1. НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Поняття функціонала

Поняття функціонала природно виникає при розв'язуванні широкого класу геометричних і фізичних задач. Для прикладу, розглянемо найпростішу задачу про обчислення площі фігури, обмеженої на площині XOY графіком неперервної однозначної функції $y = y(x)$, прямими $x = x_1$, $x = x_2$ та віссю абсцис OX (рис.1.1). Ця площа, як відомо, визначається інтегралом

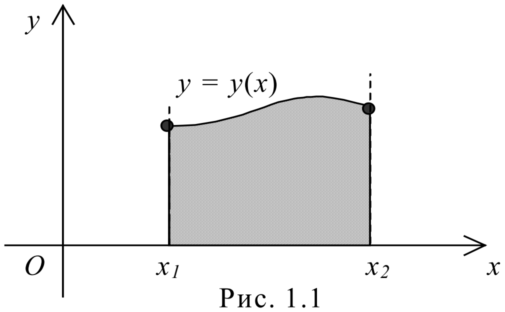

Рис. 1.1

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx \left| y(x) \right|, \qquad (1.1)$$

і тому набуває того чи іншого значення в залежності від функції $y = y(x)$. Іншими словами, площа S є функцією кривої $y = y(x)$, тобто числовою функцією від функції.

Означення 1.1.1. Кажуть, що на деякому класі функцій задано функціонал J, якщо вказано правило, за яким кожній функції $y(x)$ цього класу ставиться у відповідність певне число $J[y]$.

У наведеному прикладі функціонал площі $S = S[y]$ задається на класі $C([x_1, x_2])$ функцій, неперервних на відрізку $[x_1, x_2]$. Надалі під класом $C^k([x_1, x_2])$ розумітимемо множину функцій, неперервних на відрізку $[x_1, x_2]$ разом зі своїми *k*-першими похідними.

Клас функцій, на якому задано функціонал, називають *областю визначення функціонала*. Підкреслимо: щоб задати функціонал, треба вказати як правило відповідності, так і область визначення.

Завдання 1.1.1. Знайдіть явний вигляд та область визначення таких функціоналів:

а) довжина гладкої кривої $y = y(x)$;

б) площа поверхні, утвореної обертанням кривої $y = y(x)$ навколо осі OX;

в) об'єм тіла, обмеженого поверхнею обертання кривої $y = y(x)$ навколо осі OX та площинами $x = x_1$, $x = x_2$;

г) координати центра мас однорідної нитки, форма якої описується рівнянням $y = y(x)$.

Відповіді: а) $J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + y'^2(x)}$, $\quad C^1([x_1, x_2])$;

б) $J[y] = 2\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} dx|y(x)|\sqrt{1 + y'^2(x)}$, $\quad C^1([x_1, x_2])$;

с) $J[y] = \pi\int\limits_{x_1}^{x_2} dxy^2(x)$, $\quad C([x_1, x_2])$;

г) $X[y] = \dfrac{1}{M}\int\limits_{x_1}^{x_2} dxx\sqrt{1 + y'^2(x)}$, $\quad Y[y] = \dfrac{1}{M}\int\limits_{x_1}^{x_2} dxy\sqrt{1 + y'^2(x)}$, де

$M = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + y'^2(x)}$, $\quad C^1([x_1, x_2])$.

1.2. Основна задача варіаційного числення

Основна задача варіаційного числення полягає у відшуканні такої кривої (чи поверхні) $y_0(x)$, для якої значення $J[y_0]$ заданого функціонала є найменшим або найбільшим по відношенню до його значень $J[y]$ на всіх близьких до $y_0(x)$ кривих $y(x)$ із заданого класу функцій. Кривих (поверхонь) із цією властивістю може бути декілька; вони називаються *екстремалями* функціонала J.

Сформульована задача подібна до задачі диференціального числення про відшукання екстремумів функції $f(x)$, тобто тих значень x_0 змінної x, для яких величини $f(x_0)$ є найменшими або найбільшими у порівнянні зі значеннями $f(x)$ у достатньо близьких до x_0 точках.

Зупинимося на більш точних означеннях.

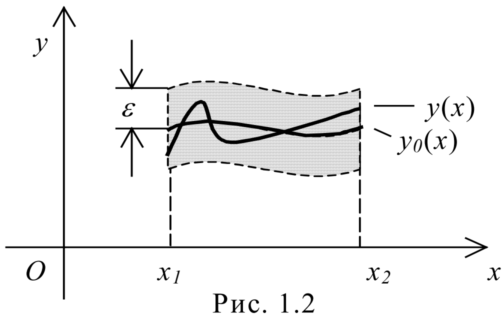

Рис. 1.2

Означення 1.2.1. ε-околом порядку k кривої $y_0(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$ називають множину всіх кривих $y(x)$, для яких скрізь на цьому проміжку виконуються нерівності

$$\left|y(x) - y_0(x)\right| \le \varepsilon, \quad \left|y'(x) - y_0'(x)\right| \le \varepsilon, ...,$$

$$\left|y^{(k)}(x) - y_0{}^{(k)}(x)\right| \le \varepsilon.$$

Число ε називають відстанню порядку k між кривими $y(x)$ і $y_0(x)$.

Означення 1.2.2. Кажуть, що функціонал J має на кривій $y_0(x)$ із заданої множини кривих класу $C^k([x_1, x_2])$ відносний екстремум, якщо нерівність $J[y] \le J[y_0]$ (або $J[y] \ge J[y_0]$) виконується для всіх кривих $y(x)$ цієї множини, належних ε-околові порядку k кривої $y_0(x)$. Якщо ж ця нерівність справджується для всіх кривих $y(x)$ заданої множини, розміщених у деякій області D площини XOY, то кажуть, що функціонал $J[y]$ набуває на кривій $y_0(x)$ абсолютного екстремуму в області D.

Завдання 1.2.1. Серед усіх плоских гладких кривих, що з'єднують задані точки $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$, вкажіть ту, що має найменшу довжину. Визначте тип екстремуму.

Відповідь: пряма $y(x) = y_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\left(y_2 - y_1\right)$; абсолютний.

1.3. Необхідна умова існування екстремуму функціонала. Теорема Ейлера-Лагранжа

Розглянемо найпростіший тип функціонала

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}dxF(x,y,y')\,, \tag{1.2}$$

де функція $F(x,y,y')$ є неперервною разом зі своїми першими та другими похідними за всіма аргументами в деякій області D площини XOY і при довільних значеннях похідної $y'(x)$.

Для дослідження необхідних умов існування екстремумів функціоналів виду (1.2) використовується наступний факт.

Лема 1.3.1. Якщо неперервна функція $f(x)$ задовольняє співвідношення

$$\int_{x_1}^{x_2}dxf(x)h(x)=0\,,$$

де $h(x)$ – довільна функція, що є гладкою на проміжку $[x_1,x_2]$ та дорівнює нулю на його кінцях ($h(x_1)=h(x_2)=0$), то скрізь на цьому проміжку $f(x)\equiv 0$.

Доведення. Припустимо, що твердження леми хибне. Тоді в деякій точці x_0 проміжку $[x_1,x_2]$ значення $f(x_0)\neq 0$, наприклад, $f(x_0)>0$. Унаслідок неперервності функція $f(x)$ буде додатною й у деякому околі $[x_0-\delta,x_0+\delta]$, $\delta>0$, точки x_0, який повністю належить $[x_1,x_2]$. Скориставшись тепер довільністю $h(x)$, візьмемо її у вигляді

$$h(x)=\begin{cases}0, & x_1\leq x<x_0-\delta,\\ \eta^2(x), & x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta,\\ 0, & x_0+\delta<x\leq x_2,\end{cases}$$

де $\eta(x)$ – довільна гладка функція, яка відмінна від нуля при $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ та дорівнює нулю при $x=x_0\pm\delta$. Дістаємо

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\,f(x)h(x)=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx\,f(x)\eta^2(x)>0\,,$$

що суперечить умові леми.

Зауважимо, що подібну лему можна довести й для кратних інтегралів. Її часто називають основною лемою варіаційного числення.

Лема 1.3.2. Нехай крива $y_0(x)$ повністю лежить в області D і є екстремаллю функціонала (1.2) у класі $C^2([x_1,x_2])$ функцій зі спільним початком і спільним кінцем (рис. 1.3):

$$y(x_1)=y_1\,,\quad y(x_2)=y_2\,. \tag{1.3}$$

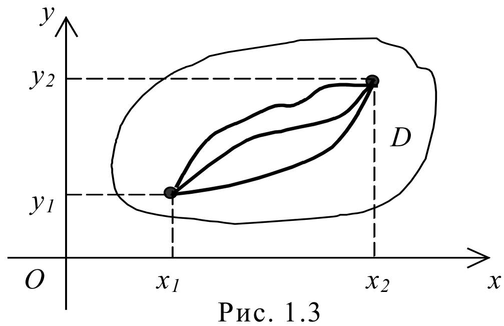

Рис. 1.3

Тоді вона задовольняє диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\,. \tag{1.4}$$

Доведення. Нехай $y_0(x)$ – екстремаль функціонала (1.2). Розглянемо множину кривих $y(x)=y_0(x)+\delta y(x)\equiv y_0(x)+\alpha h(x)$ з ε-околу другого порядку кривої $y_0(x)$. Тут δy – відхилення функції y від екстремалі, α – близький до нуля параметр ($|\alpha|\le\alpha_0$), $h(x)$ – довільна гладка функція, для якої $\max\limits_{x_1\le x\le x_2}\left\{|\delta y(x)|,|\delta y'(x)|,|\delta y''(x)|\right\}<\varepsilon$. На кінцях проміжку $y(x_i)=y_0(x_i)+\alpha h(x_i)$, або $y_i=y_i+\alpha h(x_i)$ ($i=1,2$), звідки $h(x_1)=h(x_2)=0$. Зауважимо, що криві $y(x)$ з області визначення функціонала називають *допустимими* кривими досліджуваної варіаційної задачі.

Функціонал (1.2) при підстановці в нього функції $y(x)$ являє собою функцію від параметра α:

$$\varphi(\alpha)=J[y_0+\alpha h]=\int\limits_{x_1}^{x_2}dxF(x,y_0+\alpha h,y_0'+\alpha h')\,,$$

яка при $\alpha=0$ має екстремум (оскільки $J[y_0]$ – екстремальне значення функціонала); тому $\varphi'(0)=0$.

Умови, які задовольняє функція $F(x,\alpha)\equiv F(x,y_0+\alpha h,y_0'+\alpha h')$, означають, що функції $F(x,\alpha)$ і $\partial F(x,\alpha)/\partial\alpha$ неперервні в прямокутнику $[x_1,x_2]\times[-\alpha_0,\alpha_0]$, $\alpha_0\cdot\max\limits_{x_1\le x\le x_2}\left\{|h(x)|,|h'(x)|\right\}<\varepsilon$, і тому диференціювання за α під знаком інтеграла є законним. Маємо:

$$\varphi'(\alpha)=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\left\{\left.\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\right|_{y=y_0+\alpha h,\,y'=y_0'+\alpha h'}\cdot h(x)+\left.\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right|_{y=y_0+\alpha h,\,y'=y_0'+\alpha h'}\cdot h'(x)\right\}.$$

Підставляючи $\alpha = 0$ та інтегруючи другий доданок частинами, дістаємо:

$$\varphi'(0) = \left.\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right|_{y=y_0,\, y'=y'_0} \cdot h(x)\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left.\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\right|_{y=y_0,\, y'=y'_0} - \frac{d}{dx} \left.\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right|_{y=y_0,\, y'=y'_0} \right\} h(x) = 0. \tag{1.5}$$

Перший доданок у формулі (1.5) після підстановки меж інтегрування дорівнює нулю. Другий доданок містить під знаком інтеграла довільну функцію $h(x)$; згідно з *Лемою 1.3.1*, він дорівнює нулю лише за умови, що дорівнює нулю вираз у фігурних дужках. Останній є ніщо інше, як рівняння (1.4), записане для функції $y_0(x)$.

Зробимо деякі зауваження і введемо ряд нових понять.

1) Можна довести, що рівняння (1.4) справджується й тоді, коли екстремум шукається на множині функцій із класу $C^1([x_1, x_2])$. Більше того, якщо функція $y_0(x)$ – екстремаль, то похідна $\partial F / \partial y'$ є на ній функцією, яка має повну похідну за x, а в тих точках кривої $y_0(x)$, де $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$, існує неперервна друга похідна $y''_0(x)$. Отже, необхідну умову існування екстремуму (відносного, абсолютного) функціонала (1.2) у класі гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем можна сформулювати таким чином:

Теорема Ейлера-Лагранжа. Для того щоб функція $y_0(x)$ із класу $C^1([x_1, x_2])$ надавала екстремум функціоналу (1.2) за умов (1.3), необхідно, щоб вона задовольняла рівняння (1.4). Якщо $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$ всюди на відрізку $[x_1, x_2]$, то $y_0(x) \in C^2([x_1, x_2])$.

2) У загальному випадку рівняння Ейлера-Лагранжа є *звичайним диференціальним рівнянням другого порядку* відносно функції $y(x)$. Серед двічі неперервно диференційовних функцій воно відбирає ті, що можуть бути екстремалями, але не обов'язково ними є. Відібрані функції, взагалі кажучи, залежать від двох довільних сталих інтегрування, тобто утворюють двопараметричну сім'ю кривих $y = y(x, C_1, C_2)$. Сталі C_1 і C_2 визначаються за допомогою умов (1.3) на межах проміжку $[x_1, x_2]$.

З упевненістю можна стверджувати, що функціонал (1.2) не має екстремалей, якщо рівняння Ейлера-Лагранжа взагалі не має розв'язків; або має розв'язки, але вони не задовольняють умови (1.3); або має розв'язки, що задовольняють умови (1.3), але не належать класу $C^1([x_1, x_2])$.

У задачах прикладного характеру факт існування гладкого екстремуму визначається, як правило, самою постановкою задачі.

Завдання 1.3.1. Які з гладких кривих, що проходять через задані початкову й кінцеву точки, можуть бути екстремалями таких функціоналів:

а) $J[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} dxy\,,\quad y(x_1)=y_1\,,\ y(x_2)=y_2\,;$

б) $J[y]=\int\limits_{0}^{2} dxxyy'\,,\quad y(0)=0\,,\ y(2)=1\,;$

в) $J[y]=\int\limits_{0}^{\pi} dx\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right),\quad y(0)=0\,,\ y(\pi)=1\,;$

г) $J[y]=\int\limits_{0}^{3} dx\left[\frac{1}{(1+x)}y^2+4(1+x)y'^2\right],\quad y(0)=0\,,\ y(3)=\frac{3}{2}\,;$

д) $J[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2(x)}\,,\quad y(x_1)=y_1\,,\ y(x_2)=y_2\,;$

е) $J[y]=\int\limits_{0}^{1} dxx^{2/3}y'^2\,,\quad y(0)=0\,,\ y(1)=1$ (приклад Гільберта);

є) $J[y]=\int\limits_{0}^{3/2} dx\left(2y+y'^3\right),\quad y(0)=0\,,\ y\left(\frac{3}{2}\right)=1\,;$

ж) $J[y]=\int\limits_{0}^{1} dxx^2y'^2\,,\quad y(0)=0\,,\ y(1)=1$ (приклад Вейєрштрасса);

з) $J[y]=\int\limits_{0}^{1} dx\left(y'^2-4yy'^3+2xy'^4\right),\quad y(0)=0\,,\ y(1)=0\,?$

Вказівки: в) загальний розв'язок рівняння $y''-y=-\sin x$ зручно шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння $y''-y=0$ та частинного розв'язку неоднорідного; останній шукайте у вигляді $y(x)=a\sin x+b\cos x$;

г) розв'язок рівняння $4(1+x)^2y''+4(1+x)y'-y=0$ шукайте у вигляді $y=c(1+x)^{\alpha}$; характеристичне рівняння має два корені α_1 і α_2, тому загальний розв'язок $y=c_1(1+x)^{\alpha_1}+c_2(1+x)^{\alpha_2}$.

Відповіді: а) екстремаль не існує (рівняння Ейлера-Лагранжа вироджується в неправильну тотожність); б) екстремаль не існує (рівняння Ейлера-Лагранжа зводиться до $y(x)=0$, і умова справа не виконується); в) $y(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\pi}$; г) $y(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$; д) див. *Завдання 1.2.1*; е) екстремаль не існує, оскільки розв'язок рівняння Ейлера-Лагранжа $y(x)=x^{1/3}$ не є функцією класу $C^1([0,1])$; є) $y(x)=(2x/3)^{3/2}$; ж) екстремаль не існує (умова зліва не виконується); з) $y(x)=0$.

3) Функцію $\delta y(x)$ називають *варіацією функції* $y(x)$, а величину $\Delta J[y]=J[y+\delta y]-J[y]$ – приростом функціонала $J[y]$, зумовленим варіацією δy. Головну (лінійну) за δy частину приросту функціонала називають *варіацією функціонала* $\delta J[y]$. Для знаходження $\delta J[y]$ у нашому випадку в різниці $\Delta J[y]$ досить виділити член, лінійний за α:

$$\Delta J[y]=J[y+\delta y]-J[y]=J[y+\alpha h]-J[y]=\varphi(\alpha)-\varphi(0)=$$
$$=\varphi(0)+\varphi'(0)\alpha+O(\alpha^2)+\ldots-\varphi(0)=\varphi'(0)\alpha+O(\alpha^2)+\ldots.$$

Відокремлюючи перший доданок, маємо:

$$\delta J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right\}dx.$$

Якщо $y(x)\in C^2([x_1,x_2])$, то, враховуючи формулу (1.5), знаходимо:

$$\delta J[y]=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y(x)\bigg|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}\delta y(x)dx.$$

Для кривих із закріпленими кінцями

$$\delta J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}\delta y(x)dx. \tag{1.6}$$

Для екстремальної кривої $y=y_0(x)$ маємо: $\delta J[y_0]=0$. Це співвідношення нагадує теорему Ферма для точок екстремуму x_0 функції $f(x)$: $df(x_0)=0$. Аналогія між повним диференціалом функції та варіацією функціонала дозволяє шукати останній за звичайними правилами знаходження диференціала $df(x) = f'(x)dx$, тільки тепер у ролі приросту аргументу dx виступає варіація функції δy, і підінтегральний вираз у формулі для $\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]$ формально розвивається в ряд за δy. Варіацію δy можна диференціювати один або декілька разів, причому $\dfrac{d^k \delta y}{dx^k} = \delta \dfrac{d^k y}{dx^k}$.

Підкреслимо: якщо існує варіація функціонала як диференціал за параметром (див. Лему 1.3.2), то існує й варіація функціонала як головна лінійна частина приросту функціонала, і ці два означення рівносильні.

Внески в $\Delta J[y]$, пропорційні другому та більш високим степеням δy, називають другою варіацією ($\delta^2 J[y]$) та варіаціями вищих порядків.

1.4. Функціональна похідна. Інваріантність рівняння Ейлера–Лагранжа відносно перетворення координат

Аналогом похідної у варіаційному численні виступає функціональна похідна. Виберемо варіацію δy так, щоб вона відрізнялася від нуля в малому Δ-околі точки x_0, тобто щоб криві y та $y + \delta y$ збігалися скрізь на проміжку $[x_1, x_2]$, за винятком інтервалу $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \subset [x_1, x_2]$ (рис. 1.4).

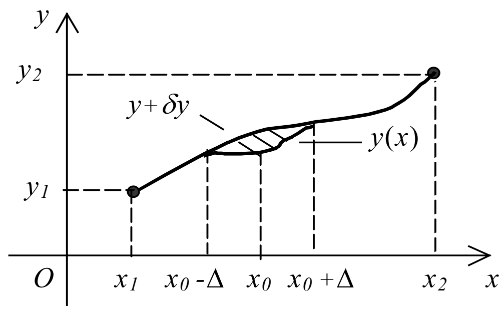

Рис. 1.4

Користуючись теоремою про середнє, інтеграл (1.6) перепишемо у вигляді

$$\delta J[y] = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\}\Bigg|_{x=\tilde{x}_0} \cdot S ,$$

де $S = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx \delta y(x)$ – з точністю до знака площа (заштрихованої області) між кривими y та $y + \delta y$ (називатимемо її площею Δ-околу), $\tilde{x}_0$ - деяка точка з Δ-околу.

Функціональною похідною за кривою y у точці x_0 називають границю відношення

$$\frac{\delta J[y]}{\delta y} \equiv \lim_{\Delta \to 0} \frac{\delta J[y]}{S} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\}\Bigg|_{x=x_0} . \qquad (1.7)$$

Функціональна похідна вздовж екстремальної кривої дорівнює нулю в кожній точці цієї кривої.

Поняття функціональної похідної дозволяє досить просто довести той факт, що властивість кривої бути екстремаллю є інваріантна відносно перетворення координат.

Теорема 1.4.1. Нехай крива $y = y_0(x)$ є екстремаллю функціонала (1.2) на множині кривих, що з'єднують точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2). Крім того, нехай після переходу від координат (x, y) до криволінійних координат (t, q) за формулами

$$x = \varphi(t, q), \qquad y = \psi(t, q),$$

з відмінним від нуля якобіаном переходу

$$I \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0,$$

її рівняння набирає вигляду $q = q_0(t)$, а функціонал $J[y]$ перетворюється на функціонал $J_1[q]$

$$J[y] = J_1[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q, q') \qquad (1.8)$$

від кривих $q = q(t)$, що з'єднують точки (t_1, q_1) і (t_2, q_2) на площині TOQ, де $x_i = \varphi(t_i, q_i)$, $y_i = \psi(t_i, q_i)$, $i = 1,2$. Тоді екстремум функціонала $J_1[q]$ досягається саме на кривій $q = q_0(t)$, яка буде розв'язком рівняння Ейлера-Лагранжа для $J_1[q]$:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = 0 . \qquad (1.9)$$

Іншими словами, якщо загальний розв'язок рівняння (1.4) має вигляд $y = y_0(x, C_1, C_2)$, то загальний розв'язок рівняння (1.9) визначається як неявна функція $q = q_0(t)$, що задовольняє рівняння $\psi(t, q_0(t)) = y_0(\varphi(t, q_0(t)), C_1, C_2)$.

Доведення. Справді, якщо в околі кожної точки x_0 з інтервалу (x_1, x_2) для екстремальної кривої виконується співвідношення

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\delta J[y]}{S}=0\,,$$

то й в околі кожної відповідної точки t_0 з інтервалу (t_1, t_2) функціональна похідна від $J_1[q]$ дорівнюватиме нулю:

$$\lim_{\Delta_1\to 0}\frac{\delta J_1[q]}{S_1}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\delta J[y]}{S}\frac{S}{S_1}=0\,,$$

оскільки відношення площ S і S_1 старого й нового околів прямує до детермінанта I, який не дорівнює нулю.

Інваріантність рівняння Ейлера-Лагранжа відносно перетворення координат дозволяє при розв'язуванні конкретних геометричних та фізичних задач в однаковій мірі користуватися різними криволінійними системами координат, лише б вони були взаємно однозначно пов'язані з декартовими. Перехід до криволінійних координат, наприклад, сферичних, стає особливо ефективним у тому випадку, коли система має відповідну симетрію, зокрема, сферичну, оскільки тоді рівняння Ейлера-Лагранжа набирають найбільш простого вигляду. Зауважимо, що перехід до нових координат можна здійснювати безпосередньо в підінтегральному виразі (1.2), а потім для нового інтеграла писати рівняння Ейлера-Лагранжа – це й буде початкове рівняння в декартових координатах, віднесене до нових змінних.

1.5. Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера-Лагранжа

Як уже зазначалося, рівняння Ейлера-Лагранжа є, взагалі кажучи, звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, і тому знаходження його розв'язків є в більшості випадків задачею значно складнішою, ніж розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. У зв'язку з цим особливий інтерес привертають умови, за яких його порядок можна понизити чи, навіть, це рівняння можна аналітично розв'язати. Виявляється, що це можливо в тих випадках, коли ядро $F(x, y, y')$ функціонала (1.2) не залежить від одного чи двох своїх аргументів. У фізичних задачах відсутність такої залежності є проявом певних симетрій, наприклад, простору та часу, що призводять до виконання відповідних законів збереження.

Зупинимося на цьому більш детально. Нагадаємо, що під x і y можна розуміти довільні криволінійні координати.

1) Якщо $F = F(y')$, тобто залежить лише від похідної y', то $\partial F/\partial y = 0$ і $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{dx}$. Рівняння (1.4) зводиться до

$$y''\left(\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2}\right) = 0, \tag{1.10}$$

і хоча б один із співмножників повинен дорівнювати нулю. Нехай $y''(x) = 0$, тоді $y'(x) = C_1$, $y(x) = C_1 x + C_2$. Ці криві утворюють двопараметричну сім'ю прямих. В іншому можливому випадку, коли

$$\left(\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2}\right) \equiv f(y') = 0,$$

рівняння $f(y') = 0$ є функціональним рівнянням відносно похідної y'. Нехай $y_i'(x) \equiv k_i$ – усі його дійсні корені (їх може й не бути). Тоді $y_i(x) = k_i x + C$. Ці криві утворюють більш вузьку однопараметричну (k_i – фіксовані числа) сім'ю прямих, що входить до зазначеної вище двопараметричної.

Таким чином, у випадку, коли $F = F(y')$, екстремалями функціонала (1.2) можуть бути лише прямі

$$y(x) = C_1 x + C_2. \tag{1.11}$$

2) Якщо $F = F(x, y)$, тобто не залежить від похідної y', то $\partial F/\partial y' = 0$, і рівняння (1.4) вироджується у функціональне відносно $y(x)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \equiv g(x, y) = 0. \tag{1.12}$$

Якщо розв'язки $y_i = y_i(x)$ рівняння (1.12) існують, то, на відміну від розв'язків диференціального рівняння, вони не містять довільних сталих, підбором яких задовольняють умови (1.3). Знайдені функції $y_i(x)$ підпорядковуватимуться умовам (1.3) лише у виключних ситуаціях, тобто в загальному випадку відповідний функціонал не матиме екстремалей.

3) Якщо F залежить від y' лінійно, тобто має вигляд $F = a(x,y) + b(x,y)y'$, де $a(x,y)$, $b(x,y)$ – деякі функції, то рівняння Ейлера-Лагранжа знову вироджується у функціональне:

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \equiv g(x,y) = 0 .$$

Як щойно було зазначено, розв'язок подібного рівняння у загальному випадку не задовольняє умови в крайніх точках, і тому функціонал (1.2), найімовірніше, екстремалей не має. Більше того, варіаційна задача взагалі втрачає зміст, якщо

$$\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \equiv 0 ,$$

бо тоді вираз $a(x,y)dx + b(x,y)dy$ є повним диференціалом, і значення функціонала (1.2) залежать лише від початкової та кінцевої точок, а не від вибору кривої $y = y(x)$.

4) $F = F(x, y')$, тобто не залежить явно від y (змінну y у цьому випадку називають *циклічною*). Тоді $\partial F / \partial y = 0$, і рівняння (1.4) набирає вигляду

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} = 0 .$$

Його відразу можна один раз проінтегрувати; іншими словами, рівняння Ейлера-Лагранжа має перший інтеграл

$$\frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} = C_1 . \tag{1.13}$$

Це є диференціальне рівняння першого порядку, яке не залежить явно від функції $y(x)$. Розв'язавши його відносно y', отримаємо рівняння або декілька рівнянь типу $y' = f(x, C_1)$, звідки $y(x)$ знаходимо інтегруванням:

$$y(x) = \int dx f(x, C_1) + C_2 . \tag{1.14}$$

5) $F = F(y, y')$, тобто не залежить явно від x. Помноживши обидві частини виразу

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' = 0$$

на y', перепишемо його як повну похідну

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

(перевірте!). Відповідно, рівняння Ейлера-Лагранжа має перший інтеграл

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 . \tag{1.15}$$

Це диференціальне рівняння першого порядку, яке не залежить явно від x. Розв'язавши його відносно y', дістанемо рівняння або декілька рівнянь типу $y' = f(y, C_1)$. Після відокремлення змінних та інтегрування, функції y знаходимо із співвідношення

$$\int \frac{dy}{f(y, C_1)} = x + C_2 . \tag{1.16}$$

Зауваження. Інтеграли (1.13) і (1.15) інколи називають *інтегралом імпульсу* та *інтегралом енергії*. Ці назви походять із класичної механіки, де кожній механічній системі, підпорядкованій ідеальним в'язям, ставиться у відповідність певна функція $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ від $s \geq 1$ *узагальнених координат* $q_k(t)$ та *узагальнених швидкостей* $\dot{q}_k$ точок системи, а також часу t. Нагадаємо, що узагальненими координатами називають будь-які величини (не обов'язково декартові координати точок системи), за допомогою яких можна однозначно задати положення системи у просторі. Узагальнені швидкості означаються як похідні $\dot{q}_k \equiv dq_k(t)/dt$.

Функцію $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ називають *функцією Лагранжа*; вона дорівнює різниці кінетичної K та потенціальної Π енергій системи як функцій змінних $q_k(t)$ і $\dot{q}_k(t)$. Її похідні

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \qquad F_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{1.17}$$

називаються відповідно *узагальненими імпульсами* та *узагальненими силами*. Повна енергія механічної системи

$$E = K + \Pi = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L . \tag{1.18}$$

Згідно з *принципом найменшої дії* (*принципом Гамільтона*), рух системи на проміжку часу $[t_1, t_2]$ між двома фіксованими положеннями, які характеризуються значеннями $q_k(t_1)$ і $q_k(t_2)$ узагальнених координат точок системи, відбувається так, що функціонал дії

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{1.19}$$

набуває екстремального (зазвичай – мінімального) значення:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) = 0 . \tag{1.20}$$

Для одновимірної системи з одним ступенем вільності $q(t)$ необхідною умовою для цього є виконання рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 . \tag{1.21}$$

Як буде показано далі, при наявності s ступенів вільності $q_k(t)$ еволюція останніх від початкового положення $q_k(t_1)$ до кінцевого $q_k(t_2)$ визначається системою диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 , \quad k = 1,2,...,s . \tag{1.22}$$

Система рівнянь (1.22) залишається інваріантною відносно вибору узагальнених координат $q_k(t)$. Для знаходження сталих інтегрування в розв’язках цих рівнянь замість умов типу (1.3) (тобто значень координат точок системи в початковий та кінцевий моменти часу: $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$ і $q_k(t_2) = q_k^{(2)}$) використовують так звані початкові умови – значення координат і швидкостей у початковий момент часу t_1: $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$, $\dot{q}_k(t_1) = v_k^{(1)}$ (зазвичай вважають, що $t_1 = 0$). У фізичному плані це означає, що рух механічної системи жорстко детермінований: при відомому рівнянні руху він повністю визначається початковими координатами та початковими швидкостями точок системи*).

---

*) Для диференціальних рівнянь другого порядку початкові умови гарантують єдиність розв’язку при довільних значеннях $\left(q_k^{(1)}, v_k^{(1)}\right)$ (окрім спеціальних випадків, коли t_1 – особлива точка). Умови ж на кінцях проміжку $[t_1, t_2]$ не гарантують взагалі існування відповідної траєкторії. Наприклад, для умов $q(0) = a$, $q(2\pi/\omega) = b$

За допомогою позначень (1.17) рівняння руху (1.22) набирають вигляду рівнянь Ньютона, записаних для узагальнених імпульсів та узагальнених сил:

$$\dot{P}_k = F_k\,, \qquad k = 1,2,...,s\,. \tag{1.23}$$

У порівнянні з рівняннями Ньютона, записаними для кожної матеріальної точки системи, рівняння (1.22), (1.23) мають ту перевагу, що їх кількість дорівнює кількості ступенів вільності системи, і при наявності в'язей, що обмежують рух системи, є меншою від $3N$, тобто є меншою від кількості рівнянь Ньютона, потрібних для опису системи N матеріальних точок. Крім того, у рівняння Ейлера-Лагранжа не входять сили реакції в'язей, які наперед невідомі.

Завдання 1.5.1. Для наведених функціоналів знайдіть можливі екстремалі, які проходять через задані точки:

а) $J[y] = \int\limits_0^1 dx \cos y'\,, \qquad y(0) = 0\,,\; y(1) = \pi\,;$

б) $J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} dx\left(y^2 - y'^2\right), \qquad y(0) = 0\,,\; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1\,;$

в) $J[y] = \int\limits_0^2 dx\left(y^2 x^2 + y^4\right), \qquad y(0) = 0\,,\; y(2) = 2\,;$

г) $J[y] = \int\limits_1^2 dx x^2 y'^2\,, \qquad y(1) = 3\,,\; y(2) = 1\,;$

д) $J[y] = \int\limits_0^1 dx e^y y'^2\,, \qquad y(0) = 0\,,\; y(1) = \ln 4\,;$

е) $J[y] = \int\limits_0^3 dx\left(y'^3 - y'^2\right), \qquad y(0) = 0\,,\; y(3) = 1\,;$

є) $J[y] = \int\limits_1^2 dx \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}\,, \qquad y(1) = 0\,,\; y(2) = -1\,;$

розв'язок рівняння $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ на проміжку $[0, 2\pi/\omega]$ існує лише при $a = b$, і при виконанні цієї умови існує нескінченно багато розв'язків цього рівняння.

ж) $J[y]=\int\limits_0^7 dx\left(y'^2-yy'^2\right)$, $\quad y(0)=2$, $y(7)=5$;

з) $J[y]=\int\limits_0^1 dx\left(y^2-y'^2\right)e^{2x}$, $\quad y(0)=0$, $y(1)=e$;

и) $J[y]=\int\limits_0^4 dxy^2y'^2$, $\quad y(0)=1$, $y(4)=3$;

і) $J[y]=\int\limits_0^1 dx\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$, $\quad y(0)=1$, $y(1)=1$ $(y>0)$;

ї) $J[y]=\int\limits_0^2 dx\left(xy^2+x^2yy'\right)$, $\quad y(0)=0$, $y(2)=2$.

Вказівка. Екстремальну криву можна шукати або розв'язуючи диференціальне рівняння другого порядку (1.4), або за допомогою перших інтегралів (1.13), (1.15) (якщо вони існують), тобто інтегруючи відповідне диференціальне рівняння першого порядку. Вибір того чи іншого способу визначається міркуваннями простоти та зручності обчислень. У зв'язку з цим зверніть увагу на приклади б), д), є), ж), и), і).

Відповіді: а) $y(x)=\pi x$; б) $y(x)=\sqrt{2}\sin x$; в) екстремаль не існує; г) $y(x)=-1+4/x$; д) $y(x)=2\ln(x+1)$; е) $y(x)=x/3$; є) $y(x)=-2+\sqrt{5-x^2}$; ж) $y(x)=1+(1+x)^{2/3}$; з) $y(x)=xe^{2-x}$; и) $y(x)=\sqrt{2x+1}$; і) $y(x)=\sqrt{1+x-x^2}$; ї) варіаційна задача не має змісту.

Завдання 1.5.2. По якій траєкторії повинен рухатися літак, щоби при сталому горизонтальному вітрові та сталій висоті польоту долетіти з початкової точки в кінцеву за найкоротший час. (Окремий випадок аеронавтичної задачі Цермелло).

Розв'язання. Обмежимося випадком плоского польоту та нехтуватимемо рухом земної поверхні. Нехай літак рухається у площині XOY із початкової точки $M(x_1, y_1)$ у кінцеву $N(x_2, y_2)$ вздовж гладкої кривої $y(x)$ (див. рис. 1.5). Швидкість руху літака $\mathbf{u}$ відносно землі

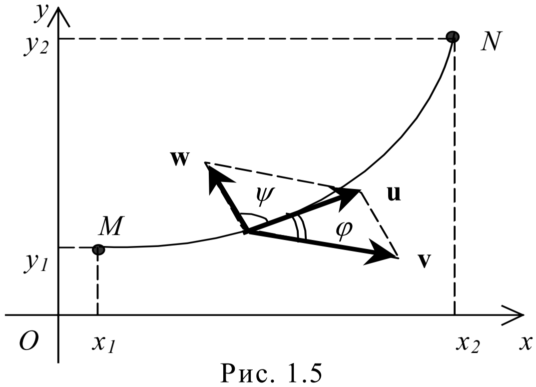

Рис. 1.5

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \qquad (1')$$

де $\mathbf{v}$ – швидкість літака відносно повітря, $\mathbf{w}$ – швидкість вітру відносно землі. За величиною швидкість $(1')$ дорівнює $u = dl/dt$, де $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ – елемент довжини траєкторії літака, dt – час, потрібний літаку, щоб його пройти. Зауважимо, що швидкість літака вздовж елементарної ділянки практично не змінюється.

Позначимо кути між векторами $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ та $\mathbf{w}$ через, відповідно, φ і ψ. Спроектуємо вираз $(1')$ на напрям вектора $\mathbf{u}$ та на перпендикулярний до нього:

$$u = v\cos\varphi + w\cos\psi, \qquad v\sin\varphi = w\sin\psi.$$

Звідси знаходимо: $u = w\cos\psi + \sqrt{v^2 - w^2\sin^2\psi}$.

Одиничні орти вздовж векторів $\mathbf{u}$ та $\mathbf{w}$ мають координати $\mathbf{n}_u = \left(\dfrac{dx}{dl}, \dfrac{dy}{dl}\right)$, $\mathbf{n}_w = \left(\dfrac{w_x}{w}, \dfrac{w_y}{w}\right)$, тому $\cos\psi = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_w = \dfrac{dx}{dl}\dfrac{w_x}{w} + \dfrac{dy}{dl}\dfrac{w_y}{w}$.

Щоб знайти час польоту літака з точки M у точку N, розіб'ємо всю траєкторію $y = y(x)$ на малі ділянки dl_i, на яких значення u_i швидкості літака практично сталі, додамо проміжки часу $dt_i = dl_i/u_i$, за які літак проходить ці ділянки, та перейдемо до границі здобутої інтегральної суми при $dl_i \to 0$. Дістаємо:

$$T[y] = \int\limits_{MN} \frac{dl}{u} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx\left(1 + y'^2\right)}{\left(w_x + y'w_y\right) + \sqrt{v^2\left(1 + y'^2\right) - \left(w_x y' - w_y\right)^2}}.$$

Отже, серед усіх кривих, що з'єднують точки M та N, треба відшукати ту, для якої функціонал $T[y]$ набуває (при заданих значеннях швидкості $v(x)$ і проекцій $w_x(x)$, $w_y(x)$) мінімального значення.

Якщо швидкість вітру відносно землі та швидкість літака відносно повітря сталі, то підінтегральний вираз залежить явно лише від похідної $y'(x)$. Тоді траєкторією польоту буде пряма, що з'єднує точки M та N.

Завдання 1.5.3. Знайдіть траєкторію, по якій повинен рухатися літак над поверхнею земної кулі, щоби при сталій швидкості, незмінній висоті польоту та відсутності повітряних потоків долетіти з початкової точки в кінцеву за найкоротший час. Обертанням земної кулі знехтуйте.

Розв'язання. Нехай траєкторія літака лежить на поверхні сфери радіуса R:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta, \tag{1'}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi .$$

Оскільки швидкість літака стала, серед усіх кривих на поверхні сфери, що з'єднують початкову та кінцеву точки з координатами, скажімо, (R, θ_1, φ_1) та (R, θ_2, φ_2), треба відшукати найкоротшу. Квадрат елемента довжини на поверхні сфери $dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$; внаслідок цього шукана крива $\varphi = \varphi(\theta)$ є екстремаллю функціонала

$$L[\varphi] = R\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2},$$

де $\varphi' \equiv d\varphi/d\theta$. Підінтегральна функція в ньому не залежить від змінної φ, тому можна скористатися першим інтегралом (1.13) відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\sin^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}} = C_1 .$$

Звідси

$$\varphi' = \frac{C_1}{\sin^2\theta\sqrt{1-\dfrac{C_1^{\,2}}{\sin^2\theta}}} .$$

Відокремивши змінні φ і θ, та перейшовши до нової змінної $u = \operatorname{ctg}\theta$, дістаємо:

$$d\varphi = -\frac{C_1 du}{\sqrt{1 - C_1^{\ 2} - C_1^{\ 2} u^2}},$$

звідки

$$\varphi + C_2 = \arccos\left(\frac{C_1 u}{\sqrt{1 - C_1^{\ 2}}}\right).$$

Остаточно маємо:

$$C_1^{\ *} \operatorname{ctg}\theta = \cos(\varphi + C_2), \qquad (2')$$

де $C_1^{\ *} \equiv C_1 \Big/ \sqrt{1 - C_1^{\ 2}}$, а C_2 – ще одна стала інтегрування. Ці сталі знаходимо з умови, що крива ($2'$) починається в точці (R, θ_1, φ_1) і закінчується в точці (R, θ_2, φ_2):

$$C_1^{\ *} \operatorname{ctg}\theta_1 = \cos(\varphi_1 + C_2),$$
$$C_1^{\ *} \operatorname{ctg}\theta_2 = \cos(\varphi_2 + C_2).$$

Якщо $C_1^{\ *} = 0$, то $\varphi = const$. У цьому випадку траєкторія є відрізком меридіана сфери, тобто великого кола, що проходить через її полюси.

Якщо $C_1^{\ *} \neq 0$, перепишемо ($2'$) у вигляді

$$\operatorname{ctg}\theta = A\cos\varphi + B\sin\varphi,$$

де A і B – деякі комбінації сталих, і повернемося за допомогою формул ($1'$) до декартових координат:

$$z = Ax + By.$$

У цьому випадку траєкторія теж виявляється відрізком великого кола, яке є перерізом сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та площини $z = Ax + By$, що проходить через її центр.

Завдання 1.5.4. Серед усіх кривих, що з'єднують задані точки A і B у вертикальній площині (точки не лежать на одній вертикалі), віднайдіть ту, рухаючись вздовж якої під впливом сили тяжіння матеріальна точка пройде шлях від A до B за найкоротший час. Початкова швидкість точки дорівнює нулю, тертя та опір середовища нехтовно малі. (Задача про брахістохрону І. Бернуллі).

Вказівки. Нехай маса матеріальної точки m, прискорення вільного падіння g. Напрямимо вісь OX горизонтально, вісь OY – вертикально вниз, початок координат помістимо в точку A, а координати точки B позначимо через (l,h) (див. рис. 1.6). Щоб знайти час $T[y]$, потрібний матеріальній точці для руху вздовж шуканої кривої $y(x)$, візьмемо до уваги, що ділянку dl із координатами кінців (x,y), $(x+dx, y+dy)$ та довжиною $dl = \sqrt{1+y'^2(x)}dx$ точка проходить за час $dt = dl/v(y)$, де $v(y)$ – швидкість точки на цій ділянці. Останню знаходимо із закону збереження механічної енергії: $\frac{1}{2}mv^2(y) = mgy$ (початкова швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, потенціальну енергію відраховуємо від осі OX). Дістаємо:

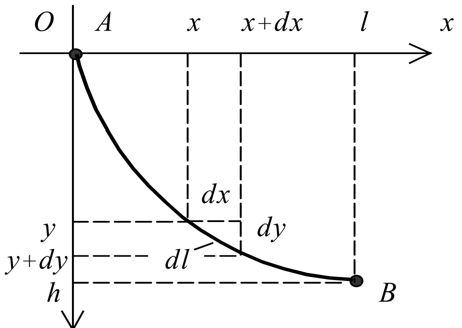

Рис. 1.6

$$T[y] = \int_0^l dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Для знаходження екстремалей цього функціонала скористайтеся інтегралом (15) та підстановкою $y' = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$; відповідь подайте в параметричному вигляді $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, де $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$. Точці A зручно віднести значення $\varphi_1 = 0$: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Для точки B, де $\varphi = \varphi_2$, можна записати: $x(\varphi_2) = l$, $y(\varphi_2) = h$.

Відповідь. *Брахістохрони*, тобто екстремалі функціонала часу $T[y]$, належать сім’ї *циклоїд*

$$x(\varphi) = C_1(\varphi - \sin\varphi) + C_2, \qquad y(\varphi) = C_1(1 - \cos\varphi).$$

З умов у точці A випливає, що $C_2 = 0$; сталі φ_2 і C_1 знаходяться із співвідношень

$$\frac{1-\cos\varphi_2}{\varphi_2 - \sin\varphi_2} = \frac{h}{l}, \qquad C_1 = \frac{h}{1-\cos\varphi_2}.$$

Зауважимо, що стала C_1 дорівнює радіусу R кола, що творить циклоїду (кожна точка кола описує циклоїду, коли воно котиться без ковзання вздовж осі OX), а φ_2 – куту, на який треба повернути коло, щоб його верхня в початковий момент точка перемістилася з положення A в положення B (рис. 1.7).

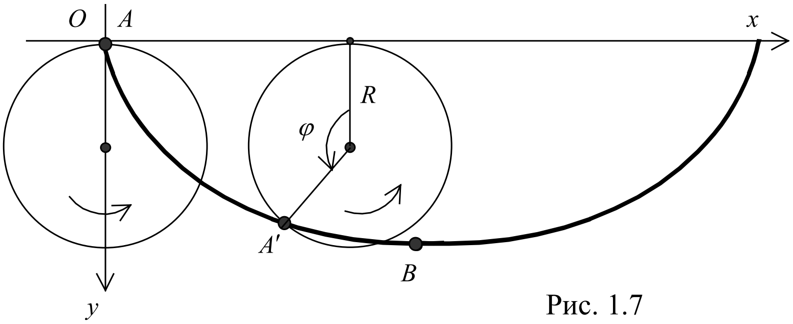

Рис. 1.7

Часова залежність координат матеріальної точки при русі вздовж брахістохрони знаходиться за допомогою рівняння руху (1.21).

Завдання 1.5.5. Матеріальна точка рухається в однорідному полі тяжіння вздовж гладкої циклоїди, розміщеної у вертикальній площині. Знайдіть закон руху точки, якщо радіус твірного кола циклоїди дорівнює *R*, і рух починається з найвищої точки циклоїди (точка A на рис. 1.7). (Циклоїдальний маятник).

Розв'язання. Нехай миттєве положення A' точки на циклоїді в момент часу t задається кутом повороту $\varphi = \varphi(t)$ радіуса твірного кола відносно від'ємного напряму осі OY (див. рис. 1.7). Декартові координати точки в цей момент

$$x(t) = R(\varphi - \sin\varphi), \qquad y(t) = R(1 - \cos\varphi).$$

Записавши $dx = R(1-\cos\varphi)d\varphi$, $dy = R\sin\varphi d\varphi$, знаходимо декартові компоненти швидкості:

$$\dot{x}(t) = R(1-\cos\varphi)\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}(t) = R\sin\varphi\dot{\varphi},$$

та довжину $l = l(\varphi)$ дуги AA' циклоїди:

$$l = \int\limits_{AA'} dl = 2R\int\limits_0^{\varphi} d\varphi \sin\frac{\varphi}{2} = 4R\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Функція Лагранжа точки $L = K - \Pi$, де

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 2mR^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = -mgy = -2mgR\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2mgR\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2mgR.$$

Відповідне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

досить складне. Зручніше скористатися його інваріантністю відносно перетворень координат та перейти до нової узагальненої координати $s = 4R - l = 4R\cos\frac{\varphi}{2}$, яка описує зміщення матеріальної точки від найнижчої точки циклоїди. Опустивши несуттєву сталу в потенціальній енергії, маємо:

$$K = \frac{m}{2}\dot{s}^2, \qquad \Pi = \frac{mg}{8R}s^2.$$

Нове рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = 0$$

зводиться до рівняння руху гармонічного осцилятора

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{1.24}$$

з частотою коливань $\omega_0 = \sqrt{g/4R}$. Його загальний розв’язок має вигляд

$$s(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t. \tag{1.25}$$

Сталі C_1 і C_2 знаходимо з початкових умов $l(0) = 0$, $\dot{l}(0) = 0$, тобто $s(0) = 4R$, $\dot{s}(0) = 0$. Дістаємо: $C_1 = 4R$, $C_2 = 0$.

Рух точки вздовж циклоїди є *ізохронним* – при довільних початкових відхиленнях $s(0) \le 4R$ точка досягає найнижчого положення за однакові проміжки часу, які дорівнюють чверті її періоду коливань.

Час t^*, який точка витрачає на проходження брахістохрони AB (див. *Завдання 1.5.4*), знаходимо із співвідношення

$$s(t^*) = 4R - l_{AB} = 4R\cos\frac{\varphi_2}{2},$$

звідки $t^* = \varphi_2 / 2\omega_0$.

Завдання 1.5.6. Матеріальну точку підвісили на нерозтяжній невагомій нитці довжиною l та, відхиливши на кут φ_0, плавно відпустили. Опишіть рух точки. (Математичний маятник).

Розв'язання. Найбільш зручною узагальненою координатою є кут $\varphi = \varphi(t)$, який описує відхилення маятника від положення рівноваги (рис. 1.8). Тоді:

$$x(t) = l\sin\varphi, \quad y(t) = l\cos\varphi.$$

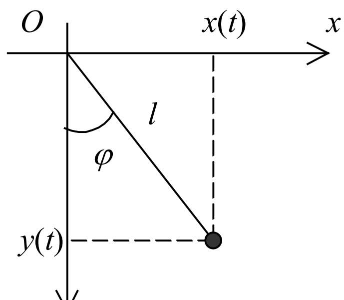

Рис. 1.8

Кінетична та потенціальна енергія (за нульовий рівень якої вибираємо пряму $y = 0$) дорівнюють:

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mgy = -mgl\cos\varphi.$$

Рівняння руху математичного маятника має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}. \tag{1.26}$$

Воно зводиться до рівняння гармонічних коливань (1.24) лише у випадку малих кутів відхилення ($\varphi << 1$) від положення рівноваги.

Щоб розв'язати (1.26), скористаємося тим, що функція Лагранжа не залежить явно від часу – справджується закон збереження енергії:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\omega_0\sqrt{2\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)} = \pm 2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Із двох знаків перед коренем залишаємо нижній, оскільки на початковій стадії руху кут φ повинен зменшуватися: $d\varphi/dt < 0$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо:

$$I(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=-\omega_0 t+C\,. \qquad (1')$$

Сталу C знаходимо за допомогою початкової умови $\varphi(0)=\varphi_0$. Вона дорівнює інтегралу в ($1'$), обчисленому в межах від 0 до φ_0: $C=I(\varphi_0)$.

Зробимо в $I(\varphi)$ підстановку $\sin x=\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\frac{\varphi_0}{2}$. Тоді

$$\cos x=\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}\Big/\sin\frac{\varphi_0}{2}, \qquad d\varphi=2dx\cos x\sin\frac{\varphi_0}{2}\Big/\cos\frac{\varphi}{2},$$

і $I(\varphi)$ набирає вигляду

$$I(\varphi)=\int_0^{x}\frac{dx'}{\cos\frac{\varphi}{2}}=\int_0^{x}\frac{dx'}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 x'}}\equiv K(x,\alpha),$$

де позначено $\alpha\equiv\sin\frac{\varphi_0}{2}$, $x=x(\varphi)\equiv\arcsin\left(\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\alpha\right)$, а $K(x,\alpha)$ – так званий еліптичний інтеграл першого роду, який через елементарні функції не виражається. Зауважимо також, що $x(0)=0$, $x(\varphi_0)=\pi/2$.

Замість ($1'$) маємо:

$$K(x,\alpha)=-\omega_0 t+K\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right).$$

Обчислюючи обидві частини цієї рівності при фіксованому α та різних значеннях x, можемо знайти залежність t від x, потім відшукати обернену залежність $x=\widetilde{x}(t)$, а, отже, й закон руху маятника:

$$\varphi(t)=2\arcsin\left[\alpha\sin\widetilde{x}(t)\right].$$

Період коливань маятника $T=4\tau$, де τ – час, за який маятник зміщується із крайнього положення $\varphi=\varphi_0$ в положення рівноваги $\varphi=0$, для якого $x=0$. Можемо записати: $K(0,\alpha)=-\omega_0\tau+K\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)=0$, звідки

$$T = \frac{4}{\omega_0} K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right).$$

Для більшості реальних ситуацій $\alpha << 1$, тому підінтегральний вираз в еліптичному інтегралі можна розвинути в ряд за степенями $\alpha \sin x$:

$$K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}} = \int\limits_0^{\pi/2} dx\left[1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \sin^2 x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^4 \sin^4 x + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \ldots\right].$$

Отже, період коливань математичного маятника дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right].$$

Для випадку малих коливань, коли $\varphi_0 << 1$, $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, $K(x,\alpha) \approx x(\varphi) \approx \mathrm{acrsin}\frac{\varphi}{\varphi_0}$, $K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \approx \frac{\pi}{2}$, маємо: $\mathrm{acrsin}\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\pi}{2} - \omega_0 t$, звідки

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega_0 t.$$

Таким чином, лише малі коливання математичного маятника є ізохронними, з незалежним від амплітуди періодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При $\varphi_0 \le 15^0$ різниця між значеннями T і T_0 не перевищує 0,5%.

1.6. Екстремальні принципи у фізиці

Принцип найменшої дії Гамільтона, який було сформульовано в попередньому параграфі для механічних систем матеріальних точок, є найбільш загальним формулюванням закону їх руху. Його перевага перед іншими полягає в тому, що він легко поширюється на системи іншої фізичної природи, наприклад, електромагнітне поле, поля елементарних частинок чи кварк-глюонні поля. А саме, кожній такій системі ставиться у відповідність функціонал дії S, який залежить від координат точкових мас і часу, а у випадку полів – від векторних або скалярних польових функцій від координат точок простору-часу (напруженостей електричного $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ та магнітного $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ полів, хвильової функції $\psi(\mathbf{r},t)$ мезонного поля і т. д.). Закономірності зміни стану системи у просторі та часі між двома фіксованими моментами t_1 і t_2 описуються певними диференціальними рівняннями, які випливають з умови екстремальності S на відрізку $[t_1,t_2]$.

Важливе місце посідає окремий випадок рівноважних систем, параметри яких не змінюються з часом. У цьому випадку принципу найменшої дії придають дещо інше, але еквівалентне формулювання у вигляді так званих *умов рівноваги*. Нагадаємо декотрі з них:

1) стійкому стану рівноваги механічної системи, що знаходиться в полі потенціальних сил і підпорядкована голономним (тобто накладеними тільки на координати) ідеальним стаціонарним в’язям, відповідає таке розміщення її частин, при якому повна потенціальна енергія системи є мінімальною (теорема Лагранжа-Діріхле);

2) енергія істинного електростатичного поля провідників є мінімальною по відношенню до енергії полів, які створювалися б усіма іншими розподілами зарядів по об’єму провідників (теорема Томсона). Аналогічне твердження вірне і для магнітостатичних полів, спричинених стаціонарними струмами;

3) у стані теплової рівноваги вільна енергія $F(T,V)$ термодинамічної системи (тобто робота, яку система здатна здійснити при оборотному ізотермічному процесові) є мінімальна в порівнянні з усіма іншими змінами стану при сталих температурі T та об’ємові V. Такі самі теореми справджуються й для інших термодинамічних потенціалів як функцій власних змінних – термодинамічного потенціалу Гіббса $\Phi(T,P)$, внутрішньої енергії $E(S,V)$ і теплової функції $W(S,P)$. Тут S – ентропія системи, P – тиск у системі.

Завдання 1.6.1. Між двома дротяними кільцями радіуса R натягнуто мильну плівку. Відрізок, що з’єднує центри кілець, є перпендикулярним до площин кілець і має довжину l (рис. 1.9). Вважаючи товщину плівки сталою та малою, знайдіть рівняння поверхні, утвореної плівкою. (Задача Плато про мінімальну поверхню обертання).

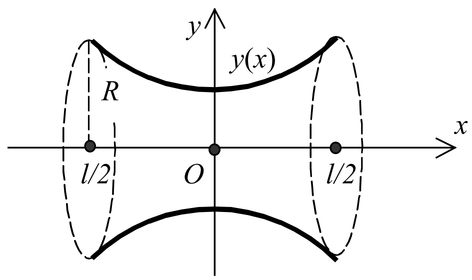

Рис. 1.9

Розв'язання. При фіксованих температурі та густині мильного розчину плівка набуває такої форми, для якої функціонал надлишкової вільної енергії ΔF мінімальний. Останній дорівнює енергії поверхневого натягу плівки: $\Delta F = 2\sigma S$, де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, S – площа бічної поверхні плівки. Із міркувань симетрії зрозуміло, що поверхня плівки збігається з поверхнею, утвореною обертанням гладкої кривої $y(x)$ навколо осі OX. Тому

$$\Delta F[y] = 4\pi\sigma \int\limits_{-l/2}^{l/2} dx y(x)\sqrt{1+y'^2}\,, \tag{1.27}$$

і задача зводиться до відшукання кривої, що мінімізує функціонал ΔF за умов

$$y\left(-\frac{l}{2}\right) = y\left(\frac{l}{2}\right) = R\,. \tag{1.28}$$

Скориставшись інтегралом (1.15), можемо записати:

$$y = C_1\sqrt{1+y'^2}\,, \qquad y' = \sqrt{\frac{y^2 - C_1^2}{C_1^2}}\,,$$

звідки після відокремлення змінних дістаємо:

$$\int \frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = x + C_2\,.$$

Інтеграл справа легко обчислюється підстановкою $y = C_1 \operatorname{ch} t$ й дорівнює $C_1 t$. Маємо:

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}\frac{x + C_2}{C_1}\,. \tag{1.29}$$

Шукана крива є *ланцюговою лінією*, що проходить через точки (1.28). Поверхня, утворена обертанням ланцюгової лінії, називається *катеноїдом*.

З умов (1.28) випливає, що $C_2 = 0$ (крива симетрична відносно осі OY), а стала C_1 задовольняє трансцендентне рівняння

$$C_1 \operatorname{ch}\frac{l}{2C_1} = R .$$

Як завжди в подібних випадках, аналізуємо це рівняння, перейшовши до безрозмірних величин. Дістаємо:

$$\operatorname{ch} u = \alpha u , \tag{1.30}$$

де $\alpha = 2R/l$, $u = l/2C_1$. При $\alpha << 1$ $\operatorname{ch} u \cong e^u/2 >> \alpha u$, і рівняння (1.30) розв'язків не має (див. рис. 1.10). При зростанні α до певного значення α^* пряма αu стає дотичною до графіка $\operatorname{ch} u$ – маємо єдиний розв'язок u^*. При $\alpha > \alpha^*$ існують два розв'язки u_1 і u_2; їх числові значення залежать від α.

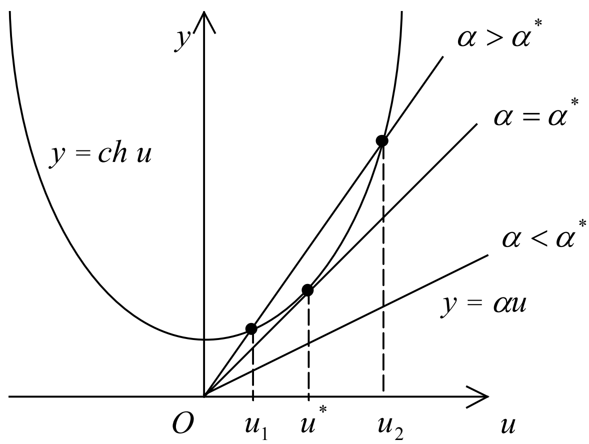

Рис. 1.10

Тангенс кута нахилу дотичної до функції $\operatorname{ch} u$ в точці u^* дорівнює $\operatorname{sh} u^*$, тому для u^* маємо рівняння $\operatorname{ch} u^* = u^* \operatorname{sh} u^*$. Числові розрахунки дають: $\alpha^* = \operatorname{sh} u^* \approx 1{,}509 \cong 3/2$.

Отже, при $l > 4R/3$ задача не має розв'язків у класі $C^1([-l/2, l/2])$: серед гладких поверхонь обертання нема такої, яка б реалізовувала мінімум функціонала (1.27), проходячи через точки (1.28). Цю ситуацію можна інтерпретувати таким чином. Якщо відстань між кільцями досить велика в порівнянні з їх радіусами, то площа поверхні, утвореної двома кругами радіуса R та відрізком осі OX між ними, є меншою, ніж площа довільної гладкої поверхні, натягненої на кільця (подібну ситуацію маємо й для функціонала площі (1.1)). З фізичного погляду це означає, що при $l > 4R/3$ плівка стає нестійкою й розривається.

Із двох розв'язків, що маємо при $l < 4R/3$, реалізується лише один. Щоб його визначити, обчислюємо значення вільної енергії (1.27) для функції (1.29) при двох значеннях сталої C_1 ($l/2u_1$ і $l/2u_2$). Шуканому кореню відповідає менше значення вільної енергії.

Поява "зайвого" кореня відображає той факт, що виконання рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4) є необхідною, але не достатньою умовою існування мінімуму функціонала.

Дещо осторонь від згаданих стоїть відомий із геометричної оптики екстремальний принцип Ферма: серед допустимих шляхів між двома фіксованими точками в оптично неоднорідному середовищі світло поширюється (за стаціонарних умов) тим, на який фронт хвилі витрачає найменше часу.

Завдання 1.6.2. У прозорому середовищі зі змінним показником заломлення $n(x,y)$ світло поширюється з точки $A(0,0)$ у точку $B(l,h)$. Знайдіть траєкторію променя світла, якщо $n(x,y)=n_0(1+\alpha y)$. Розгляньте граничні випадки слабо неоднорідного ($\alpha \ll 1$) та однорідного ($\alpha = 0$) середовищ.

Вказівка. Задача зводиться до відшукання екстремуму функціонала

$$T[y]=\int_0^l \frac{dl}{u(x,y)}=\frac{1}{c}\int_0^l dl\,n(x,y) \qquad (1.31)$$

за додаткових умов $y(0)=0$ та $y(l)=h$. Тут c – швидкість світла у вакуумі, $u(x,y)=c/n(x,y)$ – швидкість світла в середовищі.

Відповідь. Траєкторією є відрізок ланцюгової лінії

$$y(x)=\frac{C_1}{\alpha}\operatorname{ch}\left[\frac{\alpha}{C_1}\left(x+C_2\right)\right]-\frac{1}{\alpha}, \qquad (1.32)$$

де сталі C_1 та C_2 задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}&\frac{C_1}{\alpha}\operatorname{ch}\left[\frac{\alpha}{C_1}C_2\right]-\frac{1}{\alpha}=0,\\&\frac{C_1}{\alpha}\operatorname{ch}\left[\frac{\alpha}{C_1}\left(l+C_2\right)\right]-\frac{1}{\alpha}=h.\end{aligned} \qquad (1.33)$$

З формули (1.32) зручно виключити сталу C_2. З урахуванням тотожностей

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y, \qquad \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$$

та першої з формул (1.33) дістаємо:

$$y(x)=\frac{1}{\alpha}\left[-1+\operatorname{ch}\frac{\alpha x}{C_1}\right]+\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-C_1^{\,2}}\,\operatorname{sh}\frac{\alpha x}{C_1}\,.$$

Сталу C_1 знаходимо з умови $y(l)=h$.

При $\alpha<<1$ з точністю до квадратичних за α членів маємо:

$$y(x)\cong\sqrt{1-C_1^{\,2}}\left[\frac{x}{C_1}+\frac{1}{6}\alpha^2\left(\frac{x}{C_1}\right)^3+\dots\right]+\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{x}{C_1}\right)^2+\dots\,. \qquad (1.34)$$

Для однорідного середовища

$$y(x)=\sqrt{1-C_1^{\,2}}\,\frac{x}{C_1}=\frac{h}{l}x\,,$$

тобто світло поширюється вздовж прямої. Цей результат можна отримати відразу ж, якщо врахувати, що при $\alpha=0$ підінтегральний вираз у функціоналі (1.31) залежить лише від похідної y'.

Завдання 1.6.3. Покажіть, що при переході променя світла з оптично однорідного середовища з показником заломлення n_1 в оптично однорідне середовище з показником заломлення n_2 справджується закон Снелліуса:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}\,,$$

де α – кут падіння променя світла на поверхню розділу середовищ, β – кут заломлення (рис. 1.11).

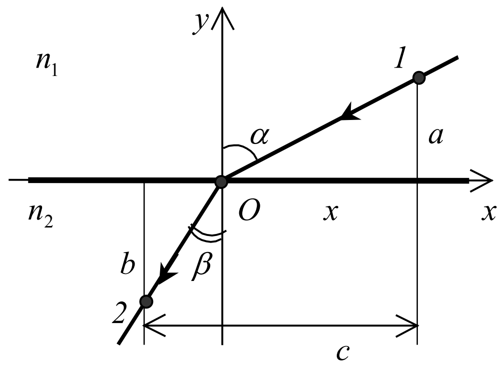

Рис. 1.11

Розв'язання. У кожному з середовищ світло поширюється вздовж прямої (див. попереднє завдання), тому результуючою траєкторією є ломана лінія, що складається з двох прямолінійних відрізків і надає екстремум функціоналу

$$J[y]=\int_1^2 dl\,n(x,y)=\int_1^0 dl\,n_1+\int_0^2 dl\,n_2=n_1\sqrt{x^2+a^2}+n_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}\,.$$

Варіюючи за x, дістаємо співвідношення

$$\left[n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2 \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \right] \delta x = 0 \, .$$

Воно має виконуватися для довільних δx, тому вираз у квадратних дужках дорівнює нулю. Корінь цього рівняння дає координату точки перетину поверхні розділу середовищ променем світла. Закон Снелліуса дістаємо відразу ж, якщо врахуємо, що

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin\alpha \, , \qquad \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin\beta \, ^{*)}.$$

Завдання 1.6.4. Унаслідок неоднорідного розподілу густини повітря вздовж вертикалі промінь світла при поширенні в атмосфері може зазнавати повного внутрішнього відбиття. Це спричиняє появу в атмосфері одного чи декількох уявних зображень далеких предметів, які знаходяться поза межами прямої видимості (марева). Оцініть залежність відстані l між спостерігачем і спостережуваними предметами від градієнта $dn/dy = n_0\alpha = const$ показника заломлення середовища (див. *Завдання 1.6.2*).

Розв'язання. При малих значеннях α траєкторія променя описується формулою (1.34). Вона близька до параболи, причому зображення предмета A спостерігається в точці O під деяким кутом θ, якщо $\alpha < 0$, тобто показник заломлення спадає з ростом висоти (рис. 1.12). У лінійному за α наближенні

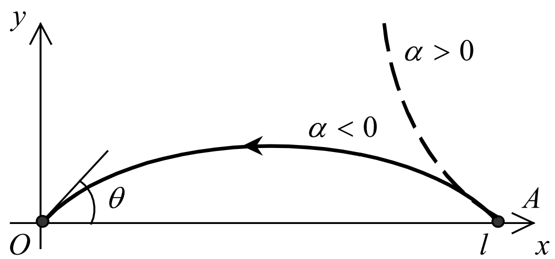

Рис. 1.12

$$y(x) \cong \sqrt{\gamma - 1}\, x - \frac{1}{2}\gamma|\alpha| x^2 \, ,$$

де стала $\gamma \equiv 1/C_1^2$ знаходиться з умови $y(l) = 0$: $\sqrt{\gamma - 1}\, l - \frac{1}{2}\gamma|\alpha|\, l^2 = 0$. Оскільки $\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{\gamma - 1}$, $\cos^2\theta = 1/\gamma$, то

$2\sqrt{\gamma - 1}/\gamma = \sin 2\theta = |\alpha|\, l$. Звідси бачимо, що якщо поглинанням світла в середовищі

---

*) Насправді закон Снелліуса є еквівалентний принципові Ферма.

можна знехтувати, то максимальна відстань від спостерігача до спостережуваного ним об'єкта $l \cong 1/|\alpha|$.

Принципом найменшої дії рух механічної системи визначається повністю: розв'язуючи відповідні рівняння, можна знайти як форму траєкторії, так і залежність просторового положення системи від часу. Якщо ж залишити осторонь часову частину задачі та обмежитися більш вузьким питанням про відшукання лише траєкторії, то можна користуватися таким спрощеним формулюванням принципу найменшої дії: траєкторія руху матеріальної точки масою m у полі потенціальних сил із потенціалом Π між двома положеннями 1 та 2 є екстремаллю функціонала

$$S_0 = \int_1^2 dl\sqrt{2m(E-\Pi)}\,, \tag{1.35}$$

де E – повна механічна енергія точки. Це – принцип Мопертюї.

Функціонал S_0 називають *укороченою дією*. Екстремальна властивість S_0 випливає з аналогії між геометричною оптикою та механікою, зміст якої можна сформулювати наступним чином: траєкторія матеріальної точки при її русі в стаціонарному потенціальному полі Π зі швидкістю $v(l) = \sqrt{2(E-\Pi)/m}$ збігається з траєкторією променя світла, що поширюється в оптично неоднорідному середовищі з показником заломлення $n(x,y,z) \propto \sqrt{2m(E-\Pi)}$ (тобто величина $\sqrt{2m(E-\Pi)}$ в механіці відіграє ту ж роль, що й показник заломлення $n(x,y,z)$ в оптиці). Оскільки промінь світла поширюється в неоднорідному середовищі зі швидкістю $u = c/n(x,y,z)$ і його істинним шляхом реалізується екстремум функціонала (1.31), то істинною траєкторією матеріальної точки реалізується екстремум функціонала (1.35).

Завдання 1.6.5. Знайдіть траєкторію польоту каменя в однорідному полі тяжіння, кинутого з початковою швидкістю v_0 під деяким кутом θ до горизонту. Чому дорівнює θ, якщо відомо, що камінь впав на відстані l від місця кидання?

Вказівка. Треба відшукати екстремум функціонала

$$J[y] = \int_0^l dx\sqrt{2m(E-mgy)}\sqrt{1+y'^2} \tag{1.36}$$

за додаткових умов $y(0)=0$ і $y(l)=0$. Тут $E = mv_0^2/2$ – повна енергія каменя. Розв'язок зручно шукати за допомогою рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$2(E-mgy)y'' + mg(1+y'^2) = 0\,, \qquad (1.37)$$

яке після диференціювання за x набирає вигляду

$$(E-mgy)y''' = 0\,.$$

Видно, що функція y є параболою $y(x) = ax^2 + bx + c$, причому умови на кінцях дають $c=0$, $b=-al$.

Щоб знайти сталу a, функцію y треба підставити в (1.37) та розв'язати здобуте квадратне рівняння відносно a:

$$a_\pm = -\frac{v_0^2 \pm \sqrt{(v_0^2)^2 - (gl)^2}}{gl^2}\,.$$

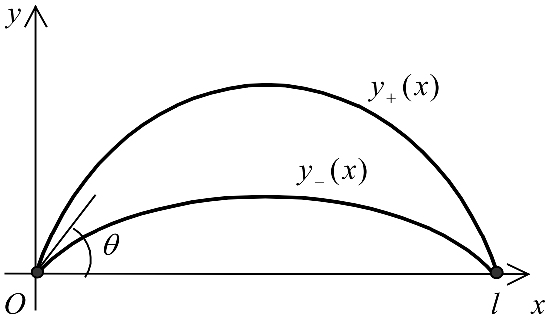

Рис. 1.13

Із двох кривих $y_\pm = a_\pm(x^2 - xl)$ (див. рис. 1.13) найменшому значенню укороченої дії (1.36) відповідає парабола y_-, час руху вздовж якої є меншим за час руху вздовж параболи y_+.

Кут θ визначається за допомогою співвідношення

$$\operatorname{tg}\theta = y'_-(0) = \frac{v_0^2 - \sqrt{(v_0^2)^2 - (gl)^2}}{gl}\,,$$

звідки $\sin 2\theta = gl/v_0^2$. Максимальна дальність польоту досягається при $\theta = 45^0$. Щоб кинути камінь на відстань l, йому треба надати швидкість $v_0 \geq \sqrt{gl}$.

Зауважимо, що рівняння (1.37) має перший інтеграл

$$\frac{\sqrt{2m(E-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1\,,$$

звідки, відокремивши змінні, також можна знайти функцію $y(x)$ (зробіть це самостійно).

Звернемо увагу на схожість між *Завданнями 1.6.4 і 1.6.5*: якщо позначити $|\alpha| \equiv g/v_0^2$, то аналогом показника заломлення в останньому виступає величина

$n(x,y) = n_0\sqrt{1 - mgy/E} = n_0\sqrt{1 - 2|\alpha|y}$, яка при $|\alpha| << 1$ зводиться до $n(x,y) = n_0\left(1 - |\alpha|y\right)$.

Завдання 1.6.6. Опишіть траєкторії руху частинки в полі центральних сил із потенціалом $\Pi(r)$, де r – відстань від частинки до силового центру.

Вказівка. Скористайтеся тим фактом, що рух частинки в центральному полі відбувається в площині. Траєкторія руху в полярних координатах (r,φ) (див. рис. 1.14) має вигляд $r = r(\varphi)$. Елемент довжини $dl = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2} = \sqrt{r'^2 + r^2}\,d\varphi$, де $r' \equiv dr/d\varphi$. Задача зводиться до відшукання екстремуму функціонала

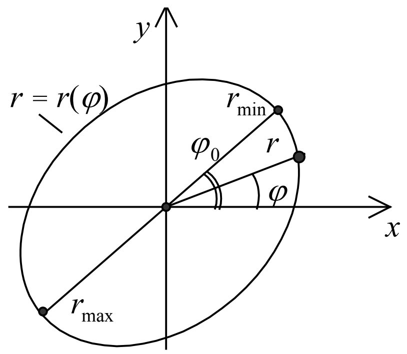

Рис. 1.14

$$S_0[r] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{2m\left(E - \Pi(r)\right)}\sqrt{r'^2 + r^2} \ .$$

Підінтегральна функція $F = F(r, r')$ не залежить явно від φ, тому маємо інтеграл руху, який називається орбітальним механічним моментом:

$$M \equiv F(r,r') - r'\frac{\partial F(r,r')}{\partial r'} = r^2\,\frac{\sqrt{2m(E - \Pi(r))}}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$$

Відповідь. Траєкторія руху частинки входить до сім’ї кривих

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr\,\dfrac{M}{r^2}}{\sqrt{2m\left(E - \Pi(r)\right) - \dfrac{M^2}{r^2}}} \ . \qquad (1.38)$$

Сталі φ_0 і M визначаються початковими умовами задачі (див. рис. 1.14). Рух частинки може відбуватися лише в тій області значень r, де підкореневий вираз в інтегралі невід’ємний. Мінімальна $r_{\min}$ та максимальна $r_{\max}$ відстані частинки від силового центра знаходяться за допомогою умови

$$E = \Pi(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \ ,$$

яка означає, що в точках $r = r_{\min}$ і $r = r_{\max}$ траєкторії кінетична енергія радіального руху частинки дорівнює нулю. Після проходження цих точок відстань від частинки до силового центра починає, відповідно, збільшуватися та зменшуватися, тому їх ще називають точками повороту.

Завдання 1.6.7. Опишіть траєкторії руху космічних тіл (планет, комет, штучних супутників) у гравітаційному полі, створюваному іншим, набагато масивнішим, космічним тілом. (Задача Кеплера про рух планет).

Вказівка. Тіло з більшою масою m_0 можна вважати нерухомим, тоді задача зводиться до аналізу траєкторії руху менш масивного (з масою m) тіла у ньютонівському полі $\Pi(r) = -\alpha/r$, де $\alpha \equiv Gmm_0 > 0$, G – стала всесвітнього тяжіння. Щоб обчислити інтеграл (1.38), зручно скористатися заміною $x = M/r$.

Відповідь. Траєкторії – конічні перерізи

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

з ексцентриситетом $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ та параметром $p = \frac{M^2}{m\alpha}$. При $\varepsilon < 1$ траєкторія є еліпсом, один із фокусів якого знаходиться в силовому центрі. Ця ситуація характерна для руху планет навколо Сонця та природних і штучних супутників навколо планет. У граничному випадку $\varepsilon = 0$ еліпс вироджується в коло. При $\varepsilon = 1$ траєкторія є параболою, а при $\varepsilon > 1$ – гіперболою. По таких траєкторіях рухаються комети та інші космічні тіла, що випадково залетіли до Сонячної системи, але мають достатню кінетичну енергію, щоб її покинути. Такою є й траєкторія руху зарядженої частинки в полі іншої однойменно зарядженої частинки (як, наприклад, у дослідах Резерфорда з вивчення будови атомного ядра, у яких альфа-частинки розсіювалися на ядрах атомів металевої фольги). Справді, у цьому випадку потенціальна енергія кулонівської взаємодії частинок $\Pi(r) = \alpha/r$, де $\alpha = q_1 q_2 > 0$, q_i – заряди частинок, завжди додатна, тому при $M \neq 0$ $\varepsilon > 1$.

Завдання 1.6.8. Доведіть, що із пункту A в пункт B, розташованих на одній горизонталі, при одній і тій самій витраті пального в деяких випадках можна доїхати швидше, якщо рухатися по дорозі зі схилами, ніж вздовж прямої AB (рис. 1.15).

Вказівка. Швидкість у точці з ординатою y знаходиться із співвідношення

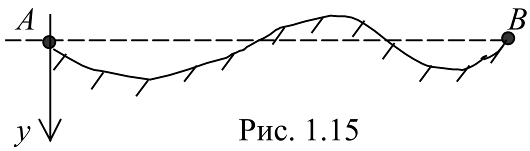

Рис. 1.15

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy + W \,,$$

де W – корисна частина теплової енергії пального.

1.7. Достатня умова мінімуму

Зупинимося коротко на достатніх умовах існування мінімуму (максимуму) функціонала найпростішого типу (1.2). Обмежимося розглядом мінімуму, який реалізується на множині гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем.

Нехай $y_0(x)$ – крива, яка надає мінімум функціоналові (1.2) . Тоді для довільної гладкої функції $h(x)$, що задовольняє умови $h(x_1) = h(x_2) = 0$, і достатньо малих значень параметра α маємо

$$\varphi_h(\alpha) = J[y_0 + \alpha h] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0 + \alpha h, y_0' + \alpha h') > \varphi(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0, y_0') \,, \qquad |\alpha| > 0 \,,$$

тобто

$$\varphi_h'(0) = 0 \,, \qquad \varphi_h''(0) \geq 0 \,. \tag{1.39}$$

Як було встановлено раніше (див. *Лему 1.3.2*), перша з цих умов веде до рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4). Розв’язавши його та скориставшись умовами жорсткого закріплення (1.3), знаходимо $y_0(x)$.

Позначимо через $C_0^1([x_1, x_2])$ множину гладких функцій на відрізку $[x_1, x_2]$, які дорівнюють нулю при $x = x_1$ і $x = x_2$. Друге із співвідношень (1.39) потребує проаналізувати умови, за яких для довільної функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ справджується нерівність

$$\varphi_h''(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(Sh^2 + Rh'^2 \right) \geq 0 \,, \tag{1.40}$$

де S та R виражаються через $y_0(x)$ за формулами

$$S(x) \equiv \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \Bigg|_{y=y_0}, \qquad R(x) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Bigg|_{y=y_0}. \tag{1.41}$$

Надалі вважаємо, що $S(x)$ і $R(x)$ – неперервні функції на відрізку $[x_1, x_2]$, і що $R(x)$ ще має на $[x_1, x_2]$ неперервну похідну.

Теорема 1.7.1. Нерівність (1.40) виконується для довільної функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ лише тоді, коли

$$\mu \equiv \min_{x \in [x_1, x_2]} R(x) \geq 0. \tag{1.42}$$

Доведення. Припустимо, що $R(x)$ досягає мінімуму в точці $x_0 \in (x_1, x_2)$, і що $R(x_0) = \mu < 0$. Оскільки $R(x)$ – неперервна функція, існує таке число $\Delta > 0$, що $R(x) < \dfrac{\mu}{2}$, якщо $|x - x_0| \leq \Delta$.

Розглянемо послідовність функцій

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\sin \dfrac{\pi n}{\Delta}(x - x_0) - \dfrac{1}{2} \sin \dfrac{2\pi n}{\Delta}(x - x_0) \right], & |x - x_0| < \Delta, \qquad n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & |x - x_0| > \Delta, \end{cases}$$

Усі ці функції належать множині $C_0^1([x_1, x_2])$, і для них

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx\, h_n^2(x) &= \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, h_n^2(x) = \frac{5}{4}, \\ \int_{x_1}^{x_2} dx\, h_n'^2(x) &= \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, h_n'^2(x) = \frac{2\pi^2 n^2}{\Delta^2}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Нехай $M \equiv \max_{x \in [x_1, x_2]} S(x)$. Тоді згідно з (1.43)

$$\varphi''_{h_n}(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[S(x) h_n^2(x) + R(x) h_n'^2(x) \right] = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx \left[S(x) h_n^2(x) + R(x) h_n'^2(x) \right] \leq$$

$$\leq M \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, h_n^2(x) + \frac{\mu}{2} \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx\, h_n'^2(x) = \frac{5}{4} M + \frac{\pi^2 n^2 \mu}{\Delta^2}.$$

Бачимо, що $\varphi''_{h_n}(0) < 0$ при $n > \sqrt{5\Delta^2 M / 4\pi^2 |\mu|}$. Отже, умова (1.42) є необхідною для того, щоб функція $y_0(x)$ надавала мінімум функціоналу (1.2).

Надалі вважатимемо, що $R(x) > 0$, тобто $\mu > 0$. Ця умова називається *посиленою умовою Лежандра*.

Завдання 1.7.1. Нехай функціонал (1.2) породжується функціями виду

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}\, H(y), \tag{1.44}$$

де за змістом задачі $\min H(y) > 0$. Переконайтеся, що для мінімуму такого функціонала посилена умова Лежандра виконується.

Теорема 1.7.2. Якщо посилена умова Лежандра виконується, то нерівність

$$S(x) = \left.\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right)\right|_{y=y_0} \geq 0 \tag{1.45}$$

є достатньою для того, щоб функціонал (1.2) мав мінімум на функції $y_0(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$.

Доведення. За умов теореми для будь-якої функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ маємо:

$$\varphi''_h(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[S(x) h^2(x) + R(x) h'^2(x) \right] \geq \int_{x_1}^{x_2} dx\, R(x) h'^2(x) \geq \mu \int_{x_1}^{x_2} dx\, h'^2(x) \geq 0 .$$

Знак рівності в останній нерівності треба писати лише тоді, коли неперервна функція $h'(x)$ є тотожним нулем на відрізку $[x_1, x_2]$, а з огляду на умови $h(x_1) = h(x_2) = 0$ – лише коли $h(x) \equiv 0$. Отже, $\varphi''_h(0) > 0$ для ненульових $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$.

Завдання 1.7.2. Доведіть, що розв’язки рівняння Ейлера-Лагранжа для функцій виду

$$F(x, y, y') = H(y) G(y'), \tag{1.46}$$

надають мінімальні значення функціоналові (1.2) з-поміж усіх кривих зі спільним початком і спільним кінцем, якщо двічі диференційовні функції $H(y)$ і $G(y')$

задовольняють умови

$$H(y) > 0, \quad G''(y') > 0, \quad G(y') - y'G'(y') \ge 0, \quad H''(y)H(y) - H'^2(y) \ge 0. \quad (1.47)$$

Завдання 1.7.3. Перевірте виконання умов *Теорем 1.7.1*, *1.7.2* та умов (1.47) для функціоналів часу в *Завданнях 1.5.4*, *1.6.2*.

Якщо $\min\limits_{x\in[x_1,x_2]} S(x) < 0$, то при виконанні посиленої умови Лежандра квадратичний функціонал (1.40) має або лише додатні значення для всіх ненульових функцій $h(x) \in C_0^1([x_1,x_2])$, або набуває від'ємних значень для деяких ненульових функцій цього класу. У першому випадку функція $y_0(x)$ є кривою, що дійсно надає мінімум функціоналу (1.2), тоді як у другому вона такою не є.

Щоб з'ясувати, коли реалізується саме перший випадок, візьмемо довільну неперервну функцію $\rho(x)$, для якої

$$\min_{x\in[x_1,x_2]} \rho(x) > 0, \quad (1.48)$$

та розглянемо на множині $C_0^1([x_1,x_2])$ функціонал більш складної структури:

$$Q[h] = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\left[S(x)h^2(x) + R(x)h'^2(x)\right]}{\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\,\rho(x)h^2(x)}. \quad (1.49)$$

Уведення функціонала (1.49) диктується тією обставиною, що квадратичний функціонал (1.40) у загальному випадку може набувати необмежених за модулем від'ємних значень, якщо $\min\limits_{x\in[x_1,x_2]} S(x) < 0$. Справді, нехай остання умова виконується, і при цьому $\varphi''_{\tilde h}(0) = a < 0$ для деякої функції $\tilde h(x) \in C_0^1([x_1,x_2])$. Тоді на функції $N\tilde h(x)$ функціонал (1.40) набуває значення $aN^2 < 0$, при цьому число N можна взяти як-завгодно великим.

Що ж стосується функціонала (1.49), то він задовольняє умову

$$Q[h] > \Lambda_0 \equiv \min_{x\in[x_1,x_2]} \frac{S(x)}{\rho(x)} > -\infty. \quad (1.50)$$

Дійсно, якщо $R(x) > 0$, то при ненульових $h(x) \in C_0^1([x_1,x_2])$ внесок доданка

$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, R(x) h'^2(x)$ в $Q[u]$ ненульовий і додатний, оскільки рівність $\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, R(x) h'^2(x) = 0$ справджується лише при $h'(x) \equiv 0$, що для функцій класу $C_0^1([x_1, x_2])$ є рівносильним умові $h(x) \equiv 0$ (див. доведення *Теореми 1.7.2*). Тому можемо записати:

$$Q[h] > \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, S(x) h^2(x)}{\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, \rho(x) h^2(x)} = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \frac{S(x)}{\rho(x)} \rho(x) h^2(x)}{\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, \rho(x) h^2(x)} \geq \Lambda_0 .$$

Позначивши

$$\lambda_0 \equiv \inf_{h(x) \in C_0^1[x_1, x_2]} Q[h], \tag{1.51}$$

для кожної $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ маємо:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \left[S(x) h^2(x) + R(x) h'^2(x) \right] \geq \lambda_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, \rho(x) h^2(x) . \tag{1.52}$$

Звідси випливає, що твердження *Теорем 1.7.1*, *1.7.2* можна посилити наступним чином.

Теорема 1.7.3. Серед гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем крива $y_0(x)$ надає мінімум функціоналові (1.2), якщо $\lambda_0 > 0$, і не надає, якщо $\lambda_0 < 0$. Випадок $\lambda_0 = 0$ вимагає додаткового дослідження.

Щоб знайти число λ_0, зазначимо, що згідно з нерівністю (1.52) точна нижня межа значень функціонала

$$\Phi[h] \equiv \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \left[S(x) h^2(x) + R(x) h'^2(x) \right] - \lambda_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, \rho(x) h^2(x)$$

на множині функцій $C_0^1([x_1, x_2])$ дорівнює нулю. Нехай ця межа досягається на ненульовій функції $u(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$, тобто $\Phi[u] = 0$. Тоді для будь-якої функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ і дійсних значень параметра ε функція

$$f(\varepsilon) \equiv \Phi[u + \varepsilon h]$$

має абсолютний мінімум при $\varepsilon = 0$. Звідси знаходимо, що функція $u(x)$ задовольняє рівняння Ейлера-Лагранжа

$$-\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{du(x)}{dx} \right) + S(x)u(x) = \lambda_0 \rho(x)u(x)\,. \tag{1.53}$$

Умови закріплення мають вигляд

$$u(x_1) = 0, \quad u(x_2) = 0\,. \tag{1.54}$$

Для подальшого аналізу замінимо λ_0 у формулі (1.53) комплексним параметром z. Дістаємо систему

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{du(x)}{dx} \right) + S(x)u(x) = z\rho(x)u(x), \\ u(x_1) = 0, \quad u(x_2) = 0, \end{gathered} \tag{1.55}$$

яка називається *крайовою задачею Штурма-Ліувілля*. Диференціальне рівняння в ній називається *рівнянням Штурма-Ліувілля*, а додаткові умови в крайніх точках – *крайовими умовами*.

Система (1.55) лінійна та однорідна відносно функції $u(x)$, і тому має тривіальний розв’язок $u(x) \equiv 0$. При довільних значеннях параметра z він є, взагалі кажучи, єдиним розв’язком, що задовольняє як рівняння Штурма-Ліувілля, так і крайові умови. З іншого боку, можуть існувати виняткові значення параметра z, для яких рівняння Штурма-Ліувілля має нетривіальні розв’язки, що задовольняють крайові умови. Ці виняткові значення параметра z називаються *власними значеннями* крайової задачі Штурма-Ліувілля, а відповідні нетривіальні розв’язки системи (1.55) при цих значеннях z – *власними функціями*, що відповідають цим власним значенням.

Завдання 1.7.4. Знайдіть власні значення і відповідні власні функції крайової задачі (1.55) для випадку, коли всі коефіцієнтні функції є тотожними сталими: $R(x) \equiv \mu$, $S(x) \equiv q$, $\rho(x) \equiv \rho$.

Розв’язання. При заданих значеннях коефіцієнтів загальний розв’язок рівняння Штурма-Ліувілля має вигляд

$$u(x,z) = A\sin\sqrt{\frac{\rho z - q}{\mu}}(x - x_1) + B\cos\sqrt{\frac{\rho z - q}{\mu}}(x - x_1)\,. \tag{1.56}$$

Крайова умова зліва дає $B = 0$, а крайова умова справа веде до співвідношення

$$A\sin\sqrt{\frac{\rho z - q}{\mu}}(x_2 - x_1) = 0,$$

з якого випливає, що нетривіальні розв'язки ($A \neq 0$) існують лише при таких значеннях параметра z :

$$z_n = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\mu\pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + q\right], \quad n = 1,2,\ldots. \tag{1.57}$$

Відповідні власні функції мають вигляд

$$u_n(x,z) = A\sin\frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1.58}$$

Повертаючись до рівняння Штурма-Ліувілля в (1.55), позначимо через $\psi(x,z)$ той його єдиний розв'язок, який зліва задовольняє умови

$$\psi(x_1,z) = 0, \quad \psi'(x_1,z) = 1. \tag{1.59}$$

Застосовуючи стандартні методи теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь, можна показати, що при фіксованих значеннях змінної x функція $\psi(x,z)$ є *цілою* відносно параметра z, тобто аналітичною на відкритій комплексній площині. Порівнюючи перші крайові умови в (1.55) і (1.59), бачимо, що кожна власна функція крайової задачі (1.55) є пропорційна функції $\psi(x,z)$, якщо z збігається з власним значенням. З другої крайової умови в (1.55) знаходимо, що власні значення задачі (1.55) є нулями функції $\psi(x_2,z)$, тобто коренями рівняння $\psi(x_2,z) = 0$. Оскільки однозначна аналітична функція в області аналітичності може мати лише ізольовані нулі, то в кожному крузі скінченного радіуса на комплексній площині може знаходитися лише скінченна кількість власних значень крайової задачі (1.55). Тому ці власні значення утворюють послідовність точок $\{z_n\}$ із єдиною точкою скупчення на нескінченності.

Нехай z_n – власне значення крайової задачі (1.55), а $u_n(x)$ – власна функція, яка йому відповідає. Домножаючи ліву і праву частини рівняння Штурма-Ліувілля для $u_n(x)$ на комплексно спряжену функцію $\overline{u_n(x)}$, та інтегруючи обидві частини здобутої рівності за x у межах від x_1 до x_2, дістаємо:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \overline{u_n(x)} \frac{d}{dx}\big(R(x)u_n'(x)\big)dx + \int_{x_1}^{x_2} S(x)\left|u_n(x)\right|^2 dx = z_n \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\left|u_n(x)\right|^2 dx. \qquad (1.60)$$

Обчислюючи перший інтеграл в (1.60) частинами, з урахуванням крайових умов (1.55) далі знаходимо:

$$z_n = \frac{\int_{x_1}^{x_2} R(x)\left|u_n'(x)\right|^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} S(x)\left|u_n(x)\right|^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\left|u_n(x)\right|^2 dx}. \qquad (1.61)$$

Вираз у правій частині рівності (1.70) – це дійсна величина. Звідси бачимо, що *власні значення крайової задачі Штурма-Ліувілля (1.55) є дійсні числа*.

Для дійсних чисел z_n коефіцієнти в рівнянні (1.55) для функції $u_n(x)$ стають дійсними, тому *дійсними є функція* $\psi(x, z_n)$ *та (при дійсних коефіцієнтах* C_n*) власні функції* $u_n(x) = C_n\psi(x, z_n)$. Згадавши означення (1.49) функціонала $Q[h]$ і нерівність (1.50), дістаємо:

$$z_n = Q[u_n] > \Lambda_0 = \min_{x\in[x_1,x_2]} \frac{S(x)}{\rho(x)}. \qquad (1.62)$$

Тим самим ми довели, що правильна

Теорема 1.7.4. Власні значення крайової задачі Штурма-Ліувілля (1.55) є дійсні числа з інтервалу $(\Lambda_0, +\infty)$ з єдиною точкою скупчення на $+\infty$.

З означення (1.51) та системи (1.53), (1.54) бачимо, що λ_0 є власним значенням, причому *найменшим*. Тому *Теорему 1.7.3* можна сформулювати так:

Теорема 1.7.5. Серед гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем крива $y_0(x)$ надає мінімум функціоналові (1.2), якщо найменше власне значення λ_0 крайової задачі Штурма-Ліувілля (1.55) додатне, і не надає, якщо воно від’ємне.

Завдання 1.7.5. Нехай $\min\limits_{x\in[x_1,x_2]} R(x)=\mu$ і $\min\limits_{x\in[x_1,x_2]} S(x)=q$. Доведіть, що $\lambda_0>0$, якщо

$$\frac{\mu\pi^2}{(x_2-x_1)^2}+q>0. \tag{1.63}$$

Вказівка. Скористайтеся нерівністю

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\left[S(x)h^2(x)+R(x)h'^2(x)\right]\geq\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\left[qh^2(x)+\mu h'^2(x)\right]$$

та результатом *Завдання 1.7.4*.

Завершимо цей параграф, навівши ще одну достатню умову мінімальності функціонала (1.2) при виконанні посиленої умови Лежандра. Для цього розглянемо введений вище розв'язок $\psi(x,z)$ рівняння Штурма-Ліувілля (1.55), підпорядкований умовам (1.59). З теорії рівняння Штурма-Ліувілля відомо, що кількість нулів функції $\psi(x,0)$ в інтервалі (x_1,x_2) точно збігається з кількістю від'ємних власних значень крайової задачі (1.55). Отже, крива $y_0(x)$ надає функціоналові (1.2) мінімум, якщо функція $\psi(x,0)$ не має нулів на інтервалі $(x_1,x_2]$. Ця умова відома *як посилена умова Якобі*.

Виконання посилених умов Лежандра та Якобі є достатньою умовою того, щоб екстремаль $y_0(x)$ надавала мінімум функціоналу найпростішого типу (1.2) на класі гладких кривих. Достатня умова максимуму формулюється аналогічно, лише тепер $R<0$.

Завдання 1.7.6. Серед гладких кривих, які проходять через точки $A(0,0)$ і $B(1,1)$, знайдіть ту, яка надає екстремум функціоналу

$$J[y]=\int\limits_0^1 dxy'^3 .$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння Ейлера-Лагранжа для цього функціонала $y(x)=C_1x+C_2$. З урахуванням умов закріплення маємо $y_0(x)=x$.

Посилена умова Лежандра для функції $y_0(x)$ виконується скрізь на інтервалі $(0,1)$: $R=\left.\dfrac{\partial^2F}{\partial y'^2}\right|_{y=y_0}=6y_0'=6>0$.

Перевіряємо виконання посиленої умови Якобі. Потрібно знайти розв'язок рівняння (1.55) при $R = 6$, $S = 0$ і $z = 0$. Воно набирає вигляду $\psi''(x,0) = 0$, звідки $\psi(x,0) = D_1 x + D_2$, D_1, D_2 – сталі інтегрування. Умови зліва $\psi(0,0) = 0$, $\psi'(0,0) = 1$ остаточно дають: $\psi(x,0) = x$. Ця функція не має жодних нулів на інтервалі $(0,1]$.

Отже, екстремаль $y_0(x) = x$ надає мінімум заданому функціоналові. Цей результат можна було б отримати відразу, скориставшись *Теоремою 1.7.2*.

Вивчення достатніх умов екстремуму для більш складних типів функціоналів є значно складнішим і тому в цьому тексті не проводиться. Як уже зазначалося, у фізичних та прикладних задачах існування таких екстремумів випливає із самої постановки задачі.

5. Дослідження функціоналів на екстремум. Умови Вейєрштрасса та Лежандра

Основні теоретичні відомості

Розглянемо загальну схему дослідження на екстремум функціоналів виду

$$I(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx, \tag{5.1}$$

визначених на множині двічі неперервно диференційовних на $[a;b]$ функцій $y(x)$, що задовольняють заданим крайовим умовам

$$y(a)=y_1,\ y(b)=y_2. \tag{5.2}$$

Для такого дослідження використовуються достатні умови екстремуму функціонала (5.1). Для їх формулювання введемо наступні основні поняття.

Центральним полем екстремалей функціонала (5.1) у області D називають сімейство його екстремалей $y=y(x,C)$, що покривають цю область та ніде не перетинаються у ній, крім єдиної точки – **центра**. При цьому при деякому значенні параметра C дане сімейство містить екстремаль $y^*(x)$, що задовольняє крайовим умовам (5.2). Далі розглядатимемо центральне поле екстремалей з центром у точці $A(a;y_1)$. Кутовий коефіцієнт $p(x,y)$ дотичної до кривої з центрального поля екстремалей називають **нахилом** цього поля у точці з координатами (x,y). Для перевірки включення екстремалі $y^*(x)$ у центральне поле $y=y(x,C)$ з центром у точці $A(a;y_1)$ використовують **умову Якобі**. Вона формулюються наступним чином.

Якщо рівняння

$$\left[F_{yy}-\frac{d\left(F_{yy'}\right)}{dx}\right]\cdot u(x)-\frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}\cdot u'(x)\right]=0, \tag{5.3}$$

де $F_{yy}, F_{yy'}, F_{y'y'}$ – відповідні частинні похідні підінтегральної функції функціонала (5.1), обчислені на екстремалі $y^*(x)$, має нетривіальний розв’язок $u(x)$, для якого $u(a)=0$, $u(x)\neq 0, x\in(a;b]$, то екстремаль $y^*(x)$ включається до центрального поля екстремалей з центром у точці $A(a;y_1)$. Рівняння (5.3) називають **рівнянням Якобі**.

Функція $E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\cdot F_p(x,y,p)$ (5.4) називається **функцією Вейєрштрасса**.

Нехай підінтегральна функція $F(x,y,y')$ функціонала (5.1) є тричі диференційовною за змінною y' для довільного y'. Умова $F_{y'y'}\geq 0$ ($F_{y'y'}\leq 0$) називається **умовою Лежандра**, а умова $F_{y'y'}>0$ ($F_{y'y'}<0$) – **посиленою умовою Лежандра**.

У розділі 2 було вказано, що необхідна умова як сильного, так і слабкого екстремуму функціонала (5.1) визначається рівнянням Ейлера $F_y - \frac{d\left(F_{y'}\right)}{dx} = 0$. Розглянемо достатні умови сильного та слабкого екстремумів цього функціонала. Сформулюємо **достатні умови слабкого мінімуму**.

Теорема 5.1. Якщо на екстремалі $y^*(x)$, що задовольняє рівнянню Ейлера та крайовим умовам (5.2), виконується умова Якобі, а функція Вейєрштрасса $E(x, y, p, y') \geq 0$ для точок (x, y), близьких до точок на екстремалі $y^*(x)$ та для y', близьких до нахилу поля p на цій екстремалі (**умова Вейєрштрасса**), то на екстремалі $y^*(x)$ досягається слабкий мінімум.

Якщо функція $F(x, y, y')$ функціонала (5.1) є тричі диференційовною за змінною y', то замість умови Вейєрштрасса на практиці більш доцільно перевіряти виконання посиленої умови Лежандра $F_{y'y'} > 0$ на екстремалі $y^*(x)$. Це пов'язано з можливими труднощами визначення знаку функції Вейєрштрасса.

Якщо в умові Вейєрштрасса $E(x, y, p, y') \leq 0$, а у посиленій умові Лежандра $F_{y'y'} < 0$ на екстремалі $y^*(x)$, то сформульовані умови є **достатніми умовами слабкого максимуму**.

Зауважимо, що окремо взята умова Якобі є необхідною умовою слабкого екстремуму, тобто, якщо розв'язок $u(x)$ рівняння Якобі дорівнює нулю при якому-небудь значенні $x \in (a; b]$, то на екстремалі $y^*(x)$ слабкий екстремум не досягається. Необхідною є також окремо взята умова Вейєрштрасса, тобто, якщо функція Вейєрштрасса у точках екстремалі при y', близьких до p, змінює знак, то слабкий екстремум не досягається. Нагадаємо також, що з наявності на екстремалі сильного екстремуму випливає наявність на ній і слабкого екстремуму. За відсутності слабкого екстремуму відсутній і сильний екстремум.

Розглянемо **достатні умови сильного мінімуму**.

Теорема 5.2. Якщо на екстремалі $y^*(x)$, що задовольняє рівнянню Ейлера та крайовим умовам (5.2), виконується умова Якобі, а функція Вейєрштрасса $E(x, y, p, y') \geq 0$ для точок (x, y), близьких до точок на екстремалі $y^*(x)$ та для довільних y' (**умова Вейєрштрасса**), то на екстремалі $y^*(x)$ досягається сильний мінімум.

При дослідженні на сильний мінімум у випадках, коли функція $F(x, y, y')$ є тричі диференційовною за змінною y', замість умови Вейєрштрасса у пункті б) можна перевіряти виконання умови Лежандра $F_{y'y'} \geq 0$ для точок (x, y), близьких до точок на екстремалі $y^*(x)$ та для довільних значень y'.

Якщо в умові Вейєрштрасса $E(x, y, p, y') \le 0$, а у умові Лежандра $F_{y'y'} \le 0$, то сформульовані умови є **достатніми умовами сильного максимуму**.

Окремо взята умова Вейєрштрасса є необхідною для досягнення сильного екстремуму, тобто, якщо функція Вейєрштрасса у точках екстремалі при деяких значеннях y' має протилежні знаки, то сильний екстремум не досягається.

Наведемо загальний алгоритм дослідження функціонала (5.1) на екстремум:

1. Знаходимо екстремаль $y^*(x)$, що задовольняє рівнянню Ейлера для функціонала (5.1) та заданим крайовим умовам (5.2).

2. Для знайденої екстремалі $y^*(x)$ перевіряємо наведені вище достатні умови сильного та слабкого екстремумів. Якщо достатні умови екстремуму виконуються, то обчислюємо екстремальне значення функціонала на кривій $y^*(x)$.

Зауважимо, що у випадку невиконання умови Лежандра висновок про відсутність екстремуму робити не можна.

Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Перевірити виконання умови Якобі для екстремалі $y(x)$ функціонала $I(y) = \int\limits_0^{\pi/6} \left(y'^2 - 4y^2 \right) dx$, якщо $y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{6} \right) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо екстремаль $y(x)$. Для цього запишемо рівняння Ейлера для заданого функціонала.

$$F_y - \frac{d\left(F_{y'}\right)}{dx} = 0;\ F = y'^2 - 4y^2,\ F_y = -8y,\ F_{y'} = 2y',\ \frac{d\left(F_{y'}\right)}{dx} = 2y''.$$

Підставивши знайдені похідні у рівняння Ейлера, отримуємо $-8y - 2y'' = 0$, або $y'' + 4y = 0$. Оскільки корені характеристичного рівняння для цього лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами дорівнюють $\pm 2i$, то його загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Сталі інтегрування знаходимо з крайових умов:

$$y(0) = C_1 = 0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_2 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{C_2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Отже, шукана екстремаль має вигляд $y = 0$.

Складемо для функціонала $I(y)$ рівняння Якобі (5.3). $F_{yy} = -8$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'y'} = 2$. Підставивши ці частинні похідні у (5.3), отримаємо диференціальне рівняння відносно допоміжної функції $u(x)$: $-8u - 2u'' = 0$, де $u(0) = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $u = A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x$. $u(0) = A_1 = 0$, тому $u(x) = A_2 \sin x$. Оскільки $u(x)$ є нетривіальним розв'язком рівняння Якобі, тому $A_2 \neq 0$. $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right]$ $u(x) = A_2 \sin 2x \neq 0$. Таким чином, умова Якобі виконується, а звідси випливає, що отримана екстремаль $y = 0$ включається у центральне поле екстремалей функціонала $I(y)$ з центром у точці $(0;0)$.

Приклад 5.2. Знайти криві, на яких функціонал $I(y) = \int_0^2 \left(y^2 + y'^2 - 2xy\right)dx$, $y(0) = 0$, $y(2) = 3$, досягає екстремуму, та визначити його тип. Здійснити дослідження, використавши: а) умову Вейєрштрасса; б) умову Лежандра.

Розв'язання. Згідно з викладеним вище алгоритмом дослідження функціонала на екстремум, знайдемо його екстремаль, що задовольняє заданим крайовим умовам. Маємо $F = y^2 + y'^2 - 2xy$, $F_y = 2y - 2x$, $F_{y'} = 2y'$, $\frac{d\left(F_{y'}\right)}{dx} = 2y''$. Рівняння Ейлера набуває вигляду $2y'' - 2y = -2x$, або $y'' - y = -x$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_o = C_1 chx + C_2 shx$, частинний розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо за виглядом правої частини як лінійну функцію $\tilde{y} = Ax + B$. Коефіцієнти A та B знаходимо підстановкою у диференціальне рівняння $\tilde{y}$. Отримаємо $\tilde{y} = x$. Таким чином, рівняння сімейства екстремалей має вигляд $y = y_o + \tilde{y} = C_1 chx + C_2 shx + x$. З крайових умов знаходимо: $y(0) = C_1 = 0$, $y(2) = C_2 sh2 + 2 = 3 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{sh2}$.

Отже, шукане рівняння екстремалі має вигляд $y = \frac{shx}{sh2} + x$.

Перевіримо виконання умови Якобі, для чого складемо рівняння Якобі (5.3). Для заданого функціонала $F_y = 2y - 2x$, $F_{yy} = 2$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'} = 2y'$, $F_{y'y'} = 2$. Отже, рівняння Якобі має вигляд $2u - 2u'' = 0$, його загальний розв'язок $u = A_1 chx + A_2 shx$. Функція $u(x)$ повинна задовольняти умові $u(0) = 0$, тому маємо $u(0) = A_1 = 0$, $u(x) = A_2 shx$. При $A_2 \neq 0$ (розглядаємо нетривіальні розв'язки рівняння Якобі) $A_2 shx \neq 0\ \forall x \in (0; 2]$, тобто умова Якобі виконується.

У пункті б) для дослідження функціонала на екстремум використаємо умову Вейєрштрасса. Для цього складемо функцію Вейєрштрасса:

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \cdot F_p(x, y, p).$$

Оскільки $F(x, y, y') = y^2 + y'^2 - 2xy$, $F(x, y, p) = y^2 + p^2 - 2xy$, $F_p = 2p$, то, для $E(x, y, p, y')$, отримаємо:

$$E\left(x,y,p,y'\right)=y^2+y'^2-2xy-y^2-p^2+2xy-\left(y'-p\right)\cdot 2p=\left(y'-p\right)^2.$$

Останній вираз є невід'ємним для будь-яких y'. Таким чином, виконана умова Вейєрштрасса для сильного мінімуму, тобто на кривій $y=\frac{shx}{sh2}+x$ згідно з достатньою умовою екстремуму функціонал $I\left(y\right)$ досягає сильного мінімуму.

При використанні умови Лежандра у пункті б) знаходимо $F_{y'y'}=2\geq 0\ \forall y'$, що відповідає наявності сильного мінімуму на знайденій екстремалі.

Приклад 5.3. Знайти криві, на яких функціонал $I\left(y\right)=\int\limits_0^{\pi/4}\left(4y^2-y'^2+8y\right)dx$, де $y\left(0\right)=-1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, досягає екстремуму. Визначити тип екстремуму.

Розв'язання. Знайдемо екстремалі заданого функціонала, для чого складемо та розв'яжемо рівняння Ейлера. $F=4y^2-y'^2+8y$, $F_y=8y+8$, $F_{y'}=-2y'$, $F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0\Leftrightarrow 8y+8+2y''=0\Leftrightarrow y''+4y=-4$.

Коренями характеристичного рівняння $k^2+4=0$ є $k_{1,2}=\pm 2i$, тому загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $y''+4y=0$ є $y_o=C_1cos2x+C_2\sin 2x$. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння відсутній нуль, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y''+4y=-4$ відповідно до вигляду правої частини шукаємо у вигляді $\tilde{y}=A=const$. Підставляючи у це рівняння, знаходимо $A=-1$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд: $y=y_o+\tilde{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-1$.

Використавши задані крайові умови, яким повинна задовольняти шукана екстремаль, отримуємо систему рівнянь для визначення сталих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} y\left(0\right)=C_1-1=-1; \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=C_2-1=0. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C_1=0; \\ C_2=1. \end{cases}$$

Таким чином, шукана екстремаль має вигляд $y=\sin 2x-1$.

Перевіримо для знайденої кривої виконання умови Якобі. Знайдемо необхідні похідні: $F_{yy}=8$, $F_{yy'}=0$, $F_{y'y'}=-2$. Рівняння Якобі $\left[F_{yy}-\frac{d\left(F_{yy'}\right)}{dx}\right]\cdot u\left(x\right)-\frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}\cdot u'\left(x\right)\right]=0$ набуває вигляду $8u-\left(-2u'\right)'=0$, або $u''+4u=0$ за умови $u\left(0\right)=0$. Його загальний розв'язок має вигляд $u=A_1cos2x+A_2\sin 2x$. $u\left(0\right)=0\Rightarrow A_1=0$. Нетривіальні розв'язки рівняння

Якобі ($A_2 \neq 0$) мають вигляд $u(x) = A_2 \sin 2x$. Вони не дорівнюють нулю на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, тобто умова Якобі виконується.

Для дослідження функціонала $I(y)$ на екстремум використаємо умову Лежандра. Оскільки $F_{y'y'} = -2 \leq 0 \; \forall y'$, то на екстремалі $y = \sin 2x - 1$ досягається сильний максимум.

Приклад 5.4. Дослідити на екстремум функціонал $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{y'^2}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз у функціоналі $I(y)$ залежить лише від y', то екстремалями даної варіаційної задачі є прямі $y = C_1 x + C_2$. Оскільки $y(0) = C_2 = 0$, $y(1) = C_1 = 1$, то шукана екстремаль має вигляд $y = x$.

Перевіримо виконання умови Якобі. Оскільки $F = \frac{1}{y'^2}$, то отримуємо частинні похідні $F_y = F_{yy} = 0$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'} = -\frac{2}{y'^3}$, $F_{y'y'} = \frac{6}{y'^4}$. Рівняння Якобі набуває вигляду: $\frac{d}{dx}\left(\frac{6u'}{y'^4}\right) = 0$. Оскільки для екстремалі $y = x$ $\;y' = 1$, то отримуємо рівняння Якобі $6u'' = 0$ або $u'' = 0$. Його розв'язок $u(x)$ є лінійною функцією: $u = A_1 x + A_2$. З умови $u(0) = 0$ випливає, що $A_2 = 0$. Функція $u = A_1 x$ при $A_1 \neq 0$ не дорівнює нулю $\forall x \in (0;1]$, тобто умова Якобі для знайденої екстремалі виконується і вона може бути включеною до центрального поля екстремалей.

Оскільки підінтегральна функція $F = \frac{1}{y'^2}$ не є неперервною при довільних y', а, тим більше, тричі диференційовною, то для дослідження даного функціонала умову Лежандра використовувати не можна. Використаємо умову Вейєрштрасса.

$$E(x, y, p, y') = \frac{1}{y'^2} - \frac{1}{p^2} - (y' - p) \cdot \left(-\frac{2}{p^3}\right).$$

На екстремалі $y = x$ $\;p = (x)' = 1$, тому функція Вейєрштрасса набуває вигляду:

$$E = \frac{1}{y'^2} + 2y' - 3 = \frac{1 + 2y'^3 - 3y'^2}{y'^2} = \frac{2(y'-1)^2\left(y' + \frac{1}{2}\right)}{y'^2}.$$

Бачимо, що $E \ge 0\,\forall x, y$, але лише для значень y', близьких до значення $p=1$. Тому, за теоремою 5.1, на екстремалі $y = x$ досягається слабкий мінімум. При цьому $I_{\min} = I(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x)'^2}dx = \int_0^1 dx = 1$.

Приклад 5.5. Дослідити на екстремум функціонал $I(y) = \int_{-1}^{1}\left(y'^3 + y'^2\right)dx$, де $y(-1) = -1$, $y(1) = 3$, використавши: а) умову Вейєрштрасса; б) умову Лежандра.

Розв'язання. Знайдемо екстремалі функціонала $I(y)$. Оскільки підінтегральна функція $F = y'^3 + y'^2$ залежить лише від похідної y', то сімейство його екстремалей є сімейством прямих $y = C_1 x + C_2$. З крайових умов знаходимо значення сталих C_1 та C_2. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} y(-1) = -C_1 + C_2 = -1; \\ y(1) = C_1 + C_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_2 = 2; \\ C_1 = 3 - C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1; \\ C_1 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, шукана екстремаль має вигляд $y = 2x + 1$.

Запишемо та розв'яжемо рівняння Якобі. Знаходячи необхідні похідні $F_y = F_{yy} = F_{yy'} = 0$, $F_{y'} = 3y'^2 + 2y'$, $F_{y'y'} = 6y' + 2$, отримаємо рівняння $\frac{d}{dx}\left((6y' + 2)u'\right) = 0$. На екстремалі $y = 2x + 1$ $y' = 2$, тому рівняння Якобі набуває вигляду $(14u')' = 0 \Rightarrow u'' = 0$. Звідси $u = A_1 x + A_2$. Оскільки $u(-1) = 0$, то $A_2 = A_1$. Нетривіальні розв'язки рівняння Якобі $u = A_1(x+1)$ $(A_1 \ne 0)$ не дорівнюють нулю на $(-1;1]$, тобто умова Якобі для знайденої екстремалі $y = 2x + 1$ виконана.

а) Дослідимо функціонал на екстремум, використавши умову Вейєрштрасса. Для цього запишемо функцію Вейєрштрасса.

$$E = y'^3 + y'^2 - p^3 - p^2 - (y' - p)\left(3p^2 + 2p\right) = y'^3 + y'^2 + 2p^3 + p^2 - 3p^2 y' - 2py'.$$

Підставивши у цей вираз $y' = p$, отримуємо $E = 0$. Поділивши вираз для функції Вейєрштрасса E на $y' - p$, після елементарних перетворень отримуємо її розклад на множники: $E = (y' - p)^2 (y' + 2p + 1)$.

При $p = (2x+1)' = 2$ маємо $E = (y' - 2)^2 (y' + 5) \ge 0$, проте ця нерівність виконується не для довільних y', а для y', близьких до p. Отже, з ознаки Вейєрштрасса (теорема 5.1) випливає, що на екстремалі $y = 2x + 1$ функціонал досягає слабкого мінімума.

б) Здійснимо аналогічне дослідження, використавши умову Лежандра. Умова $F_{y'y'} = 6y' + 2 \ge 0 \; \forall y'$ не виконується, проте $F_{y'y'} = 6y' + 2 > 0$ при $y' = (2x+1)' = 2$, тобто виконується посилена умова Лежандра. Тому на екстремалі $y = 2x + 1$ досягається слабкий мінімум. Мінімальне значення функціонала $I_{\min} = \int_{-1}^{1} \left(y'^3 + y'^2 \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2^3 + 2^2 \right) dx = 12 \int_{-1}^{1} dx = 12 \cdot 2 = 24$.

Приклад 5.6. Знайти екстремум функціонала $I(y) = \int_{-1}^{2} y' \left(1 + x^2 y' \right) dx$, якщо $y(-1) = 1, \; y(2) = 4$.

Розв'язання. Знайдемо екстремалі даного функціонала. Підінтегральна функція $F = y' \left(1 + x^2 y' \right)$ не залежить від y, тому рівняння Ейлера для функціонала $I(y)$ має перший інтеграл у вигляді $F_{y'} = C$, або $2x^2 y' + 1 = C$. Звідси знаходимо $y' = \dfrac{C-1}{2x^2}$. Інтегруючи цей вираз, отримуємо $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2$, де $C_1 = -\dfrac{C-1}{2}$. При $C_1 \ne 0$ всі криві знайденого сімейства $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2$ мають розрив другого роду у точці $x = 0$, що належить відрізку інтегрування $[-1;2]$ і, тим більше, не є диференційовними на даному відрізку, тобто не є екстремалями даного функціонала.

При $C_1 = 0$ отримуємо множину прямих $y = C_2$, які при жодному значенні сталої C_2 не задовольняють заданим крайовим умовам. Таким чином, дана варіаційна задача не має розв'язку.

Приклад 5.7. Дослідити на екстремум функціонал $I(y) = \int_{1}^{2} \left(xy'^4 - 2yy'^3 \right) dx$ за умови, що $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

Розв'язання. Маємо $F = xy'^4 - 2yy'^3$, $F_y = -2y'^3$, $F_{y'} = 4xy'^3 - 6yy'^2$,

$$\frac{d\left(F_{y'}\right)}{dx} = 4y'^3 + 12xy'^2 \cdot y'' - 6y'^3 - 12yy' \cdot y'' = 12y' \cdot y'' \cdot \left(xy' - y \right) - 2y'^3.$$

Підставивши ці вирази у рівняння Ейлера $F_y - \dfrac{d\left(F_{y'}\right)}{dx} = 0$, після елементарних перетворень отримуємо $y'' \cdot 12y' \cdot \left(y - xy' \right) = 0$. Множиною розв'язків даного диференціального рівняння є сімейство прямих $y = C_1 x + C_2$. З крайових умов знаходимо:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 0; \\ y(2) = 2C_1 + C_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, екстремаль визначається рівнянням прямої $y = x - 1$.

Перевіримо виконання умови Якобі. Для отримання рівняння Якобі знайдемо значення величин $F_{yy}, F_{yy'}, F_{y'y'}$ на екстремалі $y = x - 1$.

Тут $y' = 1$, $y'' = 0$. Частинні похідні $F_{yy} = 0$, $F_{yy'} = -6y'^2$, $\frac{d\left(F_{yy'}\right)}{dx} = -12y' \cdot y''$, $F_{y'y'} = 12xy'^2 - 12yy' = 12y'\left(xy' - y\right)$. Підставивши сюди значення y та y', знаходимо $F_{y'y'} = 12\left(x - \left(x - 1\right)\right) = 12$. На прямій $y = x - 1$ рівняння Якобі набуває вигляду: $12u'' = 0$. Звідси $u = A_1 x + A_2$. Оскільки $u(1) = 0$, то $A_1 + A_2 = 0$, $A_2 = -A_1$, $u = A_1\left(x - 1\right)$. При $A_1 \neq 0$ $u \neq 0\ \forall x \in \left(1;2\right]$.

Оскільки $F_{y'y'} = 12y'\left(xy' - y\right)$ при довільних y' може мати різні знаки, то сильний екстремум відсутній. При цьому на знайденій екстремалі $y = x - 1$ $F_{y'y'} = 12 > 0$, тобто виконується посилена умова Лежандра. Тому на цій прямій функціонал досягає слабкого мінімуму.

Приклад 5.8. Дослідити на екстремум функціонал $I\left(y\right) = \int\limits_0^a \left(6y'^2 - y'^4 + yy'\right)dx$, $y(0) = 0, y(a) = b$ при різних значеннях параметрів $a > 0,\ b > 0$.

Розв'язання. Знайдемо екстремалі функціонала, що задовольняють заданим крайовим умовам. Оскільки $F_y = y'$, $F_{y'} = 12y' - 4y'^3 + y$, $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 12y'' - 12y'^2 \cdot y'' + y'$, рівняння Ейлера має вигляд:

$$y' - 12y'' + 12y'^2 \cdot y'' - y' = 0 \Leftrightarrow y''\left(y'^2 - 1\right) = 0.$$

Маємо $y'' = 0 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$, $y'^2 - 1 = 0 \Rightarrow y' = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x + C$. Загальний розв'язок другого рівняння входить до першого сімейства прямих $y = C_1 x + C_2$. При цьому $y(0) = C_2 = 0$, $y(a) = C_1 \cdot a = b \Rightarrow C_1 = \frac{b}{a}$, тобто екстремаль даної варіаційної задачі – це пряма $y = \frac{b}{a}x$.

Перевіримо виконання умови Якобі для знайденої екстремалі. $F_{yy} = 0$, $F_{yy'} = 1$, $F_{y'y'} = 12 - 12y'^2$. Оскільки для екстремалі $y = \frac{b}{a}x$ $y' = \frac{b}{a}$, то $F_{y'y'} = 12\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$. Рівняння Якобі набуває вигляду $u'' = 0$, звідки $u = A_1 x + A_2$. Оскільки для розв'язку рівняння Якобі $u(0) = 0$, то $A_2 = 0$. $u = A_1 x \neq 0\ \forall x \in \left(0;a\right]$ при $A_1 \neq 0$, тобто умова Якобі виконується $\forall a > 0, b > 0$.

Перевіримо виконання умови Лежандра. Оскільки $F_{y'y'} = 12 - 12y'^2$ при довільних значеннях y' може приймати значення різних знаків, то сильний екстремум відсутній. Розглянемо значення $F_{y'y'}$ на екстремалі $y=\frac{b}{a}x$. Тут значення $y'=\frac{b}{a}$, вираз $F_{y'y'}=12\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$ може бути додатним або від'ємним у залежності від значень a та b. При $\frac{b^2}{a^2}<1$, тобто при значеннях $0<b<a$ $F_{y'y'}>0$, виконується посилена умова Лежандра і на екстремалі $y=\frac{b}{a}x$ маємо слабкий мінімум. Якщо $\frac{b^2}{a^2}>1$, що виконується при значеннях $0<a<b$, на екстремалі величина $F_{y'y'}<0$, тобто у цьому випадку маємо слабкий максимум. Зауважимо, що у випадку, коли умова Лежандра для довільних значень y' не виконується, то з цього ще не випливає відсутність сильного екстремуму.

При $a=b$ $F_{y'y'}=0$, посилена умова Лежандра не виконується і її неможливо застосувати для дослідження функціонала на екстремум.

Для дослідження функціонала $I(y)$ на сильний екстремум використаємо умову Вейєрштрасса. Для заданого функціонала $F(x,y,y')=6y'^2-y'^4+yy'$, $F(x,y,p)=6p^2-p^4+yp$, $F_p(x,y,p)=12p-4p^3+y$.

Запишемо функцію Вейєрштрасса:

$$E=6y'^2-y'^4+yy'-6p^2+p^4-yp-(y'-p)\left(12p-4p^3+y\right).$$

Після розкриття дужок та зведення подібних членів її праву частину можна розкласти на множники:

$$E=-(y'-p)^2\left(y'^2+2py'-\left(6-3p^2\right)\right).$$

Знак цієї функції є протилежним знаку останнього множника $\left(y'^2+2py'-\left(6-3p^2\right)\right)$, що є квадратним тричленом відносно y' та p. Цей множник дорівнює нулю, якщо $y'=-p\pm\sqrt{6-2p^2}$. Параметр p є нахилом поля екстремалей на екстремалі $y=\frac{b}{a}x$, тобто $p=\left(\frac{b}{a}x\right)'=\frac{b}{a}>0$, оскільки $a>0$, $b>0$. Якщо $6-2p^2\le 0$, тобто $p\ge\sqrt{3}$, то $y'^2+2py'-\left(6-3p^2\right)\ge 0$, і, відповідно, $E\le 0$. Тому при $p=\frac{b}{a}\ge\sqrt{3}$ на екстремалі $y=\frac{b}{a}x$ функціонал досягає сильного максимуму.

Розглянемо випадок $6-2p^2>0$. Оскільки $p=\frac{b}{a}>0$, то $0<p<\sqrt{3}$. Тоді знак виразу $\left(y'^2+2py'-\left(6-3p^2\right)\right)$ залежить від значення y'. Умова

Вейєрштрасса не виконується і на прямій $y=\frac{b}{a}x$ сильний екстремум не досягається.

На екстремалі $y=\frac{b}{a}x$ у випадку $a=b$ $p=\left(\frac{b}{a}x\right)'=\frac{b}{a}=1$. Підставивши значення $p=1$ у функцію Вейєрштрасса, отримуємо:

$$E=-\left(y'-1\right)^2\left(y'^2+2y'-3\right)=-\left(y'-1\right)^3\left(y'+3\right).$$

Оскільки значення функції Вейєрштрасса змінює свій знак при значеннях y', близьких до $p=1$, то умова Вейєрштрасса не виконується, тобто не виконується необхідна умова слабкого екстремуму. Таким чином, при $a=b$ екстремум функціонала відсутній.

Отже, функціонал $I(y)$ досягає на екстремалі $y=\frac{b}{a}x$ при $\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$ сильного максимуму. При $1<\frac{b}{a}<\sqrt{3}$, маємо слабкий максимум, при значеннях $0<\frac{b}{a}<1$ досягається слабкий мінімум. Екстремальне значення функціонала

$$I\left(\frac{b}{a}x\right)=\int\limits_0^a\left(\frac{6b^2}{a^2}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2x}{a^2}\right)dx=\frac{6b^2}{a}-\frac{b^4}{a^3}+\frac{b^2}{2}.$$

При $a=b$ екстремум функціонала відсутній.

Приклад 5.9. Дослідити на екстремум функціонал $I(y)=\int\limits_0^{4\pi/3}\left(y'^2-16y^2\right)dx$, якщо $y(0)=0$, $y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв’язання. Знайдемо екстремалі функціонала, що задовольняють заданим крайовим умовам. Запишемо рівняння Ейлера. Оскільки $F_y=-32y$, $\frac{d\left(F_{y'}\right)}{dx}=\frac{d(2y')}{dx}=2y''$, то рівняння Ейлера приймає вигляд: $-32y-2y''=0$, або $y''+16y=0$. Корені його характеристичного рівняння $k_{1,2}=\pm 4i$, тому його загальний розв’язок можна записати у вигляді $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$. Знайдемо значення сталих інтегрування C_1 та C_2:

$$y(0)=C_1=0,\ y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=C_2\sin\frac{16\pi}{3}=-C_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow C_2=1.$$

Отже, шуканою екстремаллю є крива $y=\sin 4x$.

Перевіримо виконання умови Якобі. Знаходимо $F_{yy}=-32$, $F_{yy'}=0$, $F_{y'y'}=2$. Запишемо рівняння Якобі:

$$\left[F_{yy} - \frac{d\left(F_{yy'}\right)}{dx}\right] \cdot u(x) - \frac{d}{dx}\left[F_{y'y'} \cdot u'(x)\right] = 0 \Leftrightarrow -32u - 2u'' = 0 .$$

Розв’язком цього рівняння є сімейство кривих $u = A_1 \cos 4x + A_2 \sin 4x$.

З умови $u(0) = 0$ знаходимо $A_1 = 0$, тобто $u = A_2 \sin 4x$. При $A_2 \neq 0$ рівняння $u = 0$, або $\sin 4x = 0$ на проміжку $\left(0; \frac{4\pi}{3}\right]$ має корені $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, тобто умова Якобі не виконується. Оскільки окремо взята умова Якобі є необхідною умовою слабкого екстремуму, то на екстремалі $y = \sin 4x$ екстремум функціонала не досягається.

Задачі для самостійного розв’язання

Визначити криві, на яких досягається екстремум функціонала $I(y)$ та вказати тип екстремуму.

1. $I(y) = \int\limits_0^{\pi/6} \left(y'^2 - y^2\right) dx$, $y(0) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Відповідь: $y = 0$, сильний мінімум.

2. $I(y) = \int\limits_0^2 y'^3 dx$, $y(0) = 0$, $y(2) = 6$.

Відповідь: $y = 3x$, слабкий мінімум.

3. $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{y}{y'^2} dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 4$.

Відповідь: $y = (x+1)^2$, слабкий мінімум.

4. $I(y) = \int\limits_0^2 \left(xy' + y'^2\right) dx$, $y(0) = 1, y(2) = 0$.

Відповідь: $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, сильний мінімум.

5. $I(y) = \int\limits_1^2 \left(x^2 y'^2 + 12y^2\right) dx$, $y(1) = 1, y(2) = 8$.

Відповідь: $y = x^3$, сильний мінімум.

6. $I(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left(y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x\right) dx$, $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Відповідь: $y = \sin 2x$, сильний максимум.

7. $I(y)=\int_1^3 \left(12xy+y'^2\right)dx$, $y(1)=0, y(3)=26$.

Відповідь: $y=x^3-1$, сильний максимум.

8. $I(y)=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx$, $y(1)=1, y(2)=4$.

Відповідь: $y=x^2$, слабкий мінімум.

9. $I(y)=\int_0^2 \left(6y'^2-y'^4+yy'\right)dx$, $y(0)=0, y(2)=3$.

Відповідь: $y=\frac{3x}{2}$, слабкий максимум.

6. Наближені методи розв'язання варіаційних задач

Основні теоретичні відомості

Основна ідея **методу Рітца** полягає у тому, що значення функціонала

$$I(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{6.1}$$

розглядається не на довільних допустимих кривих, а тільки на всіх можливих лінійних комбінаціях виду

$$y_n=\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x), \tag{6.2}$$

де $a_i, i=1,2,...,n$ – невідомі сталі коефіцієнти, $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ – перші n функцій з деякої наперед вибраної функціональної послідовності. Така послідовність повинна бути повною. Це значить, що будь-яка допустима функція може бути апроксимованою при відповідному виборі коефіцієнтів a_i, $i=1,2,...,n$, лінійною комбінацією виду (6.2), тобто повинна виконуватися рівність:

$$\lim_{n\to\infty}\left\| y(x)-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x)\right\|=0.$$

У цій рівності розглядається норма функціонального простору $C^1_{[a;b]}$ неперервно диференційовних на відрізку $[a;b]$ функцій.

Для того, щоб функція (6.2), що є наближенням точного розв'язку варіаційної задачі, була допустимою, необхідно, щоб вона задовольняла заданим крайовим умовам. Якщо крайові умови варіаційної задачі є однорідними, то функції $\varphi_i(x), i=1,2,...,n,$ вибирають так, щоб вони задовольняли цим крайовим умовам. Наприклад, для варіаційної задачі про екстремум функціонала (6.1) при крайових умовах $y(a)=y(b)=0$ функції $\varphi_i(x)$

вибирають так, щоб $\varphi_i(a)=\varphi_i(b)=0, i=1,2,...,n.$ Наприклад, можна взяти $\varphi_i(x)=\sin\dfrac{i\pi(x-a)}{b-a}$, $i=1,2,...,n$, або $\varphi_i(x)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)^{i-1}$, $i=1,2,...,n.$

Якщо крайові умови є неоднорідними, наприклад, $y(a)=y_a\neq 0; y(b)=y_b\neq 0$, то наближений розв'язок варіаційної задачі шукають у вигляді:

$$y_n(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x), \tag{6.3}$$

де функція $\varphi_0(x)$ задовольняє заданим крайовим умовам, тобто $\varphi_0(a)=y_a, \varphi_0(b)=y_b$, а функції $\varphi_i(x), i=1,2,...,n,$ задовольняють однорідним крайовим умовам. Наприклад, можна вибрати $\varphi_0(x)=\dfrac{y_b-y_a}{b-a}\left(x-a\right)+y_a$.

На лінійних комбінаціях виду (6.2) або (6.3) функціонал $I(y)$ перетворюється у функцію $f\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ коефіцієнтів $a_1,a_2,...,a_n$. Ці коефіцієнти вибираються так, щоб функція f досягала екстремуму. При цьому вони визначаються за допомогою необхідної умови екстремуму, тобто як розв'язки системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}=0, i=1,2,...,n. \tag{6.4}$$

Підставляючи знайдені з системи (6.4) значення коефіцієнтів a_i у апроксимацію (6.2) або (6.3), отримуємо наближений розв'язок варіаційної задачі.

Функції $\varphi_i(x), i=1,2,...,n,$ називають **базисними (координатними, пробними) функціями**.

Основна ідея **скінченно-різницевого методу Ейлера** полягає у тому, що допустимі криві, на яких заданий функціонал (6.1), апроксимуються ламаними, складеними з заданої кількості n відрізків. Потім розглядаються значення функціонала на таких апроксимаціях.

Розглянемо найпростішу варіаційну задачу про знаходження екстремуму функціонала (6.1) з крайовими умовами $y(a)=y_a, y(b)=y_b$. Значення функціонала розглядаються на ламаних, складених з n відрізків з заданими абсцисами вершин $x_0=a; x_1=x_0+\Delta x, x_2=x_1+\Delta x, \ldots, x_n=x_0+n\Delta x=b$, де $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$.

На таких ламаних функціонал (6.1) перетворюється у функцію $g(y_1,y_2,...,y_{n-1})$ ординат $y_1=y(x_1), y_2=y(x_2),...,y_{n-1}=y(x_{n-1})$ вершин ламаної:

$$g(y_1,y_2,...,y_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}F\left(x_k,y_k,\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right)\Delta x. \tag{6.5}$$

Ординати $y_1,y_2,...,y_{n-1}$ вибираються так, щоб функція $g(y_1,y_2,...,y_{n-1})$ досягала екстремуму. Вони визначаються з системи рівнянь

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = 0; i = 1, 2, ..., n-1. \qquad (6.6)$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1. За допомогою методу Рітца знайти наближений розв'язок варіаційної задачі про екстремум функціонала $I(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy \right) dx$, якщо $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання. Будемо шукати наближений розв'язок у вигляді (6.2), оскільки крайові умови є однорідними. Виберемо $\varphi_i(x) = x^i(x-1), i = 1, 2, ..., n.$ Обмежимося двома базисними функціями, тобто приймемо $n = 2$. Отримаємо $\varphi_1(x) = x(x-1)$, $\varphi_2(x) = x^2(x-1)$. Тоді наближений розв'язок даної варіаційної задачі отримає вигляд:

$$y_2(x) = a_1 x(x-1) + a_2 x^2(x-1) = a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2).$$

Його похідна $y_2'(x) = a_1(2x-1) + a_2(3x^2 - 2x)$.

Підставивши ці вирази у функціонал $I(y)$, після інтегрування отримаємо:

$$I(y_2(x)) = f(a_1, a_2) = \frac{11}{30}a_1^2 + \frac{11}{30}a_1 a_2 + \frac{1}{7}a_2^2 - \frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{10}a_2.$$

Складемо систему (6.4). Отримаємо $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0$, або

$$\begin{cases} \frac{11}{15}a_1 + \frac{11}{30}a_2 = \frac{1}{6}; \\ \frac{11}{30}a_1 + \frac{2}{7}a_2 = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, знаходимо $a_1 = \frac{69}{473}; a_2 = \frac{7}{43}.$

Таким чином, наближений розв'язок варіаційної задачі має вигляд:

$$y_2(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) = \frac{x}{173}\left(47x^2 - 8x - 69\right).$$

Приклад 6.2. Використовуючи скінченно-різницевий метод Ейлера, знайти наближений розв'язок варіаційної задачі про екстремум функціонала $I(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy \right) dx$, якщо $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання. Виберемо за наближену екстремаль ламану, що складається з 5 відрізків ($n = 5$). Тоді $\Delta x = \frac{1-0}{5} = 0,2.$ Маємо $y_0 = y(0) = 0,\quad y_1 = y(0,2)$,

$y_2 = y(0,4)$, $y_3 = y(0,6)$, $y_4 = y(0,8)$, $y_5 = y(1) = 0$. Замінивши функціонал сумою за формулою (6.5), отримаємо функцію чотирьох змінних y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy\right)dx \approx g\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) =$$

$$= \left[\left(\frac{y_1}{0,2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0,2}\right)^2 + y_1^2 + 0,4y_1 + \left(\frac{y_3 - y_2}{0,2}\right)^2 + y_2^2 + \right.$$

$$\left. +0,8y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0,2}\right)^2 + y_3^2 + 1,2y_3 + \left(\frac{y_4}{0,2}\right)^2 + y_4^2 + 1,6y_4\right] \cdot 0,2.$$

Запишемо систему рівнянь (6.6) для знаходження ординат y_i, $i = 1,2,3,4.$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial y_1} = \dfrac{2y_1}{0,04} - \dfrac{2(y_2 - y_1)}{0,04} + 2y_1 + 0,4 = 0; \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y_2} = \dfrac{2(y_2 - y_1)}{0,04} - \dfrac{2(y_3 - y_2)}{0,04} + 2y_2 + 0,8 = 0; \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y_3} = \dfrac{2(y_3 - y_2)}{0,04} - \dfrac{2(y_4 - y_3)}{0,04} + 2y_3 + 1,2 = 0; \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y_4} = \dfrac{2(y_4 - y_3)}{0,04} - \dfrac{2y_4}{0,04} + 2y_4 + 1,6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь, отримуємо $y_1 = -0,0286; y_2 = -0,0505;$ $y_3 = -0,0580$; $y_4 = -0,0444$. Таким чином, ми отримали наближені значення екстремалі даної варіаційної задачі у вузлових точках $x_1 = 0,2;$ $x_2 = 0,4;$ $x_3 = 0,6;$ $x_4 = 0,8.$ Наближеним розв'язком варіаційної задачі є ламана, що складається з 4 відрізків, які з'єднують точки $\left(x_i, y_i\right), i = 1,...,4$.

Задачі для самостійного розв'язання

Знайти наближений розв'язок варіаційної задачі про екстремум вказаних функціоналів $I(y)$: а) методом Ейлера; б) методом Рітца. Порівняти значення знайдених наближених розв'язків у середині відрізка інтегрування між собою та з відповідним значенням точного розв'язку варіаційної задачі.

1. $I\left(y\right) = \int_0^2 \left(y^2 + 2y'^2 + y \cdot e^x\right)dx, \quad y\left(0\right) = 0, y\left(2\right) = 1.$

2. $I\left(y\right)=\int\limits_0^1\left(4y'^2+y\cdot y'\right)dx,\quad y\left(0\right)=0, y\left(1\right)=4.$

3. $I\left(y\right)=\int\limits_0^1\left(y-y'^2-2y\cdot\sin 2x\right)dx,\quad y\left(0\right)=0, y\left(1\right)=1.$

4. $I\left(y\right)=\int\limits_0^2\left(2y^2-4y'^2+xy\right)dx,\quad y\left(0\right)=0, y\left(2\right)=5.$

5. $I\left(y\right)=\int\limits_0^1\left(4y+2y\cdot y'-2y'^2\right)dx,\quad y\left(0\right)=0, y\left(1\right)=2.$

6. $I\left(y\right)=\int\limits_0^2\left(y^2-y'^2-2y-3x^2y\right)dx,\quad y\left(0\right)=0, y\left(2\right)=2.$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

1. Знайти екстремалі функціоналів.
2. Визначити екстремалі функціоналів, що залежать від кількох функцій.
3. Визначити екстремалі функціоналів, залежних від похідних вищих порядків.
4. Дослідити функціонал на сильний та слабкий екстремум, використовуючи достатні умови: а) Вейєрштрасса; б) Лежандра.
5. Розв’язати варіаційну задачу на умовний екстремум.
6. Розв’язати варіаційну задачу з рухомими межами.
7. Для заданого функціонала знайти екстремалі з кутовими точками (якщо вони існують).
8. Знайти наближений розв’язок варіаційної задачі, використовуючи:

а) скінченно-різницевий метод Ейлера з 4 внутрішніми вузловими точками;

б) метод Рітца з 2 базисними функціями.

Варіант 1

1. а) $I(y)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2-2xy\right)dx,\ y(-1)=-1, y(1)=1.$

б) $I(y)=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{1-y^2}{y'^2}dx,\ y(0)=0, y(\pi)=1.$

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+8yz-2ye^x\right)dx.$

3. $I(x(t))=\int_0^1\left(\ddot{x}^2-48x\right)dt,\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=-4,\ x(1)=\dot{x}(1)=0$.

4. $I(y)=\int_0^1\left(y'^2+xy\right)dx,\ y(0)=y(1)=0$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^1\left(y'^2+z'^2-zy'\right)dx$, якщо $y=z+e^x$, $y(0)=2,\ y(1)=e,\ z(0)=1,\ z(1)=0.$

6. $I(y)=\int_0^a(y'^2+y^2)dx$, $y\left(0\right)=0$, $y(a)+a-1=0.$

7. $I(y)=\int_0^1(2xy-y'^2-y^2)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=1.$

8. $I(y)=\int_0^1\left(y'^2+2yy'-3xy\right)dx$, $y(0)=1,\ y(1)=2$.

Варіант 2

1. а) $I(y)=\int_0^1\left(y'^2+12xy\right)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=1.$

б) $I(y)=\int_2^3\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$, $y(2)=2,\ y(3)=\sqrt{3}$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1\left(24xy-y''^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=y(1)=0,\ y'(1)=0{,}1$.

4. $I(y)=\int_0^1\left(x^2y-y'^2\right)dx,\ y(0)=y(1)=0$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2+z'^2-2z\cos x-2y^2\right)dx$, якщо $y=z-2\sin x$, $y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $z(0)=1,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

6. $I(y)=\int_0^a(y'^2+y^2)dx$, $y(0)=0,\ \ y(a)+a+1=0.$

7. $I(y)=\int_{-1}^1 y^2(1-y'^2)dx$, $y(-1)=0,\ y(1)=1.$

8. $I(y)=\int_0^1\left(y'^2+2yy'-y'\right)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=1$.

Варіант 3

1. а) $I(y)=\int_0^1\left(xy'+2\sqrt{y'}\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-4.$

   б) $I(y)=\int_0^1 (xy+y^2-2y^2y')dx,\ y(0)=1,\ y(1)=2.$

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+z^2+2y'z'\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1\left(48y-y''^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=4.$

4. $I(y)=\int_0^2 y'^3dx,\ y(0)=0,\ y(2)=4.$

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2+z'^2-2z'\sin x\right)dx$, якщо $y'=z-\cos x;\ \ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ z(0)=1,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

6. $I(y)=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y(0)=0,\ \ a^2y(a)=1.$

7. $I(y)=\int_0^1 (y'^2-1)^2dx;\ \ y(0)=0,\ y(1)=2.$

8. $I(y)=\int_0^1\left(xy'^2+2xy\right)dx$, $y(0)=2,\ y(1)=0$.

Варіант 4

1. а) $I(y)=\int_0^1 (y'^2+x^3y)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=4$.

   б) $I(y)=\int_0^1 (xy^2+x^2yy')dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(yz+y'z'\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^{\pi}\left(y''-y^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(\pi)=sh\pi,\ y'(\pi)=ch\pi$.

4. $I(y)=\int_0^{3/2}\left(y'^3+2y\right)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{3}{2}\right)=1.$

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^1\left(2xy-z'^2\right)dx$, якщо $y'-z+2=0$, $y(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{5},\ z(0)=2,\ z(1)=3$.

6. $I(y)=\int_0^1\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$, $y(0)=1.$

7. $I(y)=\int_0^2(y'^4-6y'^2)dx$, $y(0)=0,\ y(2)=4$.

8. $I(y)=\int_0^1\left(xy'+2y^2-3y'^2\right)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=2$.

Варіант 5

1. а) $I(y)=\int_0^1\left[\frac{1+x^2}{2}y'^2-xy'\right]dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\ln 2+\frac{\pi}{4}$

б) $I(y)=\int_0^1\frac{1+e^y}{e^e y'^2}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'z'-yz\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1\left(y''^2-24xy\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{5},\ y'(1)=1.$

4. $I(y)=\int_0^1\left(y'^3-y'^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2.$

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int_0^{\pi}y'^2dx$, якщо $\int_0^{\pi}y^2dx=1$, $y(0)=y(\pi)=0$.

6. $I(y)=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$ $y(0)=1,\ a-y(a)=1.$

7. $I(y)=\int_{-1}^1 y'^2(1+y')dx$, $y(-1)=0,\ y(1)=2$.

8. $I(y)=\int_1^2\left(y'^2+y'-y^2\right)dx,\;\; y(1)=1, y(2)=2$.

Варіант 6

1. а) $I(y)=\int_0^1\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,\, y(0)=0,\, y(1)=5$.

   б) $I(y)=\int_0^{3/4}y'^3ydx,\, y(0)=0,\, y(\frac{3}{4})=1$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'z'+6xy+12x^2z\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^{\pi/2}\left(y''^2-y^2\right)dx,\, y(0)=y'(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

4. $I(y)=\int_0^1\left(y'^3+y^2\right)dx,\, y(0)=0,\, y(1)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^1 y'z'dx$, якщо $\int_0^1 xydx=\int_0^1 xzdx=0$, $y(0)=y(1)=z\left(0\right)=0,\, z(1)=1.$

6. $I(y)=\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx$, $y(1)=2$.

7. $I(y)=\int_0^2(y'^4-2y'^2)dx$, $y(0)=0,\, y(2)=6$.

8. $I(y)=\int_0^1\left(y'^2-2y-3x\right)dx$, $y(0)=1,\, y(1)=2$.

Варіант 7

1. а) $I(y)=\int_0^1\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx,\, y(0)=y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   б) $I(y)=\int_0^{\pi/6}(y'^2-9y^2+12y\cos 3x)dx,\, y(0)=1,\, y(\frac{\pi}{6})=1+\frac{\pi}{6}$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+2yz+2ye^x\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1\left(y''^2+4y^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=2$.

4. $I(y)=\int_1^e\left(xy'^2\right)dx,\ y(1)=0,\ y(e)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^1\left(y'^2+z'^2\right)dx$, якщо $\int_0^1 yzdx=-2$, $y(0)=y(1)=z(0)=z(1)=0$.

6. $I(y)=\int_0^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$, $y(0)=0$, $y(b)=b-5$.

7. $I(y)=\int_1^3 y'^2(y'-1)^2dx$, $y(1)=0,\ y(3)=6$.

8. $I(y)=\int_0^1\left(y'^2+2y^2-xy\right)dx$, $y(0)=1,\ y(1)=4$.

Варіант 8

1. а) $I(y)=\int_1^3\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'^3}dx,\ y(1)=-3,\ y(3)=-8$.

б) $I(y)=\int_0^1(xy'+y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+2yz-2zx\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^{\pi/2}\left(y''^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

4. $I(y)=\int_0^1(1+x)y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int_0^1 x(y-z)dx$, якщо $\int_0^1 y'z'dx=-\frac{4}{5}$, $y(0)=z(0)=z(1)=0,\ y(1)=2$.

6. $I(y)=\int_1^e(2y-x^2y'^2)dx$, $y(1)=e$.

7. $I(y)=\int_0^2 y'^4 dx$, $y(0)=1, y(2)=3$.

8. $I(y)=\int_{-1}^{1}\left(xy'^2+2yy'\right)dx$, $y(-1)=1, y(1)=2$.

Варіант 9

1. а) $I(y)=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(y'^2-\dfrac{2y'}{\sin x}\right)dx, y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln\dfrac{\sqrt{3}}{3}, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

   б) $I(y)=\int_1^5\dfrac{2y'^3+y'^2}{y^4+2}dx, y(1)=2, y(5)=14$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+2yz+xye^x\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1\left(y''^2+y'^2\right)dx, y(0)=1, y'(0)=0, y(1)=ch1, y'(1)=sh1$.

4. $I(y)=\int_1^e\left(xy'^2+2y\right)dx, y(1)=1, y(e)=0$.

5. Знайти геодезичні лінії кругового циліндра радіуса R.

6. $I(y)=\int_0^{\pi/4}(y'^2-y+1)dx$, $y(0)=0$.

7. $I(y)=\int_0^{\pi/4}(y'^2-6yy'-16y^2)dx$, $y(0)=0, y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

8. $I(y)=\int_0^1\left(y'^2-3yy'-e^x y\right)dx$, $y(0)=1, y(1)=0$.

Варіант 10

1. а) $I(y)=\int_0^2\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{x-3}dx, y(0)=0, y(2)=4+2\sqrt{6}$.

   б) $I(y)=\int_1^2(y'+x^2y'^2)dx, y(1)=3, y(2)=5$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}\left(2y'z+2yz'-yz\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1\left(e^{-x}y''^2\right)dx, y(0)=0, y'(0)=1, y(1)=e, y'(1)=2e$.

4. $I(y)=\int\limits_1^e\left(y-xy'^2\right)dx,\ y(1)=1,\ y(e)=2$.

5. Точки $O(0,0)$ та $A(2,0)$ з’єднати кривою так, щоб об’єм тіла, утвореного обертанням дуги OA навколо осі Ox, був найбільшим за умови, що площа поверхні даного тіла обертання дорівнює 4π.

6. $I(y)=\int\limits_0^a(yy'+y'^2+1)dx$, $y(0)=1$, $y(a)=-3$.

7. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 y^2(1-y'^2)dx$, $y(-1)=0,\ y(1)=1$.

8. $I(y)=\int\limits_0^1\left(x^3y'^2-2xy\right)dx$, $y(0)=1,\ y(1)=2$.

Варіант 11

1. а) $I(y)=\int\limits_0^\pi(y'^2-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(\pi)=-1$

б) $I(y)=\int\limits_0^3\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}dx,\ y(0)=1,\ y(3)=4$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(z'^2-yz+x\sin x\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^1\left(x+1\right)y''^2dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=2$.

4. $I(y)=\int\limits_1^2 x^2y'^2dx,\ y(1)=3,\ y(2)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int\limits_0^1(y'^2+z'^2)dx$, якщо $y-z^2+1=0$, $y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=2$.

6. $I(y)=\int\limits_0^b\sqrt{1+y}\sqrt{1+y'^2}dx$, $y(0)=0$, $y(b)+b+1=0$.

7. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)dx$, $y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

8. $I(y)=\int\limits_0^2\left(xy'^2-3y\right)dx$, $y(0)=1,\ y(2)=2$.

Варіант 12

1. а) $I(y)=\int\limits_1^e (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0,\ y(e)=1$.

б) $I(y)=\int\limits_0^{\pi/4} y'^{3/2}\cos^3 y dx,\ y(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'z'+yz+y^2+z\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^1 \left(x+1\right)^2 y''^2 dx,\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=\ln 2,\ y'(1)=\dfrac{1}{2}$.

4. $I(y)=\int\limits_2^3 \left(x^2-1\right)y'^2 dx,\ y(2)=0,\ y(3)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int\limits_0^{\pi/2}(y-z'^2)dx$, якщо $y-z^2+5=0$, $y(0)=6,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5,\ z(0)=1,\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

6. Використовуючи методи варіаційного числення, знайти відстань від початку координат до плоскої кривої $x^2y=1$.

7. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 (y'^2-2xy)dx$, $y(-1)=2,\ y(1)=5$.

8. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 \left(y'^2+\sqrt{x}y'-y\right)dx$, $y(-1)=1,\ y(1)=2$.

Варіант 13

1. а) $I(y)=\int\limits_0^1 (1+tgy)\sqrt{y'}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2\pi$.

б) $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y'^2+yy'+4y^2+20\cos x\cdot y)dx,\ y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3e^{\pi}$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'z'+y^2x+z'^2\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^{\pi}\left(y''^2-y^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(\pi)=ch\pi+1,\ y'(\pi)=sh\pi$.

4. $I(y)=\int\limits_1^e\left(2y-x^2y'^2\right)dx,\ y(1)=e,\ y(e)=0$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^{\pi} y'^2 dx$, якщо $\int\limits_0^{\pi} y^2 dx = 1$, $y(0)=y(\pi)=0$.

6. Використовуючи методи варіаційного числення, знайти найкоротшу відстань між плоскими кривими $y=x^2$ та $y=x-5$.

7. $I(y)=\int\limits_0^{10} (y'^2-2y)dx$, $y(0)=0, y(10)=1.$

8. $I(y)=\int\limits_0^{1} \left(y'^2+y^2-2yy'\right)dx$, $y(0)=1, y(1)=2$.

Варіант 14

1. а) $I(y)=\int\limits_0^{1} \frac{y'^2}{1+y} dx, y(0)=-1, y(1)=3.$

   б) $I(y)=\int\limits_0^{1} y'^{3/2} \sin^3 y dx, y(0)=0, y(1)=\pi$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(2y'^2+z'^2-4yz\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^{1} (x+1)^3 y''^2 dx, y(0)=1, y'(0)=-1, y(1)=\frac{1}{2}, y'(1)=-\frac{1}{4}$.

4. $I(y)=\int\limits_0^{1} y^2 y'^2 dx, y(0)=1, y(1)=\sqrt{2}$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^{1} y'^2 dx$, якщо $\int\limits_0^{1} y dx = -1$, $y(0)=y(1)=0$.

6. Використовуючи методи варіаційного числення, знайти найкоротшу відстань між плоскими кривими $y=x^2+2$ та $y=x$.

7. $I(y)=\int\limits_0^{2} (2xy-y'^2-y^2)dx$, $y(0)=0, y(2)=1.$

8. $I(y)=\int\limits_0^{2} \left(5y'^2+2yy'-x\right)dx$, $y(0)=1, y(2)=2$.

Варіант 15

1. а) $I(y)=\int\limits_0^{1} (x^2 y'+2\sqrt{xy'})dx, y(0)=4, y(1)=2$.

б) $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2}(y'^2\cdot\cos x-2x\cos^2 x\cdot y')dx,\ y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(2y'+z'^2-y\cos x\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^1 y'''^2dx,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=3,\ y''(1)=6$.

4. $I(y)=\int\limits_0^{4/3}\dfrac{y}{y'^2}dx,\ y(0)=1,\ y\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^1(y'^2+3x^4+8e^{2x}\cos 3x)dx$, якщо $\int\limits_0^1(2y-y'^2)dx=-1,\ y(0)=y(1)=0$.

6. $I(y)=\int\limits_0^{\pi}(y^2-y'^2-2y\sin x)dx,\ y(0)=0$.

7. $I(y)=\int\limits_0^2 y^2(1-y'^2)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=3$.

8. $I(y)=\int\limits_0^1\left(y'^2-xy^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

Варіант 16

1. а) $I(y)=\int\limits_0^1(y^2+y'^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

б) $I(y)=\int\limits_0^1\dfrac{\sqrt{1+4y'^2}}{4(x+1)}dx,\ y(0)=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y(1)=1$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(2y'z'-y'^2+2z\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y^2-y''^2+2y+x^2e^{-x}\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

4. $I(y)=\int\limits_0^1 e^y y'^2dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\ln 4$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y,z)=\int\limits_0^1(y'^2+z)dx$, якщо $z-y^2-x=0\ \ y(0)=1,\ y(1)=e,\ z(0)=1,\ z(1)=e^2+1$.

6. Методами варіаційного числення знайти найкоротшу відстань між колом $x^2 + y^2 = 9$ та прямою $y = 2 - x$.

7. $I(y) = \int_0^2 (y'^2 - 1)^2 dx$, $y(0) = 0, y(2) = 2$.

8. $I(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + 2xyy' \right) dx$, $y(0) = 1, y(1) = 2$.

Варіант 17

1. а) $I(y) = \int_0^1 \frac{1 + y^2}{y'^2} dx, y(0) = 0, y(1) = \sqrt{3}$.

   б) $I(y) = \int_0^1 (xy' + y'^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 1$.

2. $I(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} \left(z'^2 + 2y'z' - yz - x \right) dx$.

3. $I(y) = \int_0^1 \left(120xy - y''^2 \right) dx, y(0) = y'(0) = 0, y(1) = 1, y'(1) = 6$.

4. $I(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + yy' + 12xy \right) dx, y(0) = y(1) = 0$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y, z) = \int_0^1 (y'^2 + z^2 - \sin x) dx$, якщо $y^2 - z^2 + 1 = 0$, $y(0) = 0, y(1) = e, z(0) = \sqrt{2}, z(1) = \sqrt{e^2 + 1}$.

6. Методами варіаційного числення знайти найкоротшу відстань від точки $A(1;0)$ до еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

7. $I(y) = \int_0^1 (y'^4 - 4y'^2) dx$, $y(0) = 0, y(1) = 2$.

8. $I(y) = \int_0^1 \left(2y' + 2xy - y^2 \right) dx$, $y(0) = -1, y(1) = 1$.

Варіант 18

1. а) $I(y) = \int_0^{2\pi} (2y \cdot tgx - y'^2) dx, y(0) = 0, y(2\pi) = 2\pi$.

   б) $I(y) = \int_0^1 y'(x + \sqrt{1 - x^2} y') dx, y(0) = \frac{1}{2}, y(1) = \frac{\pi}{4}$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(xy+2x^2z+y'z'-yz\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y''^2-y^2+x^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1.$

4. $I(y)=\int\limits_{1}^{e}\left(xy'^2+yy'\right)dx,\ y(1)=0,\ y(e)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^1 y'^2dx$, якщо $\int\limits_0^1(y-y'^2)dx=\dfrac{1}{12}$, $y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{1}{4}$.

6. $I(y)=\int\limits_0^2(2xy+yy'+y'^2)dx$, $y(0)=0$.

7. $I(y)=\int\limits_0^1 y'^2(1-y')dx$, $y(0)=0,\ y(1)=2$.

8. $I(y)=\int\limits_{-1}^{1}\left(4y'^2-2yy'-2y^2\right)dx$, $y(-1)=1,\ y(1)=4$.

Варіант 19

1. а) $I(y)=\int\limits_2^3\left(2xy'-\dfrac{1-x^2}{2}y'^2\right)dx,\ y(2)=-\ln 3,\ y(3)=-3\ln 2$.

   б) $I(y)=\int\limits_2^3\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,\ y(2)=2,\ y(3)=\sqrt{3}$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+2yz+2z-2ye^x\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^{\pi}\left(y'''^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(\pi)=y''(\pi)=sh\pi,$ $y'(\pi)=ch\pi+1$.

4. $I(y)=\int\limits_0^1\left(x^2y'^2+12y^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^1 y'^2dx$, якщо $\int\limits_0^1 ydx=3$, $y(0)=1,\ y(1)=6$.

6. $I(y)=\int\limits_0^a(xy'+y'^2)dx$, $y(0)=0,\ y(a)=0$.

7. $I(y)=\int_0^1 (y'^4 - y'^2)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=3$.

8. $I(y)=\int_0^1 \left(y'^2 + 2xy' + x^2\right)dx$, $y(0)=1,\ y(1)=2$.

Варіант 20

1. а) $I(y)=\int_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)dx,\ y(1)=1,\ y(2)=0$.

   б) $I(y)=\int_0^1 \frac{1-y}{y'^2}dx,\ y(0)=1,\ y(1)=-3$.

2. $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1} \left(y'^2 + z'^2 - 2z^2 + 2yz - 2x^3 y\right)dx$.

3. $I(y)=\int_0^1 \left(y'''^2 - y''^2\right)dx,\ y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=y''(1)=sh1,$
$y'(1)=ch1$.

4. $I(y)=\int_{-1}^1 \left(y'^2 + y^2\right)dx,\ y(-1)=y(1)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int_0^{\pi/6} (y'^2 - 9y^2)dx$, якщо $\int_0^{\pi/6} 2y dx = 1$,
$y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

6. $I(y)=\int_0^a (y'^2 - y^2)dx$, $y(0)=0$, $y(a)=-1$.

7. $I(y)=\int_1^2 y'(y'-1)^2 dx$, $y(1)=0,\ y(2)=\frac{1}{2}$.

8. $I(y)=\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 - xy'\right)dx$, $y(0)=1,\ y(1)=2$.

Варіант 21

1. а) $I(y)=\int_0^1 \frac{\sqrt{1+y^2}}{yy'}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\sqrt{3}$.

   б) $I(y)=\int_0^1 (2x^3 y' - y'^2(x+1))dx,\ y(0)=0,\ y(1)=\frac{5}{6}-\ln 2$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(z'^2-y'^2-2z^2+2yz-2x^2y\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^1\left(y^2+y''^2-2yx^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1$.

4. $I(y)=\int\limits_{-1}^1\left(y'^2+4y^2\right)dx,\ y(-1)=-1,\ y(1)=1$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^1 y'^2dx$, якщо $\int\limits_0^1 ydx=0$, $y(0)=1,\ y(1)=0$.

6. $I(y)=\int\limits_0^2(xy'+y'^2)dx$, $y(0)=5$.

7. $I(y)=\int\limits_0^1 y'^3dx$, $y(0)=1,\ y(1)=3$.

8. $I(y)=\int\limits_0^1\left(y'^2-2yy'-y^2\right)dx$, $y(0)=-2,\ y(1)=2$.

Варіант 22

1. а) $I(y)=\int\limits_{-1}^1(y'^2-2xy)dx,\ y(-1)=-1,\ y(1)=1.$

   б) $I(y)=\int\limits_0^1\frac{y'^2}{1+\cos y}dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-\frac{\pi}{3}$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+z^2\right)dx$

3. $I(y)=\int\limits_0^1\left(2y^2-y''^2+x^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1\ y'(1)=1$.

4. $I(y)=\int\limits_0^1\left(y'^2+y^2+4ychx\right)dx,\ y(0)=y(1)=0$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^\pi y'^2dx$, якщо $\int\limits_0^\pi y\cos xdx=\frac{\pi}{2}$, $y(0)=1,\ y\left(\pi\right)=-1.$

6. Методами варіаційного числення знайти найкоротшу відстань між півколами $y=2-\sqrt{3x^2+2x}$ та $y=-3+\sqrt{10x-x^2+24}$.

7. $I(y)=\int\limits_1^2(y'+x^2y'^2)dx,\ y(1)=3,\ y(2)=5$.

8. $I(y)=\int\limits_0^2\left(5y'^2+10yy'+xy\right)dx$, $y(0)=1, y(2)=4$.

Варіант 23

1. а) $I(y)=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1-y^2}}{y'^2}dx, y(0)=0, y(1)=\frac{1}{2}$.

б) $I(y)=\int\limits_0^{\pi/4}(4y^2-y'^2+8y)dx, y(0)=-1, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+z'^2+y^2\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^1\left(y^2+y''^2-y'x^2\right)dx, y(0)=y'(0)=0, y(1)=1, y'(1)=1$.

4. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2\right)dx, y(0)=1, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int\limits_0^{\pi}y\sin x dx$, якщо $\int\limits_0^{\pi}y'^2dx=\frac{3\pi}{2}$, $y(0)=0, y(\pi)=\pi$.

6. $I(y)=\int\limits_0^a(yy'+y'^2+1)dx$, $y(0)=1$, $y(a)=-3$.

7. $I(y)=\int\limits_0^1 y^2(1-y'^2)dx$, $y(0)=0, y(1)=1$.

8. $I(y)=\int\limits_{-1}^1\left(y'^2-2xyy'+x^2y\right)dx$, $y(-1)=1, y(1)=0$.

Варіант 24

1. а) $I(y)=\int\limits_1^2(3xy'^5-5yy'^4)dx, y(1)=1, y(2)=4$.

б) $I(y)=\int\limits_0^1\frac{1+\cos y}{y'}dx, y(0)=0, y(1)=\frac{\pi}{2}$.

2. $I(y,z)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(2xy-y'^2+\frac{1}{3}z'^2\right)dx$.

3. $I(y)=\int\limits_0^1\left(y'''^2+yx^2\right)dx, y(0)=y'(0)=0, y(1)=0, y'(1)=1$.

4. $I(y)=\int_{0}^{\pi/4}\left(y'^2-4y^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

5. Знайти екстремаль функціонала $I(y)=\int_{0}^{1}y'^2dx$, якщо $\int_{0}^{1}ye^{-x}dx=e$, $y(0)=2e+1,\ y(1)=2$.

6. $I(y)=\int_{-1}^{1}(xy'^4-2yy'^3)dx,\ y(1)=1.$

7. $I(y)=\int_{0}^{1}(y'^2-2xy)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=5.$

8. $I(y)=\int_{0}^{1}\left(xy'^2+2y'-y^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=2.$

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1978. – 296с.
2. Лаврентьев М.А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. – М.: Высшая школа, 1981. – 417с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.4, ч.1 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1979. – 326с.
4. Буслаев В.С. Вариационное исчисление / В.С. Буслаев. – Л.: Издательство ЛГУ, 1980. – 289с.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению / Н.И. Ахиезер. – М.: Физматгиз, 1965. – 417с.
6. Банди Б. Введение в методы оптимизации / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1986. – 204с.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 529с.
8. Аоки М. Введение в методы оптимизации / М. Аоки. – М.: Наука, 1974. – 276с.
9. Ванько В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин. – М.: МГТУ им. Баумана, 2001. – 488с.
10. Аттетков А.В. Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: МГТУ им. Баумана, 2003. – 439с.
11. Коша А. Вариационное исчисление / А. Коша. – М.: Высшая школа, 1983. – 280с.

12. Краснов М.Л. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 192с.

13. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2006. – 272с.

14. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2002. – 543с.

Додаткова:

1. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сеа. – М.: Мир, 1981. – 306с.
2. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1984. – 274с.
3. Гирсанов И.В. Лекции по теории экстремальных задач / И.В. Гирсанов. – М.: Издательство МГУ, 1989. – 362с.
4. Реклейтис Г. Оптимизация в технике / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М.: Мир,1986. – 403с.
5. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука,1976. – 291с.
6. Моисеев Н.И. Методы оптимизации / Н.И. Моисеев. – М.: Высшая школа, 1989. – 348с.
7. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.В. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1973. – 271с.
8. Михлин С.Г. Вариационные принципы математической физики / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1976. – 317с.
9. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 2003. – 467с.
10. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432с.
11. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению / Л. Янг. – М.: Мир, 1974. – 488с.
12. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. – М.: Наука, 1978. – 287с.
13. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л. Бердичевский. – М.:Наука, 1983. – 448с.
14. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М.: Энергия, 1975. – 208с.
15. Ланцош К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. – М.: Мир, 1965. – 408с.
16. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 590с.

17. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике / Л.С. Полак. – М.: Физматгиз, 1960. – 599с.
18. Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы) / Л.Ф. Черноусько, Н.Н. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 238с.
19. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: Справочное руководство / Л.Я. Цлаф. – СПб.: Лань, 2005. – 192с.
20. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч.2 / А.В. Ефимов, Ю.Г. Золотарев, В,М. Терпигорева. – М.: Высшая школа, 1980. – 290с.
21. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 185с.
22. Карташов А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташов, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1986. – 238с.
23. Моисеев Н.И. Методы оптимизации / Н.И. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М.Столярова. – М.: Наука, 1978. –371с.