°

—

Г л а в а 8
СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

8.1. Означення та класифікація систем масового обслуговування

Системами масового обслуговування (СМО) називають системи, які складаються з будь-якої кількості каналів обслуговування, які призначені для обслуговування будь-якого потоку заявок, що надходять на систему у випадкові моменти часу.

Прикладами систем масового обслуговування можуть бути довідкові бюро, телефонні станції, станції технічного обслуговування, відділи магазинів, система станцій протиповітряної оборони та ін.

Як канали обслуговування при цьому виступають робочі місця, лінії зв’язку, радіолокаційні станції виявлення, канали супроводження повітряних цілей та канали наведення на них засобів ураження. Як потік заявок виступають потік заявок на надання довідок, потік абонентів, потік автомобілів, потік покупців, потік літаків, які проходять через зону дії протиповітряної оборони.

Обслуговування потоку заявок, які надходять на систему у випадковий момент часу, триває на протязі випадкового терміну часу. Випадковий характер потоку заявок і тривалості їх обслуговування за часом обумовлює те, що в системі масового обслуговування протікає випадковий процес.

Можуть виникнути випадки, коли в деякі проміжки часу на вході системи масового обслуговування накопичуються заявки, тоді вони або стають в чергу, або залишають систему масового обслуговування. Можуть виникнути випадки, коли в деякі проміжки часу система масового обслуговування може функціонувати недовантаженою або зовсім простоювати.

Системи масового обслуговування можуть буди *одноканальними або багатоканальними*.

Кожна система масового обслуговування в залежності від кількості каналів та їх продуктивності, а також від характеру потоку заявок має пропускну здатність, яка дозволяє їй справлятися з обслуговуванням потоку заявок.

Під ефективністю функціонування системи масового обслуговування розуміють відповідність бажаного результату її функціонування тому результату, який може виникнути. Як результат функціонування системи масового обслуговування може розглядатись кількість заявок, які система обслужила за деякий термін часу (за хвилину, за годину, за добу).

Під показником ефективності функціонування системи масового обслуговування розуміють чисельну міру відповідності результату функціонування, який склався, бажаному.

Як показники (характеристики) ефективності функціонування системи масового обслуговування в залежності від мети дослідження можуть виступати:

– закон розподілу випадкової величини кількості заявок, які може обслужити система масового обслуговування за прийнятий термін часу;

– математичне сподівання випадкової величини кількості заявок, які може обслужити система масового обслуговування за прийнятий термін часу;

– закон розподілу випадкової величини часу перебування заявки в черзі;

– закон розподілу випадкової величини кількості заявок, які перебувають в черзі;

– математичне сподівання випадкової величини часу перебування заявки в черзі;

– математичне сподівання випадкової величини кількості заявок в черзі та ін.

Теорія масового обслуговування становить розділ теорії ймовірностей, в якому розглядаються виявлення залежностей між параметрами потоку заявок, кількістю каналів, їх продуктивністю та ефективністю функціонування системи масового обслуговування.

Системи масового обслуговування класифікують на *системи масового обслуговування з відмовою* та *системи масового обслуговування з очікуванням*.

Для систем масового обслуговування з відмовою заявка, яка надійшла до системи в момент часу, коли всі канали зайняті, отримує відмову, вона залишає систему та в подальшому в обслуговуванні участі не бере. Для систем масового обслуговування з очікуванням заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли всі канали зайняті, становиться до черги та чекає доти, доки не звільниться один з каналів. Як тільки один з каналів звільниться, то заявка, яка стоїть в черзі, приймається на обслуговування.

Обслуговування для систем масового обслуговування з очікуванням може бути:

– *упорядкованим*, коли заявки обслуговуються по черзі;

– *невпорядкованим*, коли заявки обслуговуються у випадковому порядку;

– *з пріоритетом*, коли обслуговуванню окремих заявок віддається перевага (обслуговування окремих заявок забезпечується поза чергою).

Системи масового обслуговування з очікуванням розділяють на системи масового обслуговування *з обмеженим очікуванням* та на системи масового обслуговування *з необмеженим очікуванням*.

Для систем масового обслуговування з необмеженим очікуванням будь-яка заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли всі канали зайняті, ставиться до черги і необмежено за часом чекає звільнення будь-якого каналу, який прийме цю заявку до обслуговування. Це означає, що заявка, яка є в черзі, буде обслугована системою обов'язково.

Для систем масового обслуговування з обмеженим обслуговуванням на термін перебування заявки в черзі накладаються ті чи інші обмеження: за довжиною черги; за терміном часу очікування обслуговування; за кількістю заявок, які одночасно перебувають у черзі. При кожному з розглянутих обмежень заявка очікує обслуговування деякий час, а потім залишає систему.

У залежності від того, яка система масового обслуговування розглядається, для оцінки ефективності її функціонування використовують ті чи інші показники ефективності системи масового обслуговування.

Для системи масового обслуговування з відмовою використовують:

– *абсолютну пропускну здатність* (середню кількість заявок, які може обслужити система за одиницю часу);

– *відносну пропускну здатність* (відношення середньої кількості заявок, які може обслужити система за одиницю часу, до середньої кількості заявок, які надійшли за цей термін часу на систему для обслуговування);
– *середню кількість зайнятих каналів*;
– *середній відносний час простою системи* та ін.

Для систем масового обслуговування з необмеженим очікуванням показники абсолютної та відносної пропускної здатності системи не мають сенсу існування, оскільки кожна заявка буде обслужена. Для таких систем використовують інші показники, наприклад, середню кількість заявок, які перебувають в черзі.

8.2. Потік подій та його властивості. Найпростіший потік подій

У теорії ймовірностей послідовність подій, які йдуть одна за одною в деякі терміни часу, називають *потоком подій*.

Якщо події, які утворюють потік, відрізняються тільки моментами часу їх появи, то *потік подій називають однорідним*.

Якщо події йдуть одна за одною через однакові проміжки часу, то *потік подій називають регулярним*.

Потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що в деякий інтервал часу τ потрапляння тієї чи іншої кількості подій в потоці залежить тільки від довжини інтервалу часу τ і не залежить від того, де саме на часовій осі цей інтервал часу τ розглядається.

Це означення стаціонарності потоку відповідає умові, яка полягає в тому, що якщо потік є стаціонарним, то його ймовірнісні характеристики не залежать від вибору початку відліку часу. Так, для стаціонарного потоку характерна постійна щільність подій, тобто середня кількість подій (заявок) за одиницю часу.

При описі практичних задач потік заявок, який розглядається, є стаціонарним лише на деякому скінченному інтервалі часу. Роблять припущення щодо стаціонарності потоку на всьому часовому інтервалі протікання випадкового процесу.

Потік подій називається потоком без післядії, якщо для будь-яких двох інтервалів часу, які не перетинаються, ймовірність припадання деякої кількості подій на один з них не залежить від кількості подій, яка буде відповідати другому інтервалу часу.

Якщо потік подій є потоком без післядії, то заявки надходять на систему масового обслуговування незалежно одна від одної.

Примітка. У гл. 1 було дано означення: дві події, які можуть статися при проведенні досліду, називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, сталася чи ні друга подія. Означення потоку без післядії відповідає за змістом відомому означенню щодо незалежності випадкових подій.

Потік подій називається ординарним, якщо ймовірність потрапляння на елементарний часовий інтервал Δt двох чи більше подій непомірно мала в порівнянні з імовірністю потрапляння на цей елементарний інтервал Δt рівно однієї події. У цьому разі висловлюють думку про те, що якщо потік подій є ординарним, то заявки надходять на систему масового обслуговування по одній.

Якщо потік подій має всі три властивості, тобто якщо він є стаціонарним потоком без післядії та ординарним, то його називають найпростішим потоком подій або стаціонарним пуассонівським потоком.

Для найпростішого потоку подій випадкова величина X – кількість подій, які можуть належати деякому визначеному інтервалу часу, – розподілена за законом Пуассона, тобто ймовірність події, яка полягає в тому, що кількість подій (заявок) $X = K$, що належать інтервалу часу t, визначається таким співвідношенням:

$$P_K(t) = \frac{\Omega^K(t)}{K!} e^{-\Omega(t)}, \qquad (8.1)$$

де $\Omega(t)$ – математичне сподівання випадкової величини *X*.

Найпростіший потік подій має важливе значення при розгляді практичних задач, оскільки при складанні (накладанні) великої кількості ординарних, стаціонарних потоків практично з будь-якою післядією утворюється потік, який є достатньо близьким до найпростішого потоку. У багатьох випадках достатньо накласти чотири або п'ять потоків, і сумарний буде практично найпростішим потоком.

Якщо потік є потоком без післядії та ординарним, але не відповідає вимозі стаціонарності, то такий потік подій називають *нестаціонарним пуассонівським потоком*.

Для найпростішого потоку інтенсивність потоку $\lambda = \text{const}$, а для нестаціонарного пуассонівського потоку $\lambda = \lambda(t)$. Для часового інтервалу $(t_0, t_0 + t)$ в разі, коли потік є найпростішим, у виразі (8.1) маємо $\Omega(t) = \lambda t$, а якщо розглядається нестаціонарний пуассонівський потік, то

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt.$$

Потік подій схематично можна зобразити точками на часовій осі, що й подано на рис. 8.1.

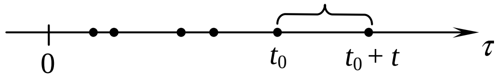

Рис. 8.1. Схематизація потоку подій

Розглянемо найпростіший потік подій, який характеризується інтенсивністю λ. Нехай T – випадкова величина часового інтервалу між сусідніми подіями в цьому потоці. З метою визначення закону розподілу випадкової величини T визначимо момент часу $t = t_0$ та відмітимо деяке її можливе значення t (рис. 8.1). Визначимо ймовірність події, яка полягає в тому що $T < t$. Для виконання цієї події необхідно, щоб на часовий інтервал t потрапляла хоча б одна подія потоку.

Для випадкової події, яка полягає в тому, що на часовий інтервал t потрапить хоча б одна подія потоку, протилежною подією є подія, яка полягає в тому, що на часовий інтервал t потрапить рівно нуль подій потоку, тобто цей часовий інтервал t є пустим.

Тоді

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P_{K=0} = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Якщо функція розподілу визначається виразом

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{8.2}$$

а функція щільності випадкової величини визначається виразом

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{8.3}$$

то (8.2) та (8.3) свідчать про те, що випадкова величина T – величина часового інтервалу між сусідніми подіями найпростішого потоку, підпорядкована експоненціальному закону розподілу.

Для нестаціонарного пуассонівського потоку закон розподілу випадкової величини T буде залежати від того, де на осі часу буде розташований момент часу t_0 (розташована перша подія), та від залежності $\lambda = \lambda(t)$. Тобто маємо

$$F_{t_0}(t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t)\, dt}; \tag{8.4}$$

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t)\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+t} \lambda(t)\,dt} . \qquad (8.5)$$

Співвідношення (8.2), (8.3) відповідають стаціонарному пуассонівському потоку подій, а (8.4), (8.5) відповідають нестаціонарному пуассонівському потоку. У першому та в другому випадках потоки мають властивість без післядії. За такої класифікації нестаціонарний пуассонівський потік слід розглядати як узагальнення найпростішого.

Другим узагальненням найпростішого потоку є нестаціонарний пуассонівський потік з обмеженою післядією.

8.3. Потоки Пальма. Потоки Ерланга

Якщо випадкові величини T_1, T_2, …, T_i,…, T_n, які відповідають проміжкам часу між послідовними подіями, що надходять до системи масового обслуговування, є незалежними та підпорядковані одному і тому ж закону розподілу, то потік подій називають *потоком Пальма*. Якщо всі випадкові величини $T_i, i = \overline{1,n}$ є незалежними та підпорядковані експоненціальному закону, то маємо окремий випадок потоку Пальма, а саме найпростіший потік.

Розглянемо приклад потоку Пальма. Деякий пристрій функціонує до першої відмови. Відмова пристрою настає внаслідок відмови його функціонального елемента. Як тільки відмова пристрою сталася, він моментально замінюється новим. Час працездатності i-го елемента T_i є випадковою величиною, яка підпорядкована деякому закону розподілу. Таким чином формується потік подій, які відповідають відмовам пристрою. За наявності однакових законів розподілу випадкових величин $T_i, i = \overline{1,n}$ будемо розглядати потік відмов, який є потоком Пальма. У разі, коли всі $T_i, i = \overline{1,n}$ підпорядковані експоненціальному закону, будемо мати потік відмов, який є найпростішим потоком.

Розглянемо потоки Ерланга. Потік Ерланга можна сформувати шляхом "просіювання" найпростішого потоку подій. Якщо в найпростішому потоці зберегти для розгляду тільки кожну третю подію, то тим саме буде сформовано потік подій, який називають потоком Ерланга третього порядку. Якщо в найпростішому потоці зберегти кожну k-ту подію, то буде сформовано потік подій Ерланга k-го порядку. Формування потоку Ерланга третього порядку наведене на рис. 8.2, де $t_1^{(3)}$, $t_2^{(3)}$, $t_3^{(3)}$, $t_4^{(3)}$ є можливими значеннями відповідних випадкових величин $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}$, $T_3^{(3)}$, $T_4^{(3)}$.

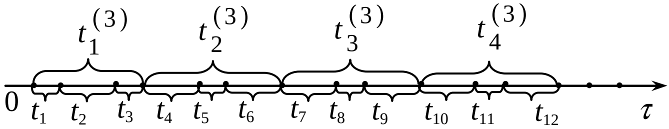

Рис. 8.2. Формування потоку Ерланга третього порядку

При такому розумінні потоку Ерланга k-го порядку можна стверджувати, що найпростіший потік є частковим випадком потоку Ерланга, тобто найпростіший потік є потоком Ерланга першого порядку.

Випадкова величина часового інтервалу між сусідніми випадковими подіями в потоці Ерланга k-го порядку визначається як

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} T_i \,, \tag{8.6}$$

де T_i – випадкова величина часового інтервалу між сусідніми подіями для найпростішого потоку.

Визначимо щільність ймовірностей випадкової величини $T^{(k)}$. Розглянемо найпростіший потік з інтенсивністю λ та інтервалами часу між сусідніми подіями T_1, $T_2, \ldots, T_k$.

На рис. 8.3 відзначені можливі значення $t_1, t_2, \ldots, t_k$ випадкових величин T_1, $T_2, \ldots, T_k$, а також можливе значення $t^{(k)}$ випадкової величини $T^{(k)}$ – часового інтервалу між сусідніми подіями в потоці Ерланга k-го порядку.

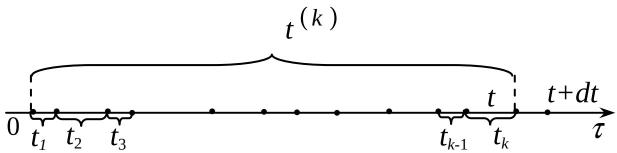

Рис. 8.3. Формування потоку Ерланга k-го порядку

Якщо $f_k(t)$ – щільність ймовірностей закону розподілу Ерланга k-го порядку, то $f_k(t)dt$ – значення ймовірності того, що випадкова величина $T^{(k)}$ прийме значення в інтервалі $(t, t+dt)$, тобто

$$P(\, t < T^{(k)} < t + dt \,) = f_k(t)\, dt. \tag{8.7}$$

Виходячи з означення потоку подій Ерланга *k*-го порядку, маємо, що *k*-та точка найпростішого потоку потрапляє на інтервал часу $(t,\ t + dt)$, а $(k - 1)$ точка потрапляє на інтервал $(0,\ t)$.

Розглянемо визначення ймовірності події, яка полягає в тому, що *k*-та точка найпростішого потоку потрапляє на часовий інтервал $(t,\ t + dt)$. Найпростіший потік має властивість ординарності, а це означає, що якщо P_1 – ймовірність події, яка полягає в тому, що на інтервал $(t,\ t + dt)$ в найпростішому потоці потрапить рівно одна заявка, а P_0 – ймовірність події, яка полягає в тому, що на інтервал $(t,\ t + dt)$ в найпростішому потоці потрапить рівно 0 заявок, то

$$P_1(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) = 1 - \frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda\Delta t} = 1 - e^{-\lambda\Delta t} = 1 - (1 - \lambda\Delta t) = \lambda\Delta t,$$

де для найпростішого потоку згідно із законом Пуассона

$$P_0(\Delta t) = \frac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda\Delta t},$$

та $e^{-\lambda\Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\Delta t)^n}{n!}$ – ряд Маклорена, в якому збережено перший та другий члени розвинення.

Імовірність того, що на часовий інтервал $(0,\ t)$ потрапить рівно $(k - 1)$ заявка, в найпростішому потоці визначається за законом Пуассона, а саме

$$P_{k-1}(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Тоді

$$P(t < T^{(k)} < t + dt) = P_1(\Delta t) P_{k-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda\Delta t,$$

а з урахуванням (8.7) щільність ймовірностей випадкової величини T^k – часового інтервалу між сусідніми подіями для потоку подій Ерланга *k*-го порядку визначається виразом вигляду

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \tag{8.8}$$

де λ – інтенсивність найпростішого потоку подій. Співвідношення прийнято називати законом розподілу Ерланга *k*-го порядку.

Розглянемо числові характеристики закону розподілу Ерланга k-го порядку.

Оскільки за означенням потоку Ерланга k-го порядку

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} T_i ,$$

де T_i – випадкова величина часового інтервалу між сусідніми подіями в найпростішому потоці, підпорядкована експоненціальному закону розподілу, для якої

$$M[T_i] = \frac{1}{\lambda}; \; D[T_i] = \frac{1}{\lambda^2},$$

то

$$M\left[T^{(k)}\right] = m_{t^{(k)}} = M\left[\sum_{i=1}^{k} T_i\right] = \sum_{i=1}^{k} M[T_i] = \frac{k}{\lambda};$$

$$D\left[T^{(k)}\right] = D\left[\sum_{i=1}^{k} T_i\right] = \sum_{i=1}^{k} D[T_i] = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Отже, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $T^{(k)}$ визначається з таких виразів:

$$\left.\begin{aligned} m_{t^{(k)}} &= \frac{k}{\lambda}; \\ \sigma_{t^{(k)}} &= \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \end{aligned}\right| \qquad (8.9)$$

Уведемо до розгляду інтенсивність потоку Ерланга k-го порядку Λ_k, яка також за означенням потоку Ерланга k-го порядку пов’язана з інтенсивністю найпростішого потоку відношенням

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k}. \qquad (8.10)$$

З урахуванням (8.10) вирази (8.8) та (8.9) будуть мати вигляд

$$f_k(t) = \frac{(k \cdot \Lambda_k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\Lambda_k t}; \qquad (8.11)$$

$$m_{t^{(k)}} = \frac{1}{\Lambda_k}; \qquad (8.12)$$

$$\sigma_{t(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k}. \tag{8.13}$$

Якщо для потоку Ерланга будь-якого порядку інтенсивність є незмінною, тобто $\Lambda_k = \Lambda = \text{const}$, то для потоку подій Ерланга будь-якого порядку маємо

$$m_t = \frac{1}{\Lambda}; \; \sigma_t = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda}, \tag{8.14}$$

що означає, що математичне сподівання випадкової величини $T^{(k)}$ – часового інтервалу між сусідніми подіями в потоці Ерланга будь-якого порядку є сталою величиною, а середнє квадратичне відхилення залежить від порядку потоку.

Із (8.14) видно, що якщо $k - \propto$, то $c_t - 0$, а це означає, що при необмеженому зростанні порядку потоку Ерланга часовий інтервал між сусідніми його подіями як випадкова величина необмежено наближається до сталої, тобто при необмеженому зростанні порядку потоку Ерланга потік Ерланга необмежено прямує до регулярного потоку.

Задача 8.1. При обробці статистичних даних щодо часових інтервалів між сусідніми подіями в деякому потоці встановлено, що статистична оцінка математичного сподівання випадкової величини часового інтервалу $T^{(k)}$ між сусідніми подіями m_t^* = 2 хв, а статистична оцінка середнього квадратичного відхилення випадкової величини $T^{(k)}$ є σ_t^* = 0,9 хв. Визначити потік подій Ерланга, що має числові характеристики, які збігаються з їх статистичними оцінками за результатами спостережень.

Розв'язання. Визначити потік подій Ерланга; це означає, що необхідно визначити закон розподілу (8.11), тобто необхідно визначити порядок потоку Ерланга k та інтенсивність потоку Λ_k. Згідно з умовою задачі виходимо з (8.12) та (8.13), тобто з того, що

$$\sigma_t^* = \sigma_{t(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k} = 0{,}9 \text{ хв};$$

$$m_t^* = m_{t(k)} = \frac{1}{\Lambda_k} = 2 \text{ хв}.$$

Тоді маємо

$$\Lambda_k = \frac{1}{m_t^*} = 0{,}5 \text{ подій/хв};$$

$$k=\left(\frac{1}{\sigma_t^* \Lambda_k}\right)^2=\left(\frac{1}{0,9\cdot 0,5}\right)^2=4,9\approx 5,$$

а з (8.11) маємо

$$f_5(t)=\frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-k\Lambda_k t}=\frac{(5\cdot 0,5)^5}{4!}t^4 e^{-5\cdot 0,5t}=4,1t^4 e^{-2,5t}.$$

Отже, потік Ерланга, який має приблизно такі самі числові характеристики, які визначені й за результатами спостережень, має порядок потоку k = 5, інтенсивність Λ_k = 0,5 подій/хв та закон розподілу у вигляді щільності ймовірностей $f_5(t)=4,1t^4 e^{-2,5t}$.

8.4. Марковські випадкові процеси

Розглянемо деяку фізичну систему S, стан якої змінюється за часом. Якщо стан системи S змінюється за часом випадковим чином, тобто не можливо наперед стверджувати, в якому стані буде функціонувати система, то слід говорити про те, що в системі протікає випадковий процес. Випадковий процес, який протікає в системі S, обумовлюється тим, що з одного стану в інший система переходить або неперервно з часом, або дискретно (стрибком) в деякі моменти часу, які визначаються чи появою нової заявки, чи зміною кількості зайнятих каналів обслуговування. Вважається, що множина станів системи S є скінченною. Випадковий процес у системі S також обумовлюється тим, що обслуговування заявки, яка надійшла на систему, проводиться на протязі інтервалу часу, який є випадковою величиною.

Нехай $\{S_i\}, i=\overline{1,n}$ – множина можливих функціональних станів системи S, а $P_i(t)$ – ймовірність події, яка полягає в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в S_i-му функціональному стані; тоді, оскільки події A_i, які полягають в тому, що система в момент часу t функціонує в S_i-му функціональному стані, складають повну групу подій, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t)=1, \qquad (8.15)$$

а сукупність $\{P_i(t)\}, i=\overline{1,n}$ у момент часу t характеризує (описує) випадковий процес, який протікає в системі.

Означення. *Якщо для кожного моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи S у майбутньому при $t > t_0$ залежить тільки від стану системи в теперішній час при $t = t_0$ та не залежить від того, коли й яким* *чином система прийшла в цей стан, тобто не залежить від того, як протікав процес у системі в попередні інтервали часу, то такий випадковий процес називається марковським випадковим процесом.*

У відповідності до цього означення марковські випадкові процеси ще називають процесами без післядії. При розв'язанні практичних задач маємо справу з процесами, які при деяких припущеннях можна вважати марковськими випадковими процесами.

Наведемо приклад марковського випадкового процесу. Відома гра, в якій фішка гравця, який прагне перемогти, повинна пройти деяку скінченну кількість пунктів $i=\overline{1,n}$. Перебування фішки в i-му пункті відповідає S_i-му функціональному стану системи. Перехід стану S_i в S_j, i, $j=\overline{1,n}$ відбувається у відповідності з кількістю очок, які випадають при підкиданні гравцем грального кубика, що й забезпечує випадковість зміни станів системи. При цьому з будь-якого стану S_i, який фіксується фішкою гравця, система переходить з імовірностями P_{ij} до стану S_j незалежно від того, коли і яким чином фішка гравця (незалежно від попередніх кроків гравця) фіксувала стан S_i.

При розгляді фізичної системи S з дискретними станами користуються геометричною схемою, в якій відзначають можливі функціональні стани системи та можливі переходи зі стану до стану. Таку схематизацію функціонування системи називають *графом станів*.

Розглянемо пристрій, який складається з двох вузлів, кожний із яких може відмовити. При своєму функціонуванні пристрій як система S може перебувати в таких станах: S_1 – обидва вузли є працездатними; S_2 – перший вузол працездатний, а другий відмовив; S_3 – перший вузол відмовив, а другий є працездатним; S_4 – обидва вузли відмовили. Граф станів, який геометрично схематизує функціонування пристрою, поданий на рис. 8.4. На рисунку

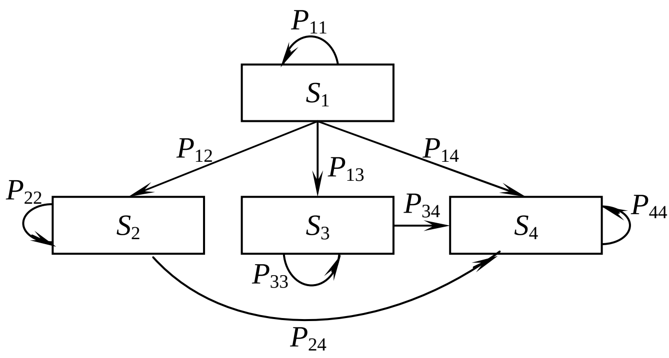

Рис. 8.4. Граф станів функціонування пристрою

відзначені можливі переходи з одного функціонального стану в інший за рахунок випадкового потоку подій, а подія відповідає відмові вузла.

Якщо на графі станів відзначені ймовірності можливих переходів зі стану до стану, то кажуть, що складено *розмічений граф станів функціонування системи S*.

Граф станів функціонування пристрою, зображений на рис. 8.4, показує таке: якщо пристрій як система в деякий момент часу функціонує в стані S_1, то в подальшому під дією потоку відмов ця система може перейти при своєму функціонуванні до станів S_2 , S_3 , S_4 у відповідності до значень ймовірностей переходу P_{12}, P_{13}, P_{14} або залишитись функціонувати в стані S_1 з ймовірністю P_{11}; якщо в деякий момент часу пристрій функціонує в стані S_2, то в подальшому він може з ймовірністю P_{24} перейти функціонувати до стану S_4 або залишитись функціонувати в стані S_2 з ймовірністю P_{22}; якщо в деякий момент часу пристрій функціонує в стані S_3, то в подальшому він може з імовірністю P_{34} перейти функціонувати до стану S_4 або залишитись функціонувати в стані S_3 з ймовірністю P_{33}; якщо в деякий момент часу пристрій функціонує в стані S_4, то в подальшому він може залишитись функціонувати в цьому стані з ймовірністю P_{44}.

Якщо перехід системи зі стану до стану проходить у фіксовані моменти часу, то випадковий процес називають *випадковим процесом з дискретними станами та дискретним часом*.

Якщо перехід системи зі стану до стану проходить в будь-який випадковий момент часу, то випадковий процес називають *випадковим процесом з дискретними станами та неперервним часом.*

8.5. Марковські випадкові процеси з дискретними станами та дискретним часом

Розглядається система *S*, яка може функціонувати в одному з *n* функціональних станів. Нехай $S_i^{(k)}$ є випадковою подією, яка полягає в тому, що після *k* кроків (переходів з одного стану в інший) система *S* буде функціонувати в S_i-му стані. Тоді випадкові події $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$, …, $S_n^{(k)}$ складають повну групу подій, а випадковий процес, який відбувається в системі, подається такою послідовністю подій:

$$S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_1^{(3)}, S_3^{(4)}, \dots .$$

Послідовність подій, яка описує випадковий процес, називається *марковським ланцюгом*, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S_i в будь-який інший стан S_j не залежить від того, коли і яким чином система потрапила в S_i-й функціональний стан. Імовірність переходу $P_{ij}^{(k)}$ називають *перехідними ймовірностями марковського ланцюга*.

Номер кроку k визначається моментом часу, в який на систему надходить наступна заявка або звільняється канал системи, який був зайнятий обслуговуванням заявки. Якщо ймовірність переходу не залежить від номера кроку, то марковський ланцюг називається *однорідним*, у противному разі – *неоднорідним*.

Імовірності переходу P_{ij} для однорідних марковских ланцюгів складають *матриці перехідних ймовірностей*, де P_{ij} – імовірність переходу системи S за один крок із стану S_i в стан S_j; P_{ii} – імовірність події, яка полягає в тому, що після k кроків система S залишається функціонувати в S_i-му стані; ці ймовірності мають такий вигляд:

$$Q = \left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3} & \dots & P_{mj} & \dots & P_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (8.16)$$

Якщо в (8.16) $P_{k\ell} = 0$, то за один крок система S не може перейти із S_i-го стану в S_l -й стан. Зі змісту матриці перехідних імовірностей (8.16) видно, що

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1, \forall i = \overline{1,m}; \\ &P_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} P_{ij}, \ i = \overline{1,m}. \end{aligned} \right| \qquad (8.17)$$

Відзначимо, що матриця перехідних імовірностей (8.16) з урахуванням (8.17) однозначно описує однорідний марковський процес з дискретними станами та дискретним часом. Перший рядок (8.16) містить ймовірності розташування системи після першого кроку.

Неоднорідний марковський процес однозначно описується послідовністю матриць перехідних імовірностей $Q^{(k)} = \left\| P_{ij}^{(k)} \right\|$, $k = 1, 2, 3 \ldots$. Для матриці $Q^{(k)} = \left\| P_{ij}^{(k)} \right\|$ елементом матриці $P_{ij}^{(k)}$ є ймовірність переходу системи із S_i -го в S_j -й стан на *k*-му кроці.

Оскільки на *k*-му кроці система *S* може функціонувати в одному зі S_i $, i = \overline{1, n}$ функціональних станів, то вектор $\{P_i(k)\}_n$ є вектором імовірностей подій, які полягають в тому, що на *k*-му кроці система буде функціонувати в S_i -му, $i = \overline{1, n}$ стані.

Розглянемо співвідношення, які дозволяють визначити ймовірність функціонування системи *S* в S_i -му, $i = \overline{1, n}$ функціональному стані, на прикладі розв'язання такої задачі.

Задача 8.2. Функціонування системи *S* відповідає однорідному марковському ланцюгу. Розмічений граф станів системи *S* подано на рис. 8.5.

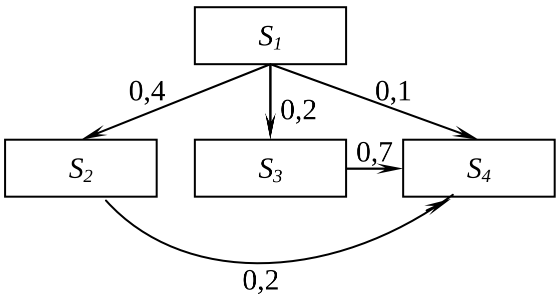

Рис. 8.5. Розмічений граф станів системи

Визначити ймовірності функціонування системи в можливих функціональних станах на другому й третьому кроці.

Розв'язання. Розмічений граф станів дозволяє записати матрицю перехідних імовірностей, яка має вигляд

$$Q = \left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де у відповідності до (8.17) відзначено, що

$$P_{11}=1-(P_{12}+P_{13}+P_{14})=1-(0,4+0,2+0,1)=0,3;$$

$$P_{22}=1-(P_{21}+P_{23}+P_{24})=1-(0+0,4+0,2)=0,4;$$

$$P_{33}=1-(P_{31}+P_{32}+P_{34})=1-(0+0+0,7)=0,3;$$

$$P_{44}=1-(P_{41}+P_{42}+P_{43})=1-(0+0+0)=1.$$

Імовірності функціонування системи після першого кроку (на першому кроці) визначаються першим рядком матриці Q.

Імовірності функціонування системи в можливому функціональному стані S_i, $i=\overline{1,n}$ на k-му кроці, де k = 2, 3, … визначаються виразом

$$P_i(k)=\sum_{j=1}^{n} P_j(k-1)P_{ij}, \tag{8.18}$$

де $P_j(k-1)$ – імовірність функціонування системи в можливому функціональному стані S_j, $j=\overline{1,n}$ на (k – 1)-му кроці.

Співвідношення (8.18) відповідає однорідному марковському ланцюгу. Для неоднорідного марковського ланцюга будемо мати вираз

$$P_i(k)=\sum_{j=1}^{n} P_j(k-1)P_{ij}^{(k)}, \tag{8.19}$$

де $P_{ij}^{(k)}$ – перехідна ймовірність системи S зі стану S_i у стан S_j на k-му кроці.

У відповідності до умов задачі з (8.18) маємо таке:

$$P_1(k=2)=P_1(k=1)P_{11}=0,3\cdot 0,3=0,09;$$

$$P_2(k=2)=P_1(k=1)P_{12}+P_2(k=1)P_{22}=0,3\cdot 0,4+0,4\cdot 0,4=0,28;$$

$$P_3(k=2)=P_1(k=1)P_{13}+P_2(k=1)P_{23}+P_3(k=1)P_{33}=$$
$$=0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,4+0,2\cdot 0,3=0,28;$$

$$P_4(k=2)=P_1(k=1)P_{14}+P_2(k=1)P_{24}+P_3(k=1)P_{34}+$$
$$+P_4(k=1)P_{44}=0,3\cdot 0,1+0,4\cdot 0,2+0,2\cdot 0,7+0,1\cdot 1,0=0,35.$$

Таким чином, на другому кроці система може функціонувати в можливих функціональних станах у відповідності з вектором імовірностей

$$\{P_i\ (k=2)\}_{n=4} = \{0,09; 0,28; 0,28; 0,35\}.$$

Примітка. На початку цього підрозділу відзначалося, що випадкові події $S_i^{(k)}$, які полягають в тому, що на k-му кроці система буде функціонувати в S_i-му функціональному стані, складають повну групу подій.

При визначенні ймовірностей функціонування системи в можливому функціональному стані на другому кроці отримуємо

$$\sum_{i=1}^{4} P\left(S_i^{(k=2)}\right) = \sum_{i=1}^{4} P_i\ (k=2) = 0,09 + 0,28 + 0,28 + 0,35 = 1,0.$$

Введемо означення: $P(k)$ – матриця-стовпець ймовірностей $P_i\ (k)$, $i = \overline{1,n}$; $P(k-1)$ – матриця стовпець ймовірностей $P_j(k-1)$, $j = \overline{1,n}$; $Q^{(k)}$ – матриця перехідних імовірностей на k-му кроці. Тоді співвідношення (8.18) та (8.19) зручно подавати в матричній формі запису, а саме:

$$\left.\begin{aligned} P(k) &= Q^T P(k-1); \\ P(k) &= \left(Q^{(k)}\right)^T P(k-1). \end{aligned}\right| \qquad (8.20)$$

З (8.20) визначимо, що і запропоновано в умові задачі 8.2, імовірності функціонування системи в можливих функціональних станах на третьому кроці.

Маємо

$$P(k=3) = Q^T P(k=2) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,09 \\ 0,28 \\ 0,28 \\ 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,027 \\ 0,148 \\ 0,214 \\ 0,611 \end{pmatrix}.$$

З результатів розв’язання задачі можуть бути зроблені такі висновки. Малоймовірно сподіватися, що система S на третьому кроці буде функціонувати у функціональному стані S_1, оскільки $P_1(k = 3) = 0,027$. Найбільшу ймовірність, що дорівнює $P_4(k = 3) = 0,611$, буде мати подія, яка полягає в тому, що на третьому кроці (після третього кроку) система S буде функціонувати у функціональному стані S_4.

8.6. Марковські випадкові процеси з дискретними станами та неперервним часом

Якщо перехід системи зі стану S_i, $i = \overline{1,n}$ до стану S_j, $j = \overline{1,n}$ відбувається у випадкові моменту часу, то має місце марковський випадковий процес з дискретними станами та неперервним часом. Зміну станів, яка відбувається в системі, називають *марковським неперервним ланцюгом*.

Розглянемо визначення ймовірностей подій, які полягають в тому, що система буде функціонувати в S_i, $i = \overline{1,n}$ функціональному стані.

Нехай $\{S_i\}$, $i = \overline{1,n}$ – дискретні стани, а $P_i(t)$ – імовірність події, яка полягає в тому, що в момент t система буде функціонувати в стані S_i. Звичайно, для будь-якого t

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1,$$

оскільки в будь-який момент часу t події, які полягають в тому, що система буде функціонувати в стані S_i, $i = \overline{1,n}$, складають повну групу подій.

Якщо $P_{ij}(\Delta t)$ – імовірність події, яка полягає в тому, що за елементарний інтервал часу Δt система переходить зі стану S_i до стану S_j, то *щільність ймовірностей переходу системи із стану S_i до стану S_j* визначається як

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t - 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \tag{8.21}$$

Звідси з точністю до нескінченно малих вищих порядків маємо

$$P_{ij}(\Delta t) \cong \lambda_{ij} \Delta t.$$

Якщо λ_{ij} не залежить від t, тобто від того, в який момент часу починається елементарний проміжок часу t, то марковський процес з дискретними станами та неперервним часом називається *однорідним*, якщо $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$ – то *неоднорідним*.

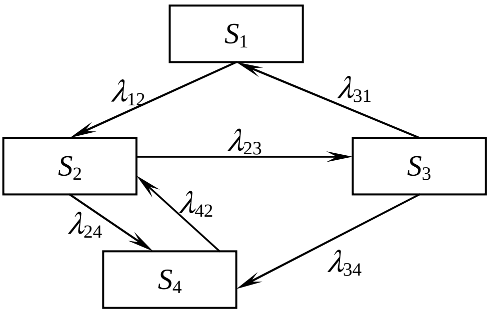

Рис. 8.6. Розмічений граф станів марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом

Граф станів, в якому відзначені щільності ймовірностей переходу зі станів S_i, $i=\overline{1,n}$ до станів S_j, $j=\overline{1,n}$ називають *розміченим графом станів* марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом (рис. 8.6).

Для марковського процесу з дискретними станами та неперервним часом, розмічений граф станів якого наведений на рис. 8.6, розглянемо визначення $P_1(t)$ – імовірність того, що система в момент часу t функціонує в S_1-му функціональному стані. Надамо t приріст Δt та визначимо ймовірність події, яка полягає в тому, що в момент часу $t+\Delta t$ система буде функціонувати в S_1-му стані. Розглянемо у відповідності до рис. 8.6 таку випадкову подію та гіпотези:

- A – подія, яка полягає в тому, що в момент часу $t+\Delta t$ система буде функціонувати в стані S_1;
- H_1 – гіпотеза, яка полягає в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в стані S_1;
- H_2 – гіпотеза, яка полягає в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в стані S_3.

Тоді

$A = AH_1 + AH_3;$

$$P(A)=P_1(t+\Delta t)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$=P_1(t)(1-\lambda_{12}\Delta t)+P_3(t)\lambda_{31}\Delta t;$$

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)-\lambda_{12}P_1(t)\Delta t+P_3(t)\lambda_{31}\Delta t;$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t);$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t). \qquad (8.22)$$

Для визначення диференціальних рівнянь, які пов'язують $P_2(t)$, $P_3(t)$ та $P_4(t)$ з іншими $P_i(t), i=\overline{1,4}$ та відомими $\lambda_{ij}, i, j=\overline{1,4}$, слід поступати аналогічно, тобто для визначення $P_2(t)$ необхідно ввести до розгляду випадкову подію B, яка полягає в тому, що в момент часу $t+\Delta t$ система буде функціонувати в S_2 -му функціональному стані, та гіпотези H_1, H_2, H_3, які відповідно полягають в тому, що в момент часу t система буде функціонувати в станах S_2, S_1 та S_4.

Тобто для визначення $P_i(t), i=\overline{1,4}$, що відповідає розміченому графу станів, який поданий на рис. 8.6, слід розглянути таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{31}P_3(t); \\[2ex] \dfrac{dP_2(t)}{dt}=-(\lambda_{23}+\lambda_{24})P_2(t)+\lambda_{12}P_1(t)+\lambda_{42}P_4(t); \\[2ex] \dfrac{dP_3(t)}{dt}=-(\lambda_{31}+\lambda_{34})P_3(t)+\lambda_{23}P_2(t); \\[2ex] \dfrac{dP_4(t)}{dt}=-\lambda_{42}P_4(t)+\lambda_{24}P_2(t)+\lambda_{34}P_3(t). \end{cases} \qquad (8.23)$$

Відзначимо, що з (8.23) видно таке. Для будь-якої системи S, процес функціонування якої відповідає марковському процесу з дискретними станами та неперервним часом, система диференціальних рівнянь за наявності розміченого графу станів може бути складена, виходячи з формальних міркувань, а саме: праві частини запису рівнянь для $dP_i(t)$, які відповідають переходу системи зі стану S_i до будь-якого іншого, мають доданки зі знаком "мінус", а ті, які відповідають переходу системи з будь-якого стану $S_j, j=\overline{1,4}; j \neq i$ до стану S_i, мають доданки зі знаком "плюс".

Таким чином, функціонування системи S з дискретними станами та неперервним часом у будь-який момент часу t описується системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{1j} P_1(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{j1} P_j(t); \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{2j} P_2(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{j2} P_j(t); \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{ij} P_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{ji} P_j(t); \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{nj} P_n(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_{jn} P_j(t), \end{cases} \qquad (8.24)$$

де видно, що всіх станів, в яких може функціонувати система, є n; з кожного S_i-го стану система при своєму функціонуванні може перейти в $S_j, j=\overline{1,k}$ різних станів; у стан S_i система при функціонуванні може перейти з S_j, $j=\overline{1,m}$ станів.

Система диференціальних рівнянь (8.24) називається *системою диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова.*

Розв'язання (8.24) за початкових умов

$$P_1(t=0)=1, P_i(t=0)=0, i=\overline{2,n}$$

дає ймовірність станів $P_i(t), i=\overline{1,n}$.

8.7. Одноканальна система масового обслуговування з відмовою

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування з відмовою.

На систему надходить найпростіший (стаціонарний пуассонівський) потік з інтенсивністю λ. Заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли канал зайнятий, отримує відмову та покидає систему. Обслуговування заявки триває на протязі часу T, який є випадковою величиною, підпорядкованою експоненціальному закону розподілу. Потік подій, які відповідають обслуговуванню заявки, також є найпростішим та має інтенсивність μ. Визначимо ефективність функціонування одноканальної системи масового обслуговування з відмовою за показниками абсолютної пропускної здатності та відносної пропускної здатності.

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1$$

Рис. 8.7. Розмічений граф станів одноканальної системи масового обслуговування з відмовою

Для одноканальної системи масового обслуговування з відмовою можливі два функціональні стани: S_0 – канал вільний; S_1 – канал зайнятий. Розмічений граф станів поданий на рис. 8.7.

На рис. 8.7 відзначено, що система із функціонального стану S_0 може перейти у функціональний стан S_1 та цей перехід обумовлює найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ. Із стану S_1 система може перейти в стан S_0, і цей перехід обумовлює найпростіший потік обслуговування з інтенсивністю μ.

Система диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова, яка описує процес функціонування одноканальної системи масового обслуговування з відмовою, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t). \end{cases} \tag{8.25}$$

Оскільки $P_0(t) + P_1(t) = 1$, то (8.25) перетвориться до рівняння вигляду

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu(1 - P_0(t));$$

або

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_0(t) + \mu, \tag{8.26}$$

тобто замість системи двох диференціальних рівнянь (8.25) достатньо розглянути диференціальне рівняння (8.26). Розглянемо розв’язання (8.26) за початкових умов $P_0(t = 0) = 1$; $P_1(t = 0) = 0$. Це означає, що в початковий момент часу $t = 0$ канал є вільним, тобто подія, яка полягає в тому, що в момент часу $t = 0$, система функціонує (перебуває) у функціональному стані S_0 є достовірною.

Загальним розв'язанням (8.26) є

$$P_0(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + c\right), \tag{8.27}$$

а частковим розв'язанням (8.26) з урахуванням зазначених вище початкових умов є

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \tag{8.28}$$

тоді $$P_1(t) = 1 - P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right). \tag{8.29}$$

На рис. 8.8 подане графічне зображення залежної від часу $P_0(t)$ за (8.28) та $P_1(t)$ за (8.29).

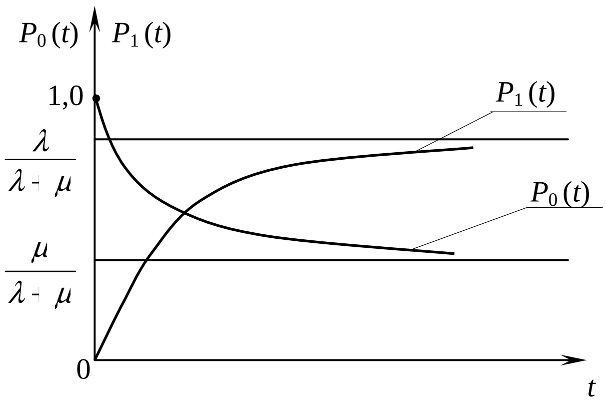

Рис. 8.8. Залежність від часу ймовірностей функціонування системи в станах S_0 та S_1

З рис. 8.8 та із співвідношень (8.28) та (8.29) видно, що при достатньо великих t процес, який відбувається в системі масового обслуговування з відмовою, необмежено наближається до *сталого процесу,* для якого

$$P_0(t) = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu};$$

$$P_1(t) = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \tag{8.30}$$

тобто ймовірності подій, які полягають в тому, що система масового обслуговування з відмовою буде функціонувати в станах S_0 та S_1, є сталими та визначаються характеристиками (інтенсивностями) потоків заявок й обслуговування.

Відносна пропускна здатність є відношенням середньої кількості заявок, обслужених за одиницю часу, до середньої кількості заявок, які надходять на систему за той же інтервал часу. Для моменту часу t імовірність того, що канал є незайнятим, тобто заявка, яка надійде на систему в момент часу t, буде прийнята до обслуговування, визначається

$$q = P_0(t), \tag{8.31}$$

а якщо процес функціонування системи є сталим, то

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{8.32}$$

Абсолютна пропускна здатність одноканальної системи масового обслуговування визначається виразом

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Поняття відмови одноканальної системи масового обслуговування з відмовою пов'язане з таким: заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли канал зайнятий, отримує відмову. Відмова системи відповідає її функціонуванню у функціональному стані S_1. Тому ймовірність відмови системи визначається з (8.28), а в разі сталого процесу, який протікає в системі, маємо

$$P_{\text{відм.}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{8.33}$$

8.8. Багатоканальна система масового обслуговування з відмовою

Можливі стани функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою визначаються кількістю каналів, з яких вона складається. Визначимо функціональні стани за кількістю зайнятих каналів, тоді будемо мати таке:

S_0 – усі канали вільні;

S_1 – один канал зайнятий, а $(n – 1)$ каналів вільні ;

S_2 – два канали зайняті, а $(n – 2)$ каналів вільні;

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

S_k – k каналів зайняті, а $(n – k)$ каналів вільні;

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

S_n – усі n каналів зайняті.

Розмічений граф станів функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою наведений на рис. 8.9.

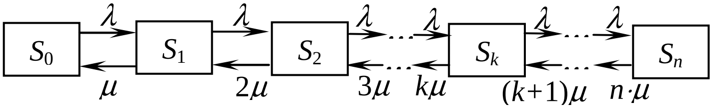

Рис. 8.9. Розмічений граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою

На рис. 8.9 відзначено, що система, якщо вона функціонує у функціональному стані S_k $, k=\overline{0, n-1}$, під впливом найпростішого потоку заявок з інтенсивністю λ перейде в S_{k+1}-й, $k=\overline{0, n-1}$ стан. Якщо система функціонує в S_1-му функціональному стані, то вона під впливом найпростішого потоку обслуговування з інтенсивністю μ перейде в S_0-й функціональний стан. Якщо система функціонує в S_k-му функціональному стані, то під впливом найпростішого потоку з інтенсивністю $k\mu$ вона перейде в S_{k-1} -й функціональний стан.

Система диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова для визначення ймовірностей подій, які полягають в тому, що система S буде функціонувати в S_i $, i=\overline{1, n}$ станах, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t); \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda+k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t); \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \end{cases} \tag{8.34}$$

Розв’язання (8.34) розглядається за початкових умов $P_0(t = 0) = 1$, $P_k(t = 0) = 0$, $k=\overline{1, n}$.

Для постановки та розв’язання практичних задач, коли розглядається їх моделювання у вигляді багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою, особливе значення мають моделі, в яких процес, що протікає в системі, розглядається сталим. Більш того, можна довести, що для будь-якої системи масового обслуговування з відмовою граничний режим її функціонування, який складається, є сталим, тобто справедливо, що

$$\lim_{t-\propto} P_k(t) = P_k, \quad k = \overline{1,n}.$$

Із (8.34) видно, що для умови сталого процесу, який протікає в багатоканальної системі масового обслуговування, будемо мати

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = 0, k = \overline{0,n}.$$

Система диференціальних рівнянь перетворюється в систему звичайних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda P_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu] P_{n-1} + n\mu P_n = 0; \\ \lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0. \end{cases} \tag{8.35}$$

Для отримання розв'язку (8.35) з першого рівняння визначимо P_1 через P_0, а з другого рівняння визначимо P_2 через P_0 і так далі. Тоді маємо

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0;$$

$$\lambda P_0 - (\lambda + \mu)\frac{\lambda}{\mu} P_0 + 2\mu P_2 = 0;$$

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0;$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{3!\,\mu^3} P_0;$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} P_0,$$

якщо $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, то

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 .$$

Раніше відзначалося, що події, які полягають в тому, що система буде функціонувати в одному із S_i $, i = \overline{1,n}$ станів, складають повну групу подій, тобто ці події є несумісними та одна із них в досліді відбудеться обов'язково. А це означає, що

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} P_0 = 1;$$

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}; \\ P_k &= \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}. \end{aligned}\right| \qquad (8.36)$$

Формула (8.36) дозволяє визначити ймовірність подій, які полягають в тому, що система буде функціонувати в S_k $, k = \overline{0,n}$ функціональних станах. Важливо відзначити, що для визначення P_k $, k = \overline{0,n}$ необхідно знати інтенсивності найпростіших потоків заявок та їх обслуговування. Співвідношення (8.36) називають *формулою Ерланга,* а систему рівнянь (8.35) називають *системою рівнянь Ерланга*.

Заявка, яка надійде на систему в момент часу, коли будуть зайняті всі канали, отримає відмову. Тому ймовірністю відмови багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою є

$$P_{\text{відм}} = P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}. \tag{8.37}$$

Примітка. Якщо в (8.37) прийняти $n = 1$, то будемо мати відомий вираз для ймовірності відмови одноканальної системи масового обслуговування з відмовою, а саме:

$$P_{\text{відм}} = \frac{\frac{\rho^1}{1!}}{\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!}} = \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Якщо як показник ефективності функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою розглядати відносну пропускну здатність, то

$$q = \sum_{k=0}^{n-1} P_k = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - P_n = 1 - \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}. \tag{8.38}$$

Задача 8.3. Станція наведення винищувача на повітряну ціль має 3 канали. Кожний канал одночасно може наводити один винищувач на одну ціль. Середній час наведення винищувача на ціль дорівнює 2 хв. Потік повітряних цілей є найпростішим та має інтенсивність потоку $\lambda = 1{,}5$ літака за хвилину. Станцію наведення можна розглядати як триканальну систему масового обслуговування з відмовою, оскільки ціль, наведення по якій не почалось в момент часу, коли вона вийшла в зону відповідальності станції наведення, залишається необслуженою (неатакованою). Визначити ймовірність функціонування станції наведення в можливих станах (режимах), відносну пропускну здатність станції наведення та середню частку цілей, які проходять через зону відповідальності станції необстріляними.

Розв'язання. Середній час наведення винищувача на ціль відповідає математичному сподіванню випадкової величини $T_{\text{обсл}}$ – часу обслуговування, яка для найпростішого потоку підпорядкована експоненціальному потоку розподілу. Тоді задано, що $M\,[T_{\text{обсл}}] = m_{t\text{обсл}} = 2$ хв. За умовою задачі станція наведення є триканальною системою масового обслуговування з відмовою, тоді розмічений граф станів відповідає рис. 8.10.

Подані на рис. 8.10 функціональні стани мають такий зміст:

S_0 – усі три канали незайняті;

S_1 – один канал зайнятий та два канали незайняті;

S_2 – два канали зайняті та один канал незайнятий;

S_3 – зайняті три канали.

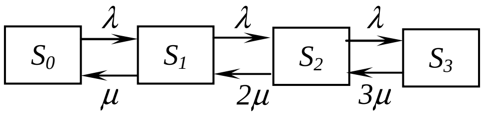

Рис. 8.10. Розмічений граф станів станції наведення як трьохканальної системи масового обслуговування

Оскільки інтервал часу неперервного функціонування станції наведення є непорівнянно великим по відношенню до інтервалу часу, на протязі якого станція обслуговує повітряну ціль (здійснює на неї наведення), то випадковий процес, який протікає в триканальній системі масового обслуговування з відмовою, слід вважати сталим процесом. Тому користуємося визначеною вище формулою Ерланга.

Маємо

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}5}{\frac{1}{2}} = 3, \ \mu = \frac{1}{m_{t_{\text{обсл}}}} = \frac{1}{2};$$

$$P_0 = \frac{\frac{\rho^0}{0!}}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\frac{3^0}{0!}}{\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}} = \frac{1}{13} = 0{,}077;$$

$$P_1 = \frac{\frac{3^1}{1!}}{13} = \frac{3}{13} = 0{,}231;$$

$$P_2 = \frac{\frac{3^2}{2!}}{13} = \frac{4{,}5}{13} = 0{,}346;$$

$$P_3 = \frac{\frac{3^3}{3!}}{13} = \frac{4{,}5}{13} = 0{,}346.$$

Відносну пропускну здатність визначимо з (8.38).

Маємо

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - P_3 = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Середня частка цілей, які проходять через зону відповідальності станції наведення необстріляними, визначається як

$$P_{\text{відм}} = P_3 = 0{,}346.$$

8.9. Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування, на яку надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ; потік обслуговування є найпростішим з інтенсивністю μ. Заявка, яка надійшла на систему в момент часу, коли канал був зайнятим, становиться в чергу, яка має m місць, та чекає обслуговування.

Розмічений граф станів одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням поданий на рис. 8.11.

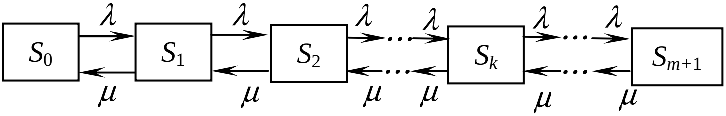

Рис. 8.11. Розмічений граф станів одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням

Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням, що відзначено на рис. 8.11, може функціонувати в таких станах:

S_0 – канал вільний;
S_1 – канал зайнятий, черги немає;
S_2 – канал зайнятий, в черзі одна заявка;
… … … … … … … … … … … … … …
S_k – канал зайнятий, в черзі (k–1) заявка;
… … … … … … … … … … … … … …
S_{m+1} – канал зайнятий, в черзі m заявок.

Час очікування в черзі $T_{\text{очік}}$ є випадковою величиною, підпорядкована експоненціальному закону розподілу, тобто щільність ймовірності розподілу має вигляд

$$h(t_{\text{очік}}) = \nu e^{-\nu t_{\text{очік}}},$$

де $\nu = \dfrac{1}{m_{t_{\text{очік}}}}$.

Система рівнянь Ерланга, яка описує сталий процес функціонування одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням, має вигляд

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0; \\ -(\lambda+\mu)P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2 = 0; \\ -(\lambda+\mu)P_2 + \lambda P_1 + \mu P_3 = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -(\lambda+\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -\mu P_{m+1} + \lambda P_m = 0. \end{cases} \tag{8.39}$$

З (8.39) маємо

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \;; \\ P_2 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \;; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \;; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{m+1} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} P_0 \;. \end{aligned} \right| \tag{8.40}$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{m+1} P_k = 1,$$

то

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = 1.$$

Отже,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k} = \frac{1}{\frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \tag{8.41}$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ та $\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k$ – сума геометричної прогресії.

Тоді остаточно маємо

$$\left.\begin{aligned} &P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}};\\ &P_1 = \rho P_0;\\ &P_2 = \rho^2 P_0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &P_k = \rho^k P_0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &P_{m+1} = \rho^{m+1} P_0. \end{aligned}\right| \tag{8.42}$$

Примітка. Інтенсивність потоків заявок та обслуговування може збігатися, тоді, як видно із того, що

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k} = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1}} = \frac{1}{m+2},$$

імовірності функціонування системи в можливих станах збігаються, тобто $P_0 = P_k = \dfrac{1}{m+2}, k = \overline{1, m+1}$, та визначаються кількістю місць в черзі m.

Як видно з (8.42), імовірність відмови одноканальної системи масового обслуговування з очікуванням визначається зі співвідношення

$$P_{\text{відм}} = P_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, \tag{8.43}$$

відносна пропускна здатність та абсолютна пропускна здатність системи відповідно визначаються як

$$\left.\begin{aligned} &q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}.\\ &A = \lambda q \end{aligned}\right| \tag{8.44}$$

Визначимо математичне сподівання кількості заявок в черзі як математичне сподівання дискретної випадкової величини *R*, яка може приймати свої можливі значення 1, 2, 3, …, *m*. Маємо

$$M[R]=1\cdot P_2+2P_3+3P_4+\ldots+mP_{m+1}=$$
$$=1\cdot\rho^2P_0+2\rho^3P_0+3\rho^4P_0+\ldots+m\rho^{m+1}P_0=$$
$$=\rho^2P_0(1+2\rho+3\rho^3P_0+\ldots+m\rho^{m-1})=$$
$$=\rho^2P_0(\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^m)^1_\rho=\rho^2P_0\left(\frac{\rho-\rho^{m+1}}{1-\rho}\right)^1_\rho=$$
$$=\rho^2P_0\frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

З урахуванням виразу для P_0 з (8.42) маємо

$$M[R]=\frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}. \tag{8.45}$$

Математичне сподівання кількості заявок, що пов’язані з системою, тобто, як тих, що перебувають в черзі, так і тих, що обслуговуються, визначимо з таких міркувань. Нехай K – випадкова величина кількості заявок, які пов’язані з системою; R – випадкова величина кількості заявок, які перебувають в черзі; Ω – випадкова величина кількості заявок, які перебувають на обслуговуванні.

Тоді

$$K=R+\Omega \text{ та } M[K]=M[R]+M[\Omega].$$

Оскільки розглядається одноканальна система масового обслуговування з чергою, то випадкова величина Ω може приймати два можливі значення – 0 та 1, а також

$$P(\Omega=0)=P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}};$$

$$P(\Omega=1)=1-P_0=\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Тоді

$$M[\Omega]=0\cdot P_0+1(1-P_0)=\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}},$$

а з урахуванням (8.45) маємо

$$M[K]=M[R]+M[\Omega]=\frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}+\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}. \quad (8.46)$$

Математичне сподівання часу очікування обслуговування для заявки, яка перебуває в черзі, визначається з виразу

$$M[T_{\text{очік}}]=\frac{M[R]}{\lambda}, \quad (8.47)$$

тобто середній час очікування визначається середньою кількістю заявок у черзі та інтенсивністю найпростішого потоку заявок.

Математичне сподівання часу перебування заявки в системі визначається з виразу

$$M[T_{\text{сист}}]=\frac{M[R]}{\lambda}+\frac{q}{\mu}, \quad (8.48)$$

де $\dfrac{q}{\mu}$ – середній час обслуговування заявок.

Наприкінці відзначимо, що при моделюванні процесу функціонування систем масового обслуговування важливим є випадок, коли заявки, які надходять на систему в разі зайнятості каналу обслуговування, складають необмежену чергу. Якщо $m \to \infty$, то кількість можливих функціональних станів системи є необмеженою. Якщо $\rho \geq 1$, то граничного сталого режиму для системи не існує, а черга зростає необмежено.

Якщо $\rho < 1$, то існує граничний сталий режим функціонування системи, для якого маємо таке:

$$\left.\begin{aligned}
&P_k=\rho^k(1-\rho), k=0,1,2,\ \ldots;\\
&M[R]=\frac{\rho^2}{1-\rho};\\
&M[K]=\frac{\rho}{1-\rho};\\
&M[T_{\text{очік}}]=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)};\\
&M[T_{\text{сист}}]=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}.
\end{aligned}\right| \quad (8.49)$$

Запитання та завдання для самостійної перевірки знань

1. Які ознаки визначають систему масового обслуговування?
2. Які властивості має найпростіший потік подій?
3. Чи можна розглядати найпростіший потік подій окремим випадком потоку Ерланга?
4. Чи визначається зміна станів функціонування марковського випадкового процесу з дискретними станами та дискретним часом?
5. Виходячи з розміченого графу станів функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовою, записати відповідну їй систему диференціальних рівнянь О. М. Колмогорова?
6. Які ознаки функціонування технічних систем визначають випадковий процес, що при цьому розглядається, як сталий?
7. Які визначаються показники ефективності функціонування системи масового обслуговування з очікуванням?