1. Виробничі функції

1.1 Основні поняття та допущення при моделюванні виробничої діяльності. Виробнича функція.

Розглянемо основні поняття та допущення, що використовуються при моделюванні *виробничої діяльності*, тобто діяльності з виробництва товарів. У ході операційної діяльності створюють нові товари та послуги, що мають додану вартість та беруть участь у наступних процесах обміну та споживання. Виробництво товарів пов'язане з одночасним споживанням інших товарів – сировини, праці та капіталу. Отже, процес виробництва пов'язаний з процесом споживання, а розвиток виробничих процесів значною мірою визначається поведінкою споживачів.

Розглянемо основні економічні поняття, які будемо використовувати надалі при моделюванні виробничих процесів. Всі види економічних продуктах, що є результатах діяльностей виробничих економічних систем, узагальнено товаром. Всі товари мають властивості корисливості та рідкості, що створюють можливими процесами економічного обміну ними. Тому всі вироблені товари участують у операціях обміну та споживаються іншими виробничими системами або кінцевими споживачами. Виробничий процес – це процес створення доданої вартості шляхом цілеспрямованого одного набору товару у інших наборів товарів. Економічна система, у якій організовано і здійснений виробничий процес, називаємо виробничою системою або виробництвом. Розміру виробничих систем можуть зміняться у дуже широких межах – від домашнього господарства до світової економіки, у залежності від масштабів досліджуваних економічних проблем. Будь-яка економічна система є одним цілих і є суб'єктів господарювання.

Будь-яка виробнича система використовує працю людей, у тому числі і для управління цієї системою. Виробнича система одночасно виробляє і споживає різноманітні товари. Тому вона у процесі обміну одночасно виступає у двох протилежних ролях – як покупець сировини, праці та капіталу так і як продавець виробленого продукту (товару). Товари, що споживаючи у процесі виробництва, називають факторами виробництва або ресурсами. Дії виробничих систем визначають попит на ринках ресурсів, та пропозиції на ринках вироблених ними товарами.

Дослідження економічних процесів у сучасному великомасштабному виробництві вимагає отримання великих обсягів статистичної інформації для побудови математичних моделей, що описують взаємозв'язок між витратами та обсягом виробництва – моделями типу «витрати – результати», оскільки такі моделі повинні враховувати внутрішню структуру витрат на підприємстві. Отримання достатньо статистичних даних про всі внутрішні виробничі витрати є достатньо складною задачею. Значно простіше отримати дані про укрупнені показники, такі як вартість виробленого товару, вартість основних фондів підприємства, кількість виробничого персоналу, фонд оплати праці тощо. Аналізуючи ці показники і розглядаючи підприємство як «чорний ящик», тобто досліджуючи взаємозв'язок між величиною затрачених ресурсів та величину виробленого продукту, можна зробити певної висновки.

Вперше функціональний взаємозв'язок між обсягом виробництва та величиною витрачених ресурсів була побудована та використана у 1928 р. у статті американських вчених економіста Поля Дугласа та математика Чарльза Кобба «Теорія виробництва». У цьому дослідженні зроблена спроба визначити вплив величини витраченого капіталу та праці на величину виготовленої продукції у обробній промисловості США. Для цього були використані статистичні дані за 1899-1922 рр. і поставлені наступні завдання.

1) Визначити вигляд функції, що найбільше точно відображають кількісні співвідношення між трьома характеристиками виробничого процесу – обсягом виробництва, витратами капіталу та витратами праці.
2) Знайти значення коефіцієнтів функції цього виду.
3) Перевірити достовірність побудови функції, порівнюючи значення з фактичними даними.

Ч. Коббом запропонована функція виду $Q = AK^{\propto}L^{\beta}$, де Q – обсяг виробленої продукції, K – величина основного капіталу, L – витрати праці, A, α, β – коефіцієнти, що задовольняють умови A>0, α, β – невід'ємні, причому $\alpha + \beta = 1$. Коефіцієнт A використовують для переводу одиниці виміру праці і капіталу о одиниці виміру виробленої продукції, коефіцієнти α, β відображають внесок праці та капітал у виробництво продукції. Значення цих коефіцієнтів знаходять з використанням методу найменших квадратів (МНК), згідно з яким вони визначаються з умови:

$$\sum_{t=1899}^{1922}(lnQ_t - lnA - \alpha lnK_t - \beta lnL_t)^2.$$

У результаті отримані наступні значення коефіцієнтів A = 1,01; $\alpha = 0{,}25$; $\beta = 0{,}75$, тобто отримали виробничу функцію $Q = 1{,}01K^{0,25}L^{0,75}$.

Виробничою функцією (ВФ) виробничого процесу називають відображення $Q: D \rightarrow U$, що моделює виробництво продукцію у цьому процесі. Область визначення D виробничої функції – це множина виробничих ресурсів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у вартісному чи у натуральному вигляді. Множина значень U включає множину кількісних оцінок результатів виробництва, наприклад, річний обсяг виробництва за кожною позицією асортименту продукції підприємства або відповідні вартісні показники $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$.

Найбільшими вивченими виробничими функціями при $m = 1$, тобто розглядає одна кількісна оцінка результату виробництва, тобто у цьому випадку ВФ-функція – це звичайна функція кількох змінних. Отже, ВФ-функція встановлює залежність між кількостями витрачених виробничих ресурсів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, та обсягом Q виробленої продукції, тобто вона має вигляд $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут значенням обсягу виробленої продукції вважається максимально можливим при даних витратах виробничих ресурсів, тобто витрати ресурсів не для забезпечення виробництва продукції відсутні.

ВФ-функція, що моделює реальний виробничий процес, має наступні властивості:

1. При збільшення обсяг витрат одного з ресурсів та сталому обсягу витрат інших ресурсів обсяг виробництва продукції зростає, тобто виконується нерівність $\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0, i = 1,2, \ldots, n$.

Ця властивість випливає з гіпотези про раціональний вибір ресурсу виробництва – ресурси, що не збільшують обсяги виробництва, не застосовують у виробничому процесі.

2. При сталих обсягів витрат всіх ресурсів, крім одного виду, послідовне збільшення цього ресурсу, послідовне збільшення цього ресурсу, забезпечує постійне зменшення приросту виробленої продукції, тобто

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial {x_i}^2} < 0, i = 1,2, \ldots, n.$$

Ця властивість обумовлена необхідністю збалансованості витрат у конкретному технологічному процесу: збільшення витрат одного виду ресурсів без відповідного збільшення витрат інших ресурсів не забезпечує застосовану виробничу технологію повноцінним потоком ресурсів, тобто додатковий ефект від збільшення витрат ресурсів зменшується.

Залежність величини обсягу виробництва від величини витрат одного ресурсу при фіксованих витратах інших ресурсів, називають *кривою випуску*. Перша умова означає, що дотична до кривої випуску при всіх можливих значень витрат ресурсу має додатний нахил:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = tg\alpha > 0.$$

Друга умова, яку можна записати у вигляді $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right) < 0$. Це свідчить, що приріст продукції у розрахунку на додаткові витрати одиниці ресурсу зменшуються при зростанні витрату ресурсу.

1.2 Економіко-математичні параметри виробничої функції

Основні характеристики ВФ-функції розглянемо для функції виду $Q = Q(K, L)$. Розглянемо середні величини, пов'язані з ВФ. Вони значною мірою характеризують ефективність використання у виробничому процесі підприємства. *Середня продуктивність праці* – це відношення виробленої продуктивність за певний проміжок часу до кількості витраченої праці:

$$AQ_L = \frac{Q}{L}.$$

Середня фондовіддача – це відношення обсягу виробленої продукції до вартості основних виробничих фондів:

$$AQ_K = \frac{Q}{K}$$

Для ВФ Кобба-Дугласа середня продуктивність праці

$$AQ_L = \frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1},$$

середня фондовіддача

$$AQ_K = \frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta}.$$

Оскільки $\beta < 1$, то середня продуктивність праці є спадною функції аргументу L, тобто зі збільшення витрати праці середня продуктивність праці зменшується. Оскільки при цьому величина другого ресурсу K залишається незмінною, то залучена додаткова робоча сила не забезпечується додатковими засобами виробництва. Фондоозброєність $\frac{K}{L}$ при цьому зменшується . Аналогічно середня фондовіддача є спадна функція аргументу К, оскільки зі зростанням цього аргументу, тобто зі збільшенням вартості основних фондів, тобто при залученням додатковим виробничих фондів, не підкріпленням збільшенням відповідної кількості працюючих, або збільшенням виплат на оплати праці.

Граничні величини продукції, тобто *граничні продукти* характеризують ефект у вигляді обсягу продукції, якого отримують зі збільшення витрат ресурсів. *Гранична продуктивність праці* характеризує величину додаткового ефекту від кожної додатково витраченої праці при даної комбінації ресурсів (R,L):

$$MQ_L = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Виходячи з означення ВФ при збільшенні витрат праці, гранична продуктивність праці зменшується. Для ВФ Кобба-Дугласа гранична продуктивність праці дорівнює

$$MQ_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta\frac{Q}{L},$$

Тобто гранична продуктивність пропорційна середній продуктивність і завжди менша за неї, оскільки $\beta < 1$.

Гранична фондовіддача визначається аналогічно:

$$MQ_K = \frac{\partial Q}{\partial K}.$$

Розглянемо коефіцієнти еластичності, що використовують для аналізу ВФ. Це безрозмірні коефіцієнти, що характеризують процент приросту обсягу продукції, що виробляється. При збільшення витрат ресурсу на 1%. *Коефіцієнт еластичності продукції по фондам* визначається за формулою

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\cdot\frac{K}{Q}.$$

Оскільки при незмінному обсязі затрат праці відносному збільшенню обсязі основним фондам на $\frac{\Delta К}{К}$ відповідає відносне збільшення виробництва продукції на $\frac{\Delta Q}{Q}$, то відносний приросту випуску продукції складе $\frac{\partial Q/_Q}{\partial L/_L}$, перейшовши тут до границі при $\Delta К \to 0$, отримаємо вираз для еластичності продукції по фондам.

Еластичність продукції по праці визначається за формулою:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q}.$$

Для ВФ Кобба-Дугласа її параметри α, β є коефіцієнтами еластичності і не залежать від величини факторів K, L, а саме $E_K = \alpha, E_L = \beta$. Тому для цієї ВФ коефіцієнти α, β є сталими і не залежать від K,L.

1.3. Додаткові властивості виробничої функції

Крім умов, включених у означення виробничих функцій, на вигляд функції, звичайно накладають додаткові обмеження.

Властивість однорідності полягає у тому, що при збільшенні витрат всіх ресурсів в однакову кількість разів w обсяг виробленої продукції зростає у кратну w кількість разів:

$$Q(wK, wL) = w^r Q(K, L)$$

для довільного w>1. Показник степеню r називають *степеню однорідності функції* Q, він характеризує ефект розширення масштабу виробництва: якщо виконується $r > 1$, то збільшення всіх ресурсів у w разів приводить до зростання обсягу виробництва більше, ніж у w разів, тобто ефект масштабу є додатний. Якщо $r < 1$, то приріст факторів у w разів забезпечує менше ніж w-кратне зростання обсягу виробництва, тобто ефект масштабу від'ємний.

Часто на практиці спостерігаються лінійно-однорідні виробничі функції. для яких $r = 1$, тобто $Q(wK, wL) = w \ \ Q(K, L)$. У цьому випадку ефекту збільшення масштаби виробництва не спостерігаються.

Властивість необхідності всіх ресурсів полягає у тому, що при відсутності хоча б одного ресурсу виробництва продукції відсутнє, тобто

$Q(0, L) = Q(K, 0) = 0.$

Властивість обмеженого зростання означає полягає у тому, що при зростання величини ресурсу від 0 до деякого скінченного значення відбувається стрімке зростання обсягу виробництва, який з подальшим зростання ресурсу поступово зменшується до нуля, тобто математично можна записати: $\lim\limits_{x\to\infty} Q(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial Q}{\partial x} = \infty$. Ця умова виражає неефективність резервування ресурсів.

Розглянемо властивість еластичності ресурсів. Лінійно-однорідні ВФ можна подати у вигляді:

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Q}{\partial L} L. \tag{1.1}$$

Економічно можна пояснити наступним чином. Нехай власник підприємства інвестує капітал у виробництво до тих пір, доти додатковий дохід $\frac{\partial Q}{\partial K}$ не досягне прийнятої у даній економічній системи норми прибутку, а величина добутку норми прибутку $\frac{\partial Q}{\partial K}$ на вкладений капітал К – це доход власника підприємства. Аналогічно, наймаючи робітників, він збільшує їх чисельність доти, дока додатковий дохід $\frac{\partial Q}{\partial L}$, що приносить новий робітник, не досягне величини його заробітної плати, тобто величина $\frac{\partial Q}{\partial L}L$ це доход працівників, загальна численність дорівнює L.

Для теорії виробництва рівняння (1.1) означає, що обсяг виробленої продукції складається з частин, вироблених за рахунок використання кожного ресурсу окремо. Поділивши обидві частини рівності (1.1) на Q, отримаємо:

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} + \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = E_K + E_L, \tag{1.2}$$

тобто для лінійно однорідної функції коефіцієнти еластичності лежать у межах від 0 до 1, якщо хоча б один з них більший нуля. Для однорідної функції $E_K + E_L = r$, тобто сума коефіцієнтів еластичності дорівнює степені однорідності функції. Отже, отримана важлива властивість ВФ Кобба-Дугласа: сума її коефіцієнтів еластичності дорівнює показнику ефекту розширення масштабу: $E_K + E_L$=*r*.

1.4 Ефекти розширення масштабу виробництва та заміщення ресурсів

Вище було показано, що ефект розширення масштаба виробництва визначається множником w^r, для однорідної функції при $r > 1$ ефект масштабу позитивний, при $r < 1$ він є негативним.

Середню числову характеристику ефекту масштабу можна визначити аналогічно коефіцієнтам еластичності обсягу виробництва за виробничим факторам:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q(wx)},$$

а, перейшовши до границь, отримаємо виразу для коефіцієнта еластичності виробництва:

$$E_w = \lim_{w \to 1} \frac{\partial Q(wx)}{\partial w} \cdot \frac{w}{Q(wx)}. \tag{1.3}$$

Еластичність виробництва характеризує приросту продукції при деяких значеннях витрат ресурсів (локальний ефект масштабу), оскільки зміни структури ресурсів вважається нескінченно малим ($w \to 1$). Диференціюючи вираз $Q(wx) = Q(wx_{1,}wx_2, \dots, wx_n)$, як складену функцію змінної w, отримаємо:

$$\frac{\partial Q(wx)}{\partial w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} x_i. \tag{1.4}$$

Підставивши (1.4) у (1.3), отримуємо:

$$E_w = \lim_{w \to 1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q(wx)}{\partial (wx_i)} \right) x_i \right] \frac{w}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{Q} = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}.$$

Таким чином, коефіцієнт еластичності виробництва дорівнює сумі коефіцієнтів еластичності обсягу виробництва за ресурсами виробництва. З врахуванням рівності (1.2) приходимо до наступного висновку: коефіцієнту еластичності виробництва дорівнює показнику ефекту розширення масштабу виробництва.

Розглянемо ефект заміни ресурсів. Особливість реальних виробничих процесів полягає у теоретичній можливості заміщення одним фактором іншим. Наприклад, існує абстрактна можливість замінити одиницю виробничого обладнання еквівалентним за величиною фондовіддачею кількістю одиниць праці. Однако дуже часто на практиці це не здійснимо. Для випадку двохфакторної ВФ числова характеристика ефекту заміни повинна показувати, на яку величину dx_2 зменшиться витрата другого ресурсу, якщо збільшити обсягів витрат першого ресурсу на dx_1, щоб при цьому об'єм виробництва Q залишився незмінним.

Граничною нормою заміщення $S_{x_1x_2}$ одного ресурсу іншим називають величину

$$S_{x_1x_2}=-\frac{dx_2}{dx_1},$$

яка показує який обсяг ресурсу звільнюється при збільшенні ресурсу-замінника на одиницю. З умови незмінності обсягу виробництва продукції при заміщенні факторів випливає:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2 = 0.$$

Отже, гранична норма дорівнює відношенню граничних продуктів факторів, тобто

$$S_{x_1x_2,} == \frac{\partial Q/_{\partial x_1}}{\partial Q/_{\partial x_2}} = \frac{MQ_1}{MQ_2}. \tag{1.5}$$

У цьому випадку x_2 – це фактор, що заміщують, x_1 – фактор, який заміщує. З рівності (1.5) випливають, що обсяг x_2 ресурсу, що вивільняється, у розрахунку на одиницю ресурсу x_1 є тим більше, чим більша гранична продукція фактору що заміщує, у порівнянні з граничною продукцією фактору, якого заміщують. У протилежній ситуації норма заміщення визначається аналогічно: $S_{x_1x_2} \cdot S_{x_2x_1} = 1$.

Для ВФ Кобба-Дугласа отримуємо граничну норму заміщення за формулою (1.5). Маємо:

$$\text{К}\frac{\partial Q}{\partial L} = \beta\,\frac{Q}{L}; \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha\,\frac{Q}{K}, S_{Lk} = \frac{\partial Q/_{\partial L}}{\partial Q/_{\partial K}} = \frac{\beta}{\alpha\cdot}\frac{K}{L}.$$

Можливість заміщення ресурсів один одному характеризує ВФ з точки зору різних комбінацій витрат ресурсів, що забезпечує рівні обсяги виробництва продукції. Кількісною характеристикою темпу зміни граничної норми заміщення у просторі ресурсів є *еластичність заміни ресурсів*:

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{\partial\left({}^{x_1}/_{x_2}\right)}{\partial S_{x_1x_2}} \cdot \frac{S_{x_1x_2}}{{}^{x_2}/_{x_1}}. \tag{1.6}$$

Еластичність заміни показує, на скільки процентів повинне змінитися співвідношення ресурсів при сталому обсязі виробництва приз міні граничної норми заміщення на 1%. Відповідно до характеру зміни коефіцієнту еластичності заміни розрізняють два класи виробничої функції:

1) ВФ зі змінною еластичністю заміни;
2) ВФ зі сталою еластичністю заміни.

Найбільшою практичною значимістю має ВФ зі сталою еластичністю заміни. Для неї можливі два характерні випадки: $\sigma_{x_1 x_2}$=∞, тобто границі взаємозамінності ресурсів відсутні, $\sigma_{x_1 x_2}$=0, тобто ресурси взаємно доповняють один одного та використовуються у строго визначеному співвідношенні.

1.5 **Ізолінії виробничої функції**

Ізолінії виробничої функції – це криві, у всіх точках якої функція має стале значення , тобто це лінії рівня функції. Розглянемо координатну площину KOL, положення точки (K,L) відповідає певному рівню забезпечення виробництва ресурсами: капіталом K та працею L.

Ізоквантою називають геометричне місце точок плоскості KOL ресурсів, для якої обсяг виробництва продукції є сталою величиною:

$Q(K,L) = Q_C = const.$

Рівняння ізокванти можна записати і у явному виді: $L = f(K, Q_C)$. Наприклад, для ВФ Кобба-Дугласа у явному вигляді: $L = \sqrt[\beta]{\frac{Q_C}{AK^\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{Q_C}{A}} \cdot \frac{1}{K^{\alpha/\beta}}$. Економічний зміст ізокванти полягає в тому, що крива показує обсяг трудових ресурсів, необхідних для отримання продукції Q_C у залежності від наявного капіталу. Наведемо основні властивості ізокванти.

1. Якщо всі ресурси є необхідними для виробництва, то нема такого значення обсягу виробництваQ_C, для якого ізокванта має спільні точки з осями координат. Ця властивості випливає з умови необхідної всіх ресурсів.
2. Більшому значення обсягу виробництва відповідає більша віддалена від початку координат ізокванта, що випливає з умови однорідності.
3. Ізокванти, що відповідають різним значенням Q_C, не перетинаються.

Ізокліною називають множину точок площини ресурсів, у яких нахил ізоквант при різних значеннях обсягу виробництва продукції залишається сталим, оскільки нахил графіка функції виражає її похідна, то ізокліна – це множина точок, у яких

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = S_{x_1 x_2} = const = S_C.$$

Тут використали позначення ресурсів x_1, x_2. Отже, звідси випливає, що геометричний зміст норми заміщення полягає в тому, що вона дорівнює тангенсу кута, що утворює дотична до ізокванти з від'ємного напряму осі абсцис.

Для ВФ Кобба-Дугласа, як було показано вище, гранична норма заміщення пропорційна значенню коефіцієнту фондоозброєності K/L:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L},$$

тобто чим більшого величиною основного капіталу (фондів) у розрахунку на одного працівника має підприємства, тим більша частина капіталу може бути звільнена та інвестуванні в інший проєкт при збільшення персоналу на одного працівника.

Отже, рівняння ізокліни ВФ Кобба-Дугласа визначається наступним кутовим коефіцієнтом:

$$S_{LK} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} = S_C.$$

2.1. Витрати підприємства

Витрати С підприємства залежать від кількості x_i i=1, 2,…, n ресурсів, що воно використовує, цін на них, p_i, $i=1, 2,\ldots, n$ і є вартісними оцінками витрат всіх ресурсів, тобто $x_i p_i$, i=1, 2,…, n, що використовують для виробництва даного виду продукції за умови, що невиробничі витрати відсутні, тобто вибрана технологія мінімальних можливих витрат:

$$\min_x C(x_1, x_2) = \min_x (p_1 x_1 + p_2 x_2),$$
$$A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q, x_i \geq 0, i = 1,2.$$

Функцію $C(x, p)$, що задовольняє ці умови, називають *функцію витрат*. Функція витрат характеризує мінімальну суму витрат як функцію обсягу виробництва та цін ресурсів, тобто функція витрат характеризує мінімальну суму витрат на виробництво фіксованого обсягу виробництва Q за умови, що підприємства використовує оптимальні комбінації ресурсів $C(Q) = \sum_i p_i x_i^*$, де символом *позначені витрати ресурси при найбільш економічному способі виробництва.

Множину точок площини ресурсів при сталому сумі витрат підприємства С називають *ізокостою:* $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$.

У явному вигляді рівняння *ізокости* можна записати у вигляді:

$$x_2 = \frac{C}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Збільшення суми витрат приводить до паралельного зсуву ізокости по напряму вгору та вправо від початок координат. Вплив цін на ресурси на положення ізокости проявляється у тому, що змінюються кутовий коефіцієнт нахилу ізокости, наприклад, при незмінній ціні другого ресурсу зниженні ціни першого ресурсу спричиняє зменшення нахилу ізокости відносно осі першого ресурсу. Це означає, що при незмінному обсязі витрат другого ресурсу перший ресурс буде витрачатиметься тим в більшості кількості, чим нижча його ціна. У подальшому будемо вважати, що для виробництва продукції будуть використовувати лише два види ресурси: $x_1 = L$ – трудові ресурси та $x_2 == K$ – основні виробничі фонди.

Розглянемо класифікацію витрат. З точки зору тривалості періоду часу розрізняють витрати у довгостроковому періоді (*довгострокові витрати*), що позначають C_L, та витрати у короткостроковому періоді чи *короткострокові витрати* C_s. У довгостроковому періоді всі ресурси є змінними. У короткостроковому періоді частина ресурсів є сталими, тобто їх кількість не може бути змінено на протязі цього періоді. У короткостроковому періоді витрати можна розділити на два види: *змінні витрати* C_V, що змінюються при зміні обсязі виробництва, а також *сталі витрати* C_F, що не залежать від величини обсягу виробництва. До змінних витрат відносять витрати на сировину, матеріали, оплату праці виробничого персоналу, до сталих витрат – витрати на утримання споруди, обладнання, адміністративні витрати, орендна плата, податки.

Отже, у короткому періоді часу витрати є сумою сталою та змінними витратами:

$$C_s(Q) = C_F + C_V(Q). \tag{2.1}$$

Для аналізу витрат використовують такі показники як граничні та середні витрати.

Граничні витрати MC характеризують зміну витрат, викликану зміною обсягу виробництва на одиницю продукцію, і визначаються рівністю:

$$MC(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} \approx \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}.$$

Тут символ використають для позначення приросту величини. Цей показник застосовують при аналізі витрат і в довготерміновому періоді, і у короткотерміновому періоді. Оскільки сталі витрати не залежать від обсягу виробництва, то короткотермінові граничні витрати з врахуванням (2.1)можна подати у вигляді:

$$MC_s(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}[C_F + C_V(Q)] = \frac{dC_V(Q)}{dQ}.$$

З цієї рівності зрозуміло, що короткотермінові граничні витрати характеризують приріст змінних витрат при одиничному приросту обсягу виробництва продукції.

Середні витрати AC показують витрати на одиницю виробленої продукції:

$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q}.$$

З врахуванням (2.1) короткотермінові середні витрати можна подати у вигляді:

$$AC_S(Q) = \frac{C_s(Q)}{Q} = \frac{C_F + C_V(Q)}{Q} = \frac{C_F}{Q} + c_v.$$

Тут c_v – питомі змінні витрати, тобто змінні витрати на одиницю продукцію.

Звідси випливає, що короткотермінові витрати зменшуються зі збільшенням обсягу виробництва продукції, тобто спостерігається економії на розширенні виробництва у короткостроковому періоду.

2.2 Функції витрат у довготерміновому періоді

Функція витрат визначається у результаті розв'язання задачі мінімізації витрат на виробництво фіксованого сталого обсягу виробництва продукції Q. Цю задачу подаємо у вигляді:

$$\min_x C(x_1, x_2) = \min_x (p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

Для ВФ Кобба-Дугласа за умови $Q = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta},\ x_i \geq 0, i = 1,2$. У загальному вигляді мінімізація здійснюється при обмеження у вигляді виразу для відповідної виробничої функції, де обсяг виробництва Q є сталим.

Ця задача має наглядну геометричну інтерпретацію. Якщо переміщувати ізокосту в напряму до началу координат доти, доки вона має спільні точки з ізоквантою, що відповідає фіксованому обсягу виробництва Q_1, то розв'язком задачі мінімізації є точка перетину *A* ізокости та ізокванти. Множина всіх таких точок при різних значень обсягу виробництва Q утворюють *лінію довготермінового розвитку підприємства*. Точки, що знаходяться на цій лінії, характеризують мінімальні витрати виробництва, що відповідають фіксованим сталим обсягам виробництва продукції. Можна довести, що лінія довготермінового розвитку підприємства, утвореного точками комбінацій ресурсів, відношення граничних продуктів при даному виді виробничої функції дорівнює відношенню їх цін, тобто для цих точок виконується рівністю:

$$\frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2.2}$$

Виразимо відомий фіксований обсяг виробництва Q у точці ринкової рівноваги через оптимальні обсяги використаних ресурсів. Розглянемо виробництво, що моделюється ВФ Кобба-Дугласа. Тоді

$$Q = A(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{\beta}. \tag{2.3}$$

Підставимо вирази граничних продуктів MQ_1та MQ_2 в умови мінімальності витрат (2.2) і знайдемо x_2^*. Отримаємо:

$$\frac{A\alpha(x_1^*)^{\alpha-1}(x_2^*)^{\beta}}{A(x_1^*)^{\alpha}(x_2^*)^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow x_2^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} x_1^* = h x_1^*, \tag{2.4}$$

де $h = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}$. Підставивши x_2^* з (2.4) у ВФ (2.3), знаходимо x_1^* як функцію обсягу виробництва:

$$Q = A\left(x_1^*\right)^{\alpha}\left(hx_1^*\right)^{\beta} \Rightarrow x_1^* = \left(\frac{Q}{h^{\beta}A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{2.5}$$

Вираз для $x_2^*(Q)$ знайдемо, використовуючи (2.4):

$$x_2^* = h \cdot x_1^* = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \cdot \left(\frac{Q}{h^{\beta}A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \tag{2.6}$$

Знайдені значення $x_1^*(Q)$, $x_2^*(Q)$ є *функціями попиту* на ресурси. Вони дозволяють при відомому обсязі виробництва Q визначити необхідні кількості ресурси, при яких досягаються мінімальні витрати.

Знайдемо функцію витрат як функцію Q. Для цього підставимо вирази для $x_1^*(Q)$, $x_2^*(Q)$ у вираз для функції витрат: $C(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$:

$$C(Q) = p_1\left(\frac{Q}{h^{\beta}A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + p_2\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \cdot \left(\frac{Q}{h^{\beta}A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$C(Q) = p_1\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[A\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = DQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \tag{2.7}$$

$$D = p_1\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left[A\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Вираз (2.7) – це функція витрат, що є функцією обсягу виробництва, а не функцією витрачених ресурсів. Отримана функція відповідає довгому строку, тобто $C(Q) = C_L(Q)$.

У випадку відсутності ефекту збільшення масштабу $r = \alpha + \beta = 1$ функція витрат є лінійною функцію обсягу виробництва, що випливає з (2.7). Графік функції затрат є випуклою вгору при $r > 1$. Це означає, що при збільшення обсягу виробництва відбувається відносне зменшення витрат, тобто спостерігається позитивний ефект розширення масштабу виробництва. У випадку $r < 1$ графік функція витрат є випуклий вниз, що відповідає швидшому зростанню темпу росту витрат у порівнянні зі зростанні обсягу виробництва.

2.3 Довготермінові витрати та розширення масштабу виробництва

Найважливішим фактором, що визначає конфігурацію кривої $C_L(Q)$, є величина ефекту від масштабу виробництва. Для виробничої функції Кобба-Дугласа ця величина визначається значенням показника $r = \alpha + \beta$. У випадку $r = 1,$ то крива витрат$C_L(Q)$ має вид променю, що виходить з початку координат, тобто довготермінові витрати зі збільшенням обсягу виробництва збільшуються у тій же пропорції, у якій зростає обсяг виробництва.

Розширення масштабу виробництва пов’язане з кратним збільшенням ресурсів, що використовує. Тому

$$(wx_1, wx_2) \Rightarrow \begin{cases} p_1(w_1x_1^*) + p_2(wx_2^*) = wC_L, \\ Q\left(wx_1^*, wx_2^*\right) = wQ\left(x_1^*, x_2^*\right). \end{cases}$$

Сума витрат, та обсяг виробництва продукції збільшується у w разів.

При зростання віддачі від витрат, тобто при $r > 1$:

$$(wx_1, wx_2) \Rightarrow \begin{cases} p_1(w_1x_1^*) + p_2(wx_2^*) = wC_L, \\ Q\left(wx_1^*, wx_2^*\right) = w^rQ\left(x_1^*, x_2^*\right). \end{cases}$$

Оскільки у цьому випадку $w^r > w$, то зростання обсягу виробництва випереджує зростання витрати. Зауважимо, що витрати зі збільшенням виробництва і у цьому випадку теж зростають, але зростають повільніше.

При $r < 1$ спостерігаємо спадання віддачі від масштабу виробництва у цьому випадку $w^r < w$, тобто при незмінних цінах витрати зростають швидше, ніж обсяг виробництва.

Розглянемо довготермінові середні та граничні витрати. Довготермінові середні витрати визначається наступним чином:

$$AC_L(Q) = \frac{C_L(Q)}{Q} = DQ^{\frac{1}{r}-1}. \tag{2.8}$$

Довготермінові витрати визначаються за означенням граничних витрат:

$$MC_L(Q) = \frac{\partial C_L(Q)}{\partial Q} = \frac{1}{r} DQ^{\frac{1}{r}-1} = \frac{1}{r} AC_L(Q). \quad (2.9)$$

З порівняння формул (2.8) та (2.9) видно, що форми графіків довготермінових граничних та середніх витрат однакові, відрізняються розташуванням з-за множника $1/r$. Якщо $\frac{1}{r} = 1$, то ці графіки співпадають, при $\frac{1}{r} > 1$, крива $MC_L(Q)$ розташована вище кривої середній витрат $AC_L(Q)$, у випадку $\frac{1}{r} < 1$, графік $MC_L(Q)$ знаходиться під графіком $AC_L(Q)$.

Позитивний ефект масштабу виробництва полягає у тому, що величини середніх та граничних витрат зменшуються зі збільшенням обсягу виробництва, причому зменшення граничних витрат відбувається випереджальними темпами.

2.4 Функція витрат у короткотерміновому періоду

У короткотерміновому періоді кількості деяких ресурсів не може бути змінено. Будемо, що у двохфакторній моделі виробництва кількість другого ресурсу залишається сталій: $x_2 = b_2 = const$. Тоді задача мінімізації короткотермінових витрат при сталому фіксованому обсязі Q виробництва набуває вигляд:

$$\min_{x_1} C(x_{1,}, x_2) = \min_{x_1}(p_1 x_1 + p_2 x_2),$$
$$A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q, x_1 \geq 0, x_2 = b.$$

Ця задача має просту геометричну інтерпретацію. Якщо переміщати ізокости у напрямі до початку координати до тих пір, пока ізокоста не перетне Ізо кванту, що відповідає обсягу виробництво Q, у точці її перетину з лініями сталого ресурсу, то розв'язком задачі мінімізації витрат буде спільна точка ізокости C_3, фіксованої ізокванти Q та лінії сталого ресурсу. Довготермінові витрати C_3 при том же обсязі виробництва Q визначаються точкою дотику ізокости C_3 та фіксованої ізокванти Q у точці з координатами $(x_1^*,\ x_2^*)$, при цьому довготермінові витрати не перевищують суми короткотермінових витрат, оскільки ізокоста C_3 розташована не вище ізокости C_2. Таким чином, витрати на випуск одного й того ж обсягу виробництва у довготерміновому періоду не більше, ніж у короткотерміновому періоду. ЦІ виробничі можуть бути і рівними між собою. Можна показати, що сума витрат у довготерміновому періоді не більше, ніж у короткотерміновому періоді при необмеженому збільшенні наявного обсягу ресурсу.

Розглянемо аналітичне розв'язання задачі мінімізації короткотермінових витрат при сталому обсязі виробництва. Для визначення величини ресурсів x_1 потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Q; \\ x_2 = b_2. \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи характеризує фіксовану ізокванту Q, а другу – лінію сталого ресурсу. Шукане значення x_1 дорівнює:

$$x_1^\alpha = \frac{Q}{Ab_2^\beta} \to x_1(Q) = \left(\frac{Q}{Ab_2^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{Ab_2^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Q^{\frac{1}{\alpha}} = gQ^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (2.10)$$

Тут $g = \left(\frac{1}{Ab_2^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Формула (2.10) дозволяє розрахувати потрібну кількість змінного ресурсу $x_1(Q)$, що забезпечує зі сталим ресурсом x_2 обсяг виробництва Q. При цьому кількісті ресурсів $x_1(Q)$, $x_2 = b$ дозволяють підприємству виробляти обсяг Q з мінімальними витратами. Визначим ці витрати:

$$C_S(Q) = p_1 x_1(Q) + p_2 b_2 = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha}} + p_2 b_2. \qquad (2.11)$$

Перший доданок у функції короткотермінових витрат є сумою змінних витрат, а другий – відображає внесок сталих короткотермінових витрат.

2.5 Функція витрат при змінному ефекті розширення обсягу виробництва

Перед цим ми вважали, що показник ефекту масштабу r не залежить від обсягу виробництва. Проте у багатьох виробничих процесів зростаюча віддача від розширення масштабу виробництва $(r > 1)$ змінюється при досягненні певного обсягу виробництва спочатку сталою віддачою $(r = 1)$, а потім спадною $(r < 1)$. Виробничій функції зі змінним типом віддачі від розширення масштабу виробництва відповідає зміна форми кривих витрат.

Знайдемо аналітичний вираз функції довготермінових витрат з врахуванням формули (2.7):

$$C_L(Q) = DQ^{\frac{1}{r(Q)}}. \qquad (2.12)$$

Для випадку, коли показник степеню однорідності є лінійно спадною функцією обсягу виробництва максимального значення r_{max}при обсягу вирабництва Q_{min}.до мінімального значення r_{min} при Q_{max}. Можна показати, що графік функції сукупних витрат при значенні Q, що відповідає значенні $r = 1$ має перегин. Це точка перегину. До цього значення аргументу, графік є опуклим вгору, після нього він стає опуклим вниз. Тому криву довготермінову витрат при змінному ефекті розширення масштабу виробництва називають «S-подібною» кривою у зв'язку її вигляду.

Розглянемо функцію витрат у короткотерміновому періоді. З врахуванням формули (2.11) вираз суми таких витрат можна перетворити до вигляду:

$$C_S(Q) = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha(Q)}} + p_2 b_2.$$

Середні значення довготермінових витрат отримаємо, поділивши функцію витрат (2.12) на Q. Розрахункова формула для довготермінових середніх витрат має вигляд:

$$AC_L(Q) = \frac{1}{Q} C_L(Q) = DQ^{\frac{1}{r(Q)}-1}.$$

Формула для розрахунку середніх короткотермінових витрат має вигляд:

$$AC_S(Q) = \frac{C_S(Q)}{Q} = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha(Q)}-1} + \frac{p_2 b_2}{Q}.$$

У цьому виразі перший доданок характеризує середні змінні витрати AC_V, а другий доданок – середні сталі витрати AC_F. Показник степеню $\frac{1}{r(Q)} - 1$ у формулі для середніх довготермінових витрат визначає поведінку графіка функції довготермінових середніх витрат: якщо $\frac{1}{r(Q)} - 1 < 0$, при $r(Q) > 1$, крива довготермінових середніх витрат є спадною. При $r(Q) = 1$, тобто виконується рівність $\frac{1}{r(Q)} - 1 = 0$, функція довготермінових середніх витрат є сталою, при всіх значеннях аргументу її значення дорівнює D. При $r(Q) < 1$ маємо $\frac{1}{r(Q)} - 1 > 0$, тому крива середніх довготермінових витрат є зростаючою.

3. Теорія діяльності комерційного підприємства

3.1 Раціональна комерційна діяльність

Комерційне підприємство – це самостійно суб'єкт господарської діяльності, створений для виробництва продукції, виконання робіт, надання послуг з метою отримання прибутку. В процесі комерційної діяльності підприємство витрачає економічні фактори (придбані ресурси) і реалізує створені товари, виконані роботи чи надані послуги.

Перед підприємств стоїть задача вибору раціонального (найвигіднішого) способу здійснення комерційної діяльності. В умови цієї задачі входять: 1) вектор цін на фактори виробництва $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, що визначаються ринковою рівновагою, а не самим підприємством; 2) номенклатура ресурсів виробництва $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 3) вигляд виробничої функції $Q = Q(\bar{x})$, 4) рівень ціни продукції підприємства, що визначається ринковою рівновагою, 5) характеристики ринка, що визначають формувань цін на товар та ресурси: ринок досконалої конкуренці при великої кількості взаємно незалежних підприємств, виробляють стандартизовану продукцію, не впливаючи на рівень цін на її; недоскональна конкуренція (монополістична конкуренція, олігополія, монополія); 6) тривалість періоду: довготерміновий період на протязі якого підприємство має можливість вибирати будь-який невід'ємний вектор витрат $\bar{x} \geq 0$; короткостроковий період, у межах можливий вибір вектора витрат, обмежений $\bar{x} \leq \bar{b}$.

Основна задача комерційного підприємства (надалі говорячи про підприємство, має на увазі комерційне підприємство) полягає у виборі: а) асортименту та обсязі виробництва, тобто, що виробляти та у якій кількості;

б) ВФ та суми витрат, тобто яким технологічним способом здійснювати виробництво та з якими витратами, щоб максимізувати прибуток.

Підприємство формує фінансовий результат (прибуток чи збиток) продажу як різницю періодичного доходу R та та витрат виробництва та реалізації С: $P = R - C$. Доход за період визначається як добуток обсягу реалізації продукції на її ціну: $R = p_0 Q(\bar{x})$. Витрати виробництва складають з витратам на придбання всіх необхідних ресурсам, використаним у виробничому процесі: $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Підприємство повинно вибрати вектор ресурсів , при якому прибуток підприємства максимальний):

$$P = (p_0 Q - p_1 x_1 - p_2 x_{2)} \rightarrow max.$$

Якщо залежність суми прибутку від обсягів витрат факторів виробництва подана у вигляді

$$P(x_1, x_2) = p_0 Q(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_{2)},$$

то, виразивши з цього співвідношення об'єм виробництва продукції

$$Q(x_1, x_2) = \frac{P}{p_0} + \frac{p_1}{p_0} x_1 + \frac{p_2}{p_0} x_2,$$

отримаєм залежність обсягу виробництва Q від величини витрачених ресурсів при деякому значенні прибутку P, яка називається ізопрофітою (ізопрофітною поверхню). Якщо один з факторів виробництва (наприклад, $x_{2)}$, , то ізопрофіта є прямою лінією з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює співвідношенням цін змінного фактору та продукту. Оскільки граничний продукт дорівнює кутовому дотичної до кривої виробництва $MQ_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = \frac{P_1}{p_0}$.

Отже, у деякій точці ізопрофіта дотикається до кривої виробництва. Абсцису точки дотику x_1^* це оптимальна витрата ресурсу x_1, що забезпечує максимальну суму прибутку при конкретному вигляді виробничої функції.

3.2 Раціональна діяльність в умовах досконалої конкуренції

Досконала конкуренція як одна з моделей ринку має наступні особливості:

1) Наявність великої кількості підприємств, що реалізують стандартизовані товари чи послуги;
2) Доступ на ринок вільним, тому вільне переміщення ресурсів;
3) Обсяг продукції окремого підприємства незначний у порівнянні з обсягом реалізацією цієї продукції на всьому ринку, тому кожне підприємство продає продукцію по ціні, що склалось у результаті ринкової рівноваги і не може впливати на цю ціну.

В цих умовах функція пропозиції, тобто залежність ціни пропозиції від її обсягу, має графік, який зі зростанням обсягу пропозиції, асимптотично наближається до горизонтальної прямої, тобто ціна пропозиції не залежить від величини пропозиції з боку підприємства. Таким чином, умова досконалої конкуренції мають вигляд:

$$\frac{\partial p_0}{\partial Q} = 0, \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

З'ясуємо умови оптимальності діяльності у довготерміновому перспективі. Розглянемо його діяльність у довготерміновому періоді при необмежених факторах виробництва. В умовах досконалої конкуренції основна задача підприємства

$$P = (p_0Q - p_1x_1 - p_2x_{2)} \rightarrow max.$$

Може бути розв'язана у відповідності з необхідними умовами екстремуму функції однієї змінної. Згадаємо ці умови:

1) Умова першого порядку $\frac{dP(Q^*)}{dQ} = 0;$ (3.1)
2) Умова другого порядку $\frac{d^2P(Q^*)}{dQ^2} < 0;$ (3.2)

Тут Q^* – оптимальне значення обсягу виробництва продукції.

З умови першого порядку випливає, що

$$\frac{dP(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}[p_0Q - C(Q)] = 0 \rightarrow p_0 = \frac{dC(Q)}{dQ} = MC(Q).$$

Оскільки ціна пропозиції продукту – це граничний дохід MR, тобто приріст доходу підприємства у розрахунок на кожну додаткову одиницю продукції, отже

$$p_0 = \frac{d}{dQ}(p_0Q) = \frac{dR}{dQ} = MR,$$

тобто з умови першого порядку випливає необхідна умова рівності граничного доходу граничним витратам при оптимальному обсягу виробництва:

$$MC(Q^*) = MR(Q^*). \quad (3.3)$$

Умова другого порядку зводиться до нерівності:

$$\frac{d^2P(Q)}{DQ^2} = \frac{d}{dQ}[p_0 - MC(Q)] = -\frac{dMC(Q^*)}{dQ} < 0 \rightarrow \frac{dMC(Q^*)}{dQ} > 0,$$

тобто при оптимальному обсягу виробництва граничні витрати повинні зрости.

Умова рівності граничного доходу граничним витратам $MR = MC$ є орієнтиром оптимальності обсягу виробництва з точки зору прибутку і для інших моделей ринку, але лише при досконалій конкуренції можна замінити граничним доходом ціною, тобто умова $p_0 = MC$ є окремим випадком умови $MR = MC$.

3.3. Планування по конкурентній моделі у довготерміновому періоді.

Отримані необхідні умови оптимальності виробничої програми підприємства отримані без врахування обмежень, що мають місце в зв'язку з обмеження ресурсів підприємства. Розглянута вище модель є схемою визначення оптимального обсягу виробництва у довготерміновому періоду. У довгостроковому періоді задача раціональної комерційної діяльності підприємства є задачею безумовної оптимізації.

Розглянемо модель довготермінового планування

$$\max P = max[p_0 Q(\bar{x}) - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

у випадку двохфакторній виробничій функції Кобба-Дугласа.

$$Q = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}. \tag{3.5}$$

Умови оптимальності першого порядку дозволяють визначити величину витрати кожного фактори виробництва, що забезпечують максимальне значення прибутку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = p_1, \\ p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = p_2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Умови (3.6) є необхідними умовами умами оптимальності у довготерміновому періоді. Диференціюючи вираз виробничої функції (3.5) і підставивши похідні у (3.6), отримуємо:

$$\begin{cases} p_0 \alpha \dfrac{Q}{x_1^*} = p_1, \\ p_0 \beta \dfrac{Q}{x_2^*} = p_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \alpha Q \dfrac{p_0}{p_1}, \\ x_2^* = \beta Q \dfrac{p_0}{p_2}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Рівності (3.7) значать, що витрати ресурси пропорційні планованому обсягу Q виробництва продукції і обернені пропорційні цінам придбанням відповідних ресурсів. Вирази (3.7) – це функції попиту на ресурсів у довгостроковому періоді при досконалій конкуренції. З рівнянь (3.7) випливає, що виконується рівність:

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha} \frac{p_1 x_1^*}{p_2},$$

Тобто залежність витрат одного ресурсу від іншого є лінійною функцією.

Розглянемо задачу визначення обсягу виробництва продукції Q^*, що забезпечує максимальний прибуток, якщо виробничий процес подається ВФ Кобба-Дугласа. Підставимо функції попиту (3.7) на фактори виробництва у ВФ Кобба-Дугласа (3.6):

$$Q^* = A\left(\frac{p_0 \alpha}{p_1} Q^*\right)^{\alpha} \left(\frac{p_0 \beta}{p_2} Q^*\right)^{\beta} = A\left(\frac{p_0 \alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_0 \beta}{p_2}\right)^{\beta} \left(Q^*\right)^{\alpha+\beta}.$$

Отримали рівняння, з якого визначимо обсяг виробництва продукції Q^*, що забезпечує максимальний прибуток:

$$\frac{Q^*}{\left(Q^*\right)^{\alpha+\beta}} = \left(Q^*\right)^{1-(\alpha+\beta)} = A\left(\frac{p_0 \alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_0 \beta}{p_2}\right)^{\beta},$$

$$\left(Q^*\right) = A^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}}. \qquad (3.8)$$

1. Отже, у випадку додатного (позитивного) ефекту розширення масштабу виробництва $(\alpha+\beta) > 1$ показники степеню $\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)} < 0$, $\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)} < 0$. Оптимальне значення обсягу виробництва продукції тим більше, чим нижча ціна продукту у порівнянні з цінами ресурсів. При від'ємному ефекті розширенні масштабу виробництва спостерігається зворотна ситуація: чим більшн ціна продукта перевищує ціни ресурсів, тим більше значення досягає оптимальний обсяг виробництва.

Отриманий вираз (3.8) оптимального обсягу виробництва продукції як функції ціни продукції та ціни ресурсів називають *функцію пропозиції* підприємства з ВФ Кобба-Дугласа: $Q^* = Q^*(p_0, p_1, p_2)$. Цю функцію можна використати для побудови кривої пропозиції, що відображає залежність ціни пропозиції від обсягу пропозиції підприємства:

$$Q^* = A^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} p_0^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \Rightarrow \left(Q^*\right)^{\frac{1-r}{r}} = Zp_0,$$

де $Z = A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ – це стала величина, що не залежить від ціни продукту: $r = \alpha + \beta$ – це ступінь однорідності виробничої функції. Тому отримуємо рівняння кривої пропозиції у вигляді:

$$p_0 = \frac{1}{Z}(Q^*)^{\frac{1-r}{r}}.$$

При віддачі, що збільшується з розширенням виробництва, коли витрати підприємства зростають сповільненими темпами у порівнянням зростанням виробництва, тобто середня собівартість продукції зменшується, у підприємства є можливість продавати більший обсяг продукції по зниженій ціні, продовжуючи отримати максимальний прибуток. Ця ситуація використає підприємства при освоєння нового ринка.

Стала віддача від розширення виробництва проявляється в том, що середня продукції не змінюється, що створює можливість підприємству зберігати ціну продукції незмінною. Така ситуація є характерною для стратегії стабільного розвитку підприємства, що діє у режимі планового завантаження.

Спадна віддача від розширення виробництва, пов'язана зі зростання собівартості продукції, обумовлює необхідність підвищення ціни при збільшенні пропозиції з метою збереження прибутку. Це знижує конкурентоздатності продукції і зменшує ринок її збуту.

3.4. Планування по конкурентної моделі у короткотерміновій перспективі

У межах короткотермінового періоду обмеження на ресурсу приводить к обмеженню на обсяг виробництва $Q \leq \bar{Q}$ і відповідному обмеженню величини прибутку, яка може в цьому випадку не досягати оптимального значення, у цьому випадку $\bar{Q} \leq Q^*$, тобто значення $\bar{Q}$, що визначається обмеженням на витрату ресурсів $g(\bar{x}) \leq \bar{b}$ (тут звичайно нестрогу нерівність обертається у строгу), слід розглядати як оптимальний обсяг виробництві у короткотерміновому періоді.

Отже, якщо у довготерміновому періоді задача раціоналізації комерційної діяльності сформулювалась як задача безумовної оптимізації, то при короткотерміновому плануванні виникає задача визначення умовного екстремуму.

При короткотерміновому плануванні нехай перший ресурс обмежений величиною запасу b_1, а другий ресурс є у необмеженій кількості. Для розв'язування задачі на умовний екстремум використаємо метод Лагранжа. Згідно з яким потрібно скласти функцію Лагранжа. У випадків двох факторів виробництва та одного обмеження має вигляд:

$$L = p_0 Q(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) + \lambda(b_1 - x_1). \tag{3.9}$$

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа набувають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - p_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 - x_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial b_1} = \lambda = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

З врахуванням виду виробничої функції Кобба-Дугласа з необхідних умов оптимальності випливає:

$$\begin{cases} p_0 \alpha \dfrac{Q}{x_1} - p_1 - \lambda = 0, \\ p_0 \beta \dfrac{Q}{x_2} - p_2 = 0, \\ (b_1 - x_1)\lambda = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Вирази (3.11) є об'єднанням умов $b_1 - x_1 = 0$ та $\lambda = 0$. Ці умови не можуть виконуватися сумісно.

Якщо $b_1 - x_1 > 0$, тобто $x_1 < b_1$. Множник Лагранжа λ показує величину приросту доходу, який можна отримати з одиниці невикористовуваного ресурсу x_1, то $\lambda = 0$. Якщо $b_1 - x_1 = 0$, тобто ресурс x_1 використовують у повному обсязі, то значення λ може бути будь-яким, $\lambda \neq 0$. Якщо $b_1 - x_1 < 0$, тобто $x_1 > b_1$, то множник Лагранжа у цьому випадку є сумою зниження доходу з одиниці перевищування запасу ресурсу, перевищування вважається неможливим, то тут $\lambda = 0$.

Отже, при короткотерміновому плануванні можливі два випадки.

1) Зміни обсягу виробництва до деякої величини, обмеженої умовою $x_1 < b_1$, тобто з першого рівняння (3.11) при $\lambda = 0$ та $x_1 = b_1$:

$0 < Q < \tilde{Q} = \frac{p_1 x_1}{p_0 \alpha} = \frac{p_1 b_1}{p_0 \alpha}$.

У цьому випадку оптимальні значення факторів розрахуються так само, як і у довготерміновому періоді (оскільки $\lambda = 0$):

$$x_1^* = \alpha Q \frac{p_0}{p_1}, x_2^* = \beta Q \frac{p_0}{p_2}.$$

Більша зміна обсягу виробництва відповідає повному вичерпанню обмеженого ресурсу, у цьому випадку оптимальні значення дорівнюють

$$x_1^* = b_1, x_2^* = \beta Q \frac{p_0}{p_2}. \quad (3.12)$$

Обсяг витрат другого ресурсу для оптимального плану виробництва з врахуванням виду виробничої функції:

$$x_2^* = \beta A (x_1^*)^{\alpha} (x_2^*)^{\beta} \frac{p_0}{p_2} \to x_2^* = \left(\beta A b_1^{\alpha} \frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (3.13)$$

Оскільки показник степені $\frac{1}{1-\beta} > 1$, то величина витрат (змінного) ресурсу зростає нелінійно зі збільшенні співвідношення цін $\frac{p_0}{p_2}$, тобто чим дешевший ресурс, що зміниться. тим у більшому обсязі він буде витрачатися для забезпечення оптимального обсягу виробництва. Більшого значення b_1 відповідають більші витрати змінного ресурсу.

Оптимальний обсяг виробленої продукції визначається з виразу виробничої функції Кобба-Дугласа з врахуванням співвідношення (3.12):

$$Q^* = A b_1^{\alpha} \left(\beta Q^* \ \frac{p_0}{p_2}\right)^{\beta} \to Q^* = A^{\frac{1}{1-\beta}} b_1^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \left(\beta \frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (3.14)$$

Оскільки в реальних виробничих процесах, як було показано в дослідженнях Д. Кобба та П. Дугласа, значень показників еластичності $\alpha = 0{,}25;\ \beta = 0{,}75$, то з виразу (3.14) випливає: 1) оптимальний обсяг виробництва зростає пропорційно запасу фіксованого ресурсу, оскільки $\frac{\alpha}{1-\beta} \approx 1$; 2) оптимальний обсяг виробництва зростає прискореними темпами зі збільшенням співвідношення цін продукту та змінного ресурсу, оскільки $\frac{\beta}{1-\beta} < 1$; 3) значення оптимального обсягу виробництва не залежить від ціни фіксованого ресурсу.

3.5 Аналіз беззбитковості

Розглянута методика планування, розглянута вище, знайшла застосуванні при аналізі беззбитковості виробничої діяльності підприємства. *Беззбитковість* – це такий фінансово-господарський стан підприємства, при якому його дохід дорівнює його витратам. Обсяг виробництва, при якому досягається стан беззбитковості, називають *критичним*.

Зробимо наступні припущення:

1) Розглядається модель досконалої конкуренції, тобто, значення граничного доходу стале і дорівнює ціні продукту, тому лінія доходу є пряма;
2) Віддача від розширення виробництва вважається постійною, тому функція витрат є лінійна функція обсягу виробництва;
3) Розглядається короткостроковий термін планування, внаслідок чого функція витрат подається у вигляді суми сталих та змінних витрат

З врахуванням зроблених припущень використовують наступні підходи до проблеми оцінки рентабельності і плану виробництва.

1. Порівняння валового доходу підприємства з його валовими витратами та відокремлення зони прибутковості від зони збитковості виробничої діяльності підприємства. Вираз для критичного обсягу виробництва, що розділяє ці зони, отримуємо з умови рівності доходів та витрат:

$$p_0Q = C_F + C_vQ \ \rightarrow \ Q_k = \frac{C_F}{p_0 - c_v}.$$

Тут c_v – середні змінні витрати. Значення обсягу виробництва, при якому досягається беззбитковість в умовах покриття змінних витрат ціною реалізації продукції, називають *критичним значенням*.

2. Співставлення середнього доходу $AR(Q) = p_0$та середніх витрат $AC(Q)$ визначає тіж зони прибутку та збитку.
3. Порівняння граничного доходу $MR(Q)$ та граничних витрат $MC(Q)$ дозволяє визначити можливості подальшої діяльності підприємства. Оскільки для моделі досконалої конкуренції

$$MR = \frac{\partial R}{\partial Q} = p_0,$$

А в умовах короткотермінового періоду середні граничні витрати дорівнюють середнім змінним витратам $MC = \frac{\partial C}{\partial Q} = AC_v = c_v$, то у цьому випадку порівняти значення ціни продукта і величину питомих середніх витрат. Якщо $p_0 < c_v$, то виробництво потрібно припиняти.

3.6 Раціональна комерційна діяльність в умовах монополії та монопсонії

Багато виробників, що спеціалізуються на виробництву слабко стандартизованим товарам, зустрічаються з умовами *монополії (монополістичної конкуренції)*. На відміну, від досконалої конкуренції, для монополії має місце залежність ціни товару від обсягу ринку, тобто крива попиту на товар такого ринку має вигляд: $p_0 = p_0(Q)$. Попит на такий товар не є нескінченно еластичним, у цьому випадку крива попиту є спадна.

В умовах монополії виробник має можливість впливати на ціну товару, змінюючи обсяг пропозиції, враховуючи, що $\frac{\partial p_0}{\partial Q} < 0,$ тобто для збільшення обсягу продажу необхідно знижати ціну товару., для збільшення ціни товару потрібно зменшувати обсягу пропозиції.

Здебільшого підприємство, що займається виробництвом специфічного продукції, є основним покупцем у власних постачальників. Вони змушені виробляти матеріали, комплектуючі та напівфабрикати у відповідності до вимоги свого замовника. В таких умовах продукція постачальника також є спеціалізованою. Ситуація, при якій існує тісна взаємозв'язок між постачальником та покупцем, є оберненою стороною монополії і називається *монопсонією* (наявністю одного покупця). В умовах монопсонії покупець

Має можливість впливати на ціну ресурсів, які він закупляє у постачальників зміною обсягів закупівель, тобто існує залежність виду $p_i = = p_i(x_i)$. Ця функція характеризує суму витрат покупця при монопсонії на придбання x_i ресурсу. У загальному випадку покупець може придбати більшу кількість ресурсу, запропонувавши за нього більш високу плату, тобто

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки валовий дохід підприємства визначається як $R(Q) = p_0(Q)Q$, а сума витрат дорівнює

$$C(Q) = p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2,$$

то в умовах недосконалої конкуренції (комбінації монополії та монопсонії) задача раціональної комерційної діяльності має вигляд:

$$\max_{Q,\, x_1, x_2} \Pi = \max_{Q, x_1, x_2} [p_0(Q)Q - p_1x_1 - p_2x_2],$$

за умові $Q = Q(x_1, x_2)$.

На відміну від досконалої конкуренції, граничний доход не дорівнює сталій ціні товару, а також залежить від обсягу виробництва:

$$MR(Q) = \frac{\partial R(Q)}{\partial Q} = p_0 + 2\frac{\partial p_0}{\partial Q}Q, \tag{3.15}$$

де похідна $\frac{\partial p_0}{\partial Q} = \overline{p_0} < 0$ показує, на скільки грошових одиниць ціна продукції від свого початкового значення p_0 при збільшення обсягу пропозиції підприємства на одиницю. Граничні витрати також залежать від обсягу ресурсів, що споживаються:

$$MC_i(Q) = p_i(x_i) + 2\frac{\partial p_i}{\partial x_i}x_i, i = 1,2,$$

тут $\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \overline{p_i}$– зростання ціни ресурсу при збільшенні його придбання на одиницю.

3.7 Оптимальний план виробництва в умовах недосконалої конкуренції

Розв'язування задачі комерційної організації може бути отримано методом Лагранжа як задачі оптимізації за наявності обмежень:

$$L(x_1, x_2, Q, \lambda) = p_0Q - p_1x_1 - p_2x_2 + \lambda(Q(x_1, x_2) - Q).$$

Необхідні умови екстремуму визначаються, прирівнюючи до нуля всіх частинних функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q} = p_0 - \dfrac{\partial p_0}{\partial Q} - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = -p_i - \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} x_i + \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = 0, i = 1,2; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = Q(x_1, x_2) - Q = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = p_0 + \dfrac{\partial p_0}{\partial Q} Q^*, \\ \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = p_i + \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} x_i^*, i = 1,2, \\ Q^* = Q\left(x_1^*, x_2^*\right). \end{cases}$$

Перша умова показує, що при оптимальних значеннях (Q^*, x_i^*) множник Лагранжа дорівнює граничному доходу $\lambda = MR(Q^*)$.

Друга група умов свідчить, що добуток граничного доходу та граничного фактору дорівнює граничних витрат цього фактору:

$$MR(Q^*) \cdot MQ_i(x_i^*) = MC_i(x_i^*), i = 1,2. \tag{3.16}$$

У останній умові просто наведена виробнича функція:

$$Q^* = Q(x_1^*, x_2^*) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}. \tag{3.17}$$

Рівняння (3.16) та (3.17) є вихідними рівняннями, що визначають обсяг виробництва та комбінації витрати ресурсів, що максимізують прибуток. Крім того, повинні враховувати, що раніше отримана умова рівності граничного доходу граничним витратам повинно виконуватися і за умов монополії-монопсонії:

$$\frac{\partial \Pi(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial R(Q)}{\partial Q} - \frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = 0, MR(Q^*) = MC(Q^*). \tag{3.18}$$

Використаємо вираз (3.18) для отримання формули оптимального обсягу виробництва у межах монополії (ситуації монопсонії не враховується, тобто граничні витрати залежать лише від обсягу виробництва). Розглянемо два окремих випадки:

а) негативний ефект розширення масштабу виробництва при $r = 0{,}5,$ підставимо в (3.18) вираз граничного доходу (3.15) та граничних витрат (2.9):

$$p_0 + 2\bar{p}Q = \frac{1}{r} DQ^{\frac{1}{r}-1} \rightarrow Q^* = \frac{p_0}{2D - 2\bar{p}}; \tag{3.19}$$

б) відсутнє ефекту розширення виробництва при $r = 1;$ аналогічно попередньому випадку отримуємо:

$$p_0 + 2\bar{p}Q = \frac{1}{r} DQ^{\frac{1}{r}-1} \rightarrow Q^* = \frac{D - p_0}{2\bar{p}}. \tag{3.20}$$

Функції попиту на ресурсу можемо отримати з умов (3.16), (3.17), вирази для граничних продуктів мають виглядів:

$$MQ_1 = \frac{\alpha Q}{x_1},\ MQ_2 = \frac{\beta Q}{x_2}.$$

Вирази для граничних витрат знайдемо, продиференціювавши рівність $C = = p_1 x_1 + p_2 x_2$: $MC_1 = p_1, MC_2 = p_2$. Підставивши ці вирази у (3.16), отримаємо:

$$\frac{(p_0+2\bar{p}Q^*)\alpha Q^*}{x_1^*}=p_1,\ \frac{(p_0+2\bar{p}Q^*)\beta Q^*}{x_2^*}=p_2.$$

З цих рівнянь знаходимо попит на ресурси:

$$x_1^*(Q^*) = \frac{\alpha(p_0+2\bar{p}Q^*)Q^*}{p_1},\ x_2^*(Q^*) = \frac{\beta(p_0+2\bar{p}Q^*)Q^*}{p_2}. \qquad (3.21)$$

Визначивши оптимальний обсяг виробництва за формулам (3.19), (3.20), потім можно розрахувати попит на ресурси за формулами (3.21).

При досконалої конкуренції оптимальне значення прибутку досягається при незмінній ціні продукції $p_0 = MR$ навіть при мінімальному обсязі виробництва, то в умовах монополії оптимальна величина прибутку не перевищує суми прибутку при досконалої конкуренції. Максимум прибутку в умовах монополії досягається при обсязі виробництві, що не більший оптимальний обсяг виробництва в умовах досконалої конкуренції.

3.8 Раціональна комерційна діяльність в умовах олігополії та олігопсонії

Структура ринку, на якому діє обмежена кількість підприємств, називають конкуренцією серед небагатьох. Ринок, на яку однорідну продукцію, кілька продавців, називають *олігополією*. Ринок, на якому продукція певного виду, придбає кілька покупців, називають *олігопсонією*.

Головна особливість конкуренції серед небагатьох полягає у тому, що всі конкуруючі підприємства можуть впливати на ціни пропонуємої продукції у випадку олігополії чи ресурсів, що придбають. Тому прибуток кожного підприємства залежить від стратегії конкурентів. Оптимальна стратегія комерційного підприємства визначається не лише, виходячи прямого впливу цього підприємства на стан ринку ресурсів та товару, але й з врахуванням побічного впливу, – через вплив на дії інших конкурентів. Отже, стратегія підприємства, що діє в умовах олігостичної конкуренції має багато спільної з гри, оскільки виграш кожного гравця залежить від дій інших гравців.

Розглянемо характерний варіант олігополістичної конкуренції, у котрій два конкуренти (ринок дуополії) виробляють продукцію з наступними виробничому функціями:

$$Q_1 = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), Q_2 = f_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}),$$

де Q_1 – обсяг виробництва першого підприємства, Q_2 – обсяг виробництва другого підприємства, x_{1i} – обсяг i-го ресурсу, витраченого першим підприємством, x_{2i} – обсяг i-го ресурсу, витраченим другим підприємством.