 3 - 13 + 12. \end{cases} = 6, u = u_1, \; B_6(6) = \max\begin{cases} 3, \\ 1 - 13 + 12. \end{cases} = 3, u = u_1.$$

2) $k = 5$, $1 \le t \le 5$, $B_5(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_6(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_6(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_5(1) = \max\begin{cases} 11 + 11 = 22, \\ 10 - 13 + 12 + 11 = 20. \end{cases} = 22, u = u_1,$$

$$B_5(2) = \max\begin{cases} 11 + 10 = 21, \\ 8 - 13 + 12 + 11 = 19. \end{cases} = 21, u = u_1,$$

$$B_5(3)=\max\begin{cases}10+8=18,\\7-13+12+11=17.\end{cases}=18,\ u=u_1,$$

$$B_5(4)=\max\begin{cases}6+6=12,\\5-13+12+11=15.\end{cases}=15,\ u=u_2,$$

$$B_5(5)=\max\begin{cases}6+3=9,\\3-13+12+11=13\end{cases}=13,\ u=u_2.$$

3) $k=4$, $1\le t\le 4$, $B_4(t)=\max\begin{cases}r(t)+B_5(t+1)-u=u_1,\\s(t)-p+r(0)+B_5(1)-u=u_2.\end{cases}$

$$B_4(1)=\max\begin{cases}11+21=32,\\10-13+12+22=31.\end{cases}=32,\ u=u_1,$$

$$B_4(2)=\max\begin{cases}11+18=29,\\8-13+12+22=29.\end{cases}=29,\ u=u_1,$$

$$B_4(3)=\max\begin{cases}10+15=25,\\7-13+12+22=28.\end{cases}=28,\ u=u_2,$$

$$B_4(4)=\max\begin{cases}8+13=21,\\5-13+12+22=26.\end{cases}=26,\ u=u_2.$$

4) $k=3$, $1\le t\le 3$, $B_3(t)=\max\begin{cases}r(t)+B_4(t+1)-u=u_1,\\s(t)-p+r(0)+B_4(1)-u=u_2.\end{cases}$

$$B_3(1)=\max\begin{cases}11+29=40,\\10-13+12+32=41.\end{cases}=41,\ u=u_2,$$

$$B_3(2)=\max\begin{cases}11+28=39,\\8-13+12+32=39.\end{cases}=39,\ u=u_1,$$

$$B_3(3)=\max\begin{cases}10+26=36,\\7-19+12+32=38.\end{cases}=38,\ u=u_2.$$

5) $k=2$, $1\le t\le 2$, $B_2(t)=\max\begin{cases}r(t)+B_3(t+1)-u=u_1,\\s(t)-p+r(0)+B_3(1)-u=u_2.\end{cases}$

$$B_2(1) = \max\begin{cases} 11 + 39 = 50, \\ 10 - 13 + 12 + 41 = 50. \end{cases} = 50, u = u_1,$$

$$B_2(2) = \max\begin{cases} 11 + 38 = 49, \\ 8 - 13 + 12 + 41 = 48. \end{cases} = 49, u = u_1.$$

6) $k = 1,\ t = 1,\ B_1(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_2(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_2(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_1(1) = \max\begin{cases} 11 + 49 = 60, \\ 10 - 13 + 12 + 50 = 59. \end{cases} = 60, u = u_2.$$

Другим етапом розв’язання задачі є безумовна оптимізація. Результати обчислень подамо у вигляді таблиці 4.7 (k – рік експлуатації, t – вік обладнання). Елементами таблиці є значення функції Беллмана $B_k(t)$.

Таблиця 4.7. Значення функції Беллмана $B_k(t)$.

t / k	1	2	3	4	5	6
1	60	–	–	–	–	–
2	50	49	–	–	–	–
3	41	39	38	–	–	–
4	32	29	28	26	–	–
5	22	21	18	15	13	–
6	11	11	10	8	6	3

Максимальний прибуток за 6 років експлуатації обладнання становить $B_1(1) = 60$ г. о. Він досягається, якщо на 1-му році не міняти обладнання. Тоді до початку 2-го року вік обладнання складе 2 роки. У цьому випадку максимальний прибуток з 2-го по 6-й роки досягається за умови збереження обладнання.

До початку 3-го року $t=3$, $B_3(3)=38$, $u=u_2$. Для отримання максимуму прибутку з 3-го по 6-й роки обладнання потрібно замінити. Далі $B_4(1)=32$, $u=u_1$; $B_5(2)=21$, $u=u_1$; $B_6(3)=10$, $u=u_1$. Отже, замінити обладнання потрібно на початку 3-го року його експлуатації.

Запитання та завдання для самоперевірки за темою 4

1. У чому полягає метод дискретного динамічного програмування?
2. Яку функцію називають функцією Беллмана у дискретному динамічному програмуванні?
3. У чому полягає етап умовної оптимізації у методі дискретного динамічного програмування?
4. Охарактеризуйте етап безумовної оптимізації у методі дискретного динамічного програмування.
5. Наведіть рівняння Беллмана для методу дискретного динамічного програмування.
6. Сформулюйте постановку задачі про оптимальне інвестування підприємств.
7. У чому полягає алгоритм методу дискретного динамічного програмування для розв'язання задачі про оптимальне інвестування підприємств?
8. Запишіть функцію Беллмана для задачі про оптимальне інвестування підприємств.
9. У чому полягає алгоритм методу дискретного динамічного програмування для розв'язання задачі про заміну обладнання?
10. Планується діяльність чотирьох промислових підприємств на черговий рік. Загальна сума інвестицій становить 5 умовних одиниць. Обсяги інвестицій у кожне підприємство кратні 1 умовній одиниці. Щорічний прибуток від інвестування k-го підприємства, який отримують у кінці року, становить $f_k(x)$, де x – обсяг інвестицій. Значення функцій $f_k(x)$ наведено у таблиці.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Величина прибутку $f_k(x)$ не залежить від інвестицій у інші підприємства. Загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від кожного з підприємств. Визначити обсяг інвестицій у кожне підприємство, щоб загальний прибуток від інвестування був максимальним.

11. Знайти оптимальний план заміни обладнання на термін 6 років, якщо річний прибуток від його експлуатації та остаточна вартість наведені у таблиці.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	9	8	7	5	3	3	2
$s(t)$	7	7	5	3	2	2	1

12. Термін експлуатації обладнання складає 5 років, після чого його реалізують за залишковою вартістю. На початку кожного року вирішується, зберегти обладнання чи замінити його новим. Вартість придбання нового обладнання складає $p_0 = 4000$ умовних грошових одиниць. Після t років експлуатації ($1 \le t \le 5$) обладнання можна продати за $g(t) = p_0 \cdot 2^{-t}$ умовних грошових одиниць. Витрати на експлуатацію обладнання на протязі року у залежності від його віку t дорівнюють $r(t) = 600(t+1)$ умовних грошових одиниць. Визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб загальні витрати на придбання та експлуатацію з врахуванням його продажу були мінімальними.

13. Розв’язати задачу 12, якщо вартість придбання нового обладнання залежить від року придбання (k): $p_k = 5000 + 500(k-1)$.

14. Використовуючи рекурентне співвідношення Р. Беллмана, розв’язати задачу про оптимальне завантаження контейнера. Маємо контейнер місткістю V куб. м., у який можна завантажити вантаж максимальною масою M т. У нього можна завантажити N типів виробів, для кожного з яких відомі вартість c_i, маса m_i та об’єм v_i. Потрібно розмістити у контейнері набір виробів максимальної вартості. Розв’язати задачу для наступних значень її параметрів: $M = 7$, $V = 7$, $N = 3$, $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 3$.