

§4. 1. Розв'язання задач математичної фізики із зосередженими параметрами

Моделювання деяких практичних задач пов'язано із залученням зосереджених параметрів типу точкових матеріальних мас, точкових сил і моментів, імпульсів, що миттєво діють, точкових джерел тепла і т.ін.

Нижче дані приклади розв'язання задач із зосередженими параметрами на основі застосування δ -функції Дірака.

1.1. δ -функція Дірака

Розглянемо декілька функцій.

$$1) Q(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]. \end{cases}$$

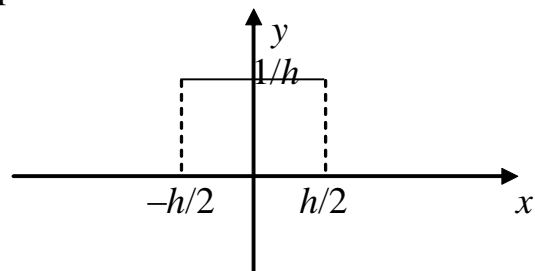


Рис. 2.10

Ця функція задовольняє рівності (рис. 2.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = 1.$$

Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = 2 \int_0^{h/2} \frac{dx}{h} = \frac{2}{h} x \Big|_0^{h/2} = 1.$$

$$2) Q(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Обчислимо площу під графіком цієї функції (рис. 2.11):

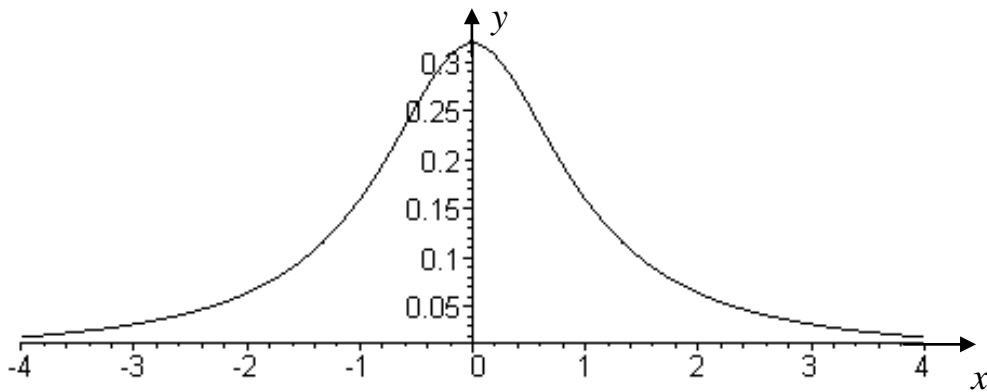


Рис. 2.11

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

$$3) Q(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Площа під графіком цієї функції (рис. 2.12) $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = 1$. Дійсно,

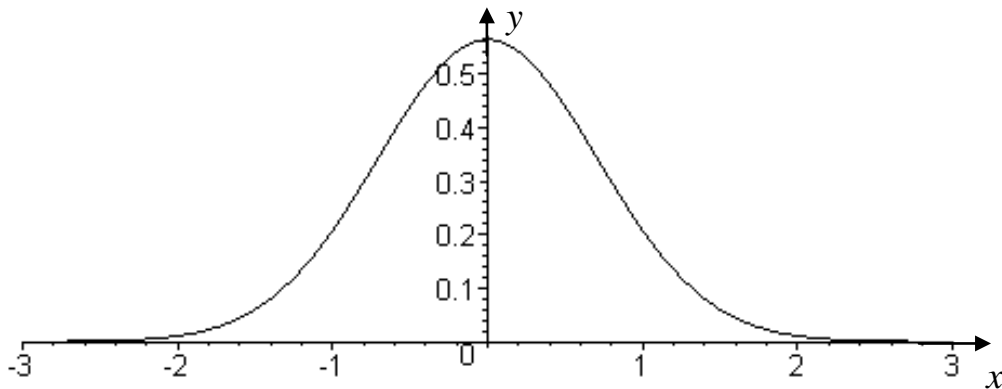


Рис. 2.12

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Раніше було доведено, що $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ за властивістю Γ -функції (див. додаток).

Нехай функція $Q(x)$ така, що задовольняє умову $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = 1$. Тоді функція вигляду

$$Q_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

де ε – стала величина, яка може бути як завгодно малою, також буде задовольняти цю умову (рис. 2.13). Дійсно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \left[\frac{x}{\varepsilon} = t \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) dt = 1.$$

При зменшенні сталої ε графіки функцій $Q_\varepsilon(x)$ будуть звужуватися вздовж осі Ox та нескінченно зростати в околі точки $x = 0$.

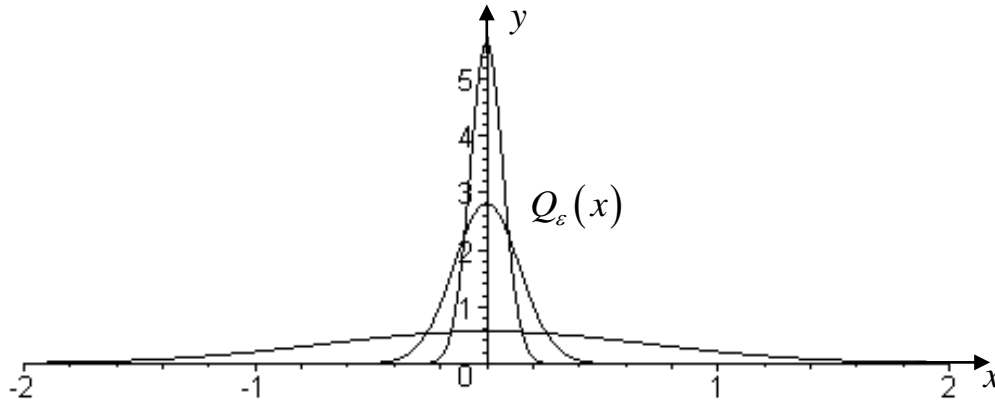


Рис. 2.13

Якщо зробити граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$, то отримаємо так звану узагальнену функцію Дірака

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_\varepsilon(x).$$

Визначення. Дельта-функцією називається функція, яка задовольняє вимоги

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Ця функція має фільтруючу властивість, яка доведена у такій теоремі.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на всій множині дійсних чисел, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (2.82)$$

або в узагальненій формі

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (2.83)$$

Доказ. Доведемо першу рівність. Нехай a – деяке додатне число. Тоді вихідний невласний інтеграл можна представити як

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{-a} f(x) \delta(x) dx + \int_{-a}^a f(x) \delta(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) \delta(x) dx =$$

|| Враховуючи властивості δ -функції одержимо ||

$$= \int_{-a}^a f(x) \delta(x) dx = || \text{Скористаємося тим, що } \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_\varepsilon(x), \text{ тоді } ||$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a f(x) Q_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) Q_\varepsilon(x) dx =$$

|| за узагальненою теоремою про середнє значення існує $\xi \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ таке, що ||

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\xi) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Q_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\xi) = f(0).$$

Рівність доведено.

Щоб довести рівність (2.83), у першій рівності (2.82) виконують заміну $x - x_0 = t$.

Поняття δ -функції дозволяє використовувати метод Фур'є для розв'язання задач із зосередженими факторами. Наприклад, якщо йдеться про розв'язання задачі про коливання струни під дією зосередженої сили в точці $x = x_0$. Тоді, щоб визначити інтенсивність сили в цій точці розподілимо всю силу на проміжку $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ із загальною довжиною 2ε . Тоді інтенсивність сили можливо визначити як

$$P(x) = \begin{cases} \frac{P}{2\varepsilon}, & x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \in [0; x_0 - \varepsilon) \cup (x_0 + \varepsilon; l] \end{cases}$$

$$\text{або } P(x) = P \cdot Q_\varepsilon(x - x_0), \text{ де } Q_\varepsilon(x - x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \in [0; x_0 - \varepsilon) \cup (x_0 + \varepsilon; l]. \end{cases}$$

Перейдемо до границі, якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, тоді одержимо, що

$$P(x) = P \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_\varepsilon(x - x_0) = P \cdot \delta(x - x_0).$$

Для прикладу розглянемо задачі, які виникають при вивченні малих поперечних коливань пружної струни, малих поздовжніх коливань прямолінійного пружного стержня й одновимірних теплових задач.

4.2. Зосереджений параметр входить у праву частину рівняння

Приклад 1.

Вивчити поперечні коливання струни довжиною l з кінцями, закріпленими в точках $x=0$ і $x=l$. На струну діє сила $A \sin \omega t$, яка зосереджена в деякій точці $x=c$. Визначити форму вимушених коливань, якщо в початковий момент переміщення й швидкості всіх точок струни були нульовими.

Розв'язання. Позначимо через $u = u(x, t)$ прогин струни в точці x у момент t . Функція $u(x, t)$ є розв'язком лінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.84)$$

T_0 – натяг струни, ρ – щільність і $f(x, t)$ – інтенсивність навантаження. Умови закріплення кінців струни

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.85)$$

початкові умови

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

У нашому випадку $f(x, t) = A \sin \omega t \cdot \delta(x - c)$.

Розв'язок неоднорідного рівняння (2.84) будемо знаходити у вигляді суми двох функцій $u = v + w$, де v є розв'язком відповідного однорідного рівняння, а w – розв'язком неоднорідного рівняння.

За методом Фур'є нетривіальний розв'язок $v(x, t)$ однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad (2.86)$$

має вигляд $v(x,t) = X(x)T(t)$. Задача (2.86) із заданими крайовими умовами була розв'язана раніше.

Загальний розв'язок задачі (2.86) наведемо у вигляді суперпозиції частинних розв'язків:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{an\pi t}{l} + B_n \cos \frac{an\pi t}{l} \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.87)$$

Звертаючись до початкових умов, знаходимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n B_n X_n(x) = 0;$$

з ортогональності випливає, що $A_n = B_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Отже $v(x,t) \equiv 0$.

Розв'язок неоднорідного рівняння (2.84), відповідно до теореми розвинення за системою функцій $X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$, шукаємо у вигляді:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) X_n(x).$$

Для відшукування невизначених коефіцієнтів $\gamma_n(t)$ підставимо цей ряд у рівняння (2.84). Тоді одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \gamma_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 \gamma_n(t) \} X_n(x) = \frac{1}{\rho} f(x,t). \quad (2.88)$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на X_k , і результат проінтегруємо на відрізку $[0, l]$. Завдяки ортогональності системи $\{X_n\}$ всі члени ряду (2.88) при $n \neq k$ після інтегрування зникнуть. Як результат отримаємо рівняння

$$\gamma_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 \gamma_n(t) = f_n(t), \quad (2.89)$$

де

$$f_n(t) = \frac{1}{\rho} \int_0^l f(x,t) X_n(x) dx = \frac{A}{\rho} \sin \omega t \cdot X_n(c). \quad (2.90)$$

Частинний розв'язок рівняння (2.89), який відповідає умовам $\gamma_n(0) = \gamma_n'(0) = 0$, знаходимо методом варіації довільних сталих у випадку $\omega \neq a\lambda_n$:

$$\gamma_n(t) = \frac{A}{\rho} X_n(c) \cdot \frac{\lambda_n a \sin \omega t - \omega \sin \lambda_n a t}{\lambda_n a (\lambda_n^2 a^2 - \omega^2)}.$$

У результаті для функції $w(x, t)$ одержуємо розвинення:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot \gamma_n(t).$$

Загальний розв'язок розглянутої задачі є сумою цієї функції та функції (2.87) і записується у вигляді

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = w(x, t).$$

Таким чином, якщо частота сили не збігається з жодною із власних частот вільних коливань струни $a\lambda_n$, (резонанс відсутній), її рух описується рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\rho l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \frac{\lambda_n a \sin \omega t - \omega \sin \lambda_n a t}{\lambda_n a (\lambda_n^2 a^2 - \omega^2)}. \quad (2.91)$$

Оскільки $\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, отриманий ряд абсолютно та рівномірно збігається при всіх x і t , а його сума залишається обмеженою за часом.

Розглянемо інший випадок, коли ω збігається з однією із власних частот $a\lambda_k$. Розв'язок у цьому випадку можна одержати з (2.91), виконуючи граничний перехід при $\omega \rightarrow a\lambda_k$. Використовуючи правило Лопіталя, одержуємо:

$$\lim_{\omega \rightarrow a\lambda_k} \frac{\lambda_k a \sin \omega t - \omega \sin \lambda_k a t}{\lambda_k a (\lambda_k^2 a^2 - \omega^2)} = -\frac{t \lambda_k a \cdot \cos \lambda_k a t - \sin \lambda_k a t}{2a^2 \lambda_k^2}.$$

Таким чином, у випадку резонансу

$$u(x, t) = \frac{A}{\rho l a^2 \lambda_k^2} (\sin \lambda_k a t - t \lambda_k a \cos \lambda_k a t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi c}{l} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{2A}{\rho l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \frac{\lambda_n a \sin \omega t - \omega \sin \lambda_n a t}{\lambda_n a (\lambda_n^2 a^2 - \omega^2)}.$$

Завдяки появі тут лінійного множника t відхилення необмежено зростає зі збільшенням t . Звичайно, на реальній струні нескінченно велике зростання амплітуди коливань неможливе. Це протиріччя пояснюється тим, що рівняння (2.84) придатне лише для опису малих коливань струни та не може бути застосоване при великих амплітудах.

Приклад 2.

Один кінець тонкого однорідного стержня, розташованого між точками $x=0$ й $x=l$ числової осі, підтримується при нульовій температурі, інший кінець і вся бічна поверхня теплоізолювані. У момент $t=0$ у внут-

рішній точці стержня $x = x_0$ починає діяти теплове джерело інтенсивності Q . Знайти розподіл температури в стержні у довільний момент часу $t > 0$, якщо в початковий момент вона дорівнювала нулю.

Розв'язання. Нехай $u = u(x, t)$ – температура стержня в точці x в момент часу t . Функція $u(x, t)$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.92)$$

граничні умови

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.93)$$

і початкові умови

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.94)$$

Тут ρ – щільність матеріалу стержня; c – питома теплоємність; k – коефіцієнт теплопровідності; $f(x, t)$ – інтенсивність джерел. У даному випадку функція $f(x, t) = Q \cdot \delta(x - x_0)$.

Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} \quad (2.95)$$

методом Фур'є. Якщо покласти $u(x, t) = X(x)T(t)$, то для $T(t)$ одержимо рівняння першого порядку

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0,$$

а для $X(x)$ – задачу Штурма–Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

з невідомим параметром λ . Звідси

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

і з першої граничної умови $B = 0$. З другої умови маємо

$$A \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Оскільки $A \neq 0$ і $\lambda \neq 0$ (інакше $X(x) \equiv 0$), для знаходження λ одержуємо рівняння $\cos \lambda l = 0$. Отже, власні числа λ^2 набувають дискретних значень

$$\lambda_n^2 = \frac{\pi^2 (2n-1)^2}{4l^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

яким відповідають власні функції $X_n(x) = A_n \sin \lambda_n x$. Для кожного n знаходимо

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

i

$$u_n(x, t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} X_n(x).$$

За принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння (2.95) подається рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} X_n(x)$$

з довільними постійними C_n . Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.92) розшукуємо у вигляді ряду:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t) X_n(x)$$

з невідомими функціями $D_n(t)$. Підставляючи цей ряд у рівняння (2.92), одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (D_n'(t) + \lambda_n^2 a^2 D_n(t)) X_n(x) = \frac{1}{c\rho} f(x, t).$$

Як і в попередній задачі, скористаємося ортогональністю функцій $X_n(x)$. Помножимо обидві частини останньої рівності на $X_m(x)$ і проінтегруємо результат на відрізку $[0, l]$. Всі доданки ряду, що відповідають $n \neq m$, на підставі ортогональності власних функцій зникнуть, і тоді отримуємо рівняння

$$D_m'(t) + \lambda_m^2 a^2 D_m(t) = f_m(t),$$

де

$$f_m = \frac{1}{c\rho} \int_0^l f(x, t) X_m(x) dx.$$

Загальний розв'язок цього рівняння представляється у вигляді

$$D_m(t) = F_m e^{-a^2 \lambda_m^2 t} + \int_0^t e^{-a^2 \lambda_m^2 (t-\tau)} f_m(\tau) d\tau, \quad F_m = \text{const},$$

звідки загальний розв'язок рівняння (2.92) знаходимо як

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau X_n(x).$$

З початкової умови

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x) = 0$$

і на підставі співвідношення ортогональності власних функцій $F_n = 0$ для всіх $n \geq 1$. Крім того, за умовою задачі

$$f(x, t) = Q\delta(x - x_0), \text{ тому } f_n(t) = \frac{Q}{c\rho} X_n(x_0).$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau = \\ & = \frac{Q}{c\rho} X_n(x_0) \frac{-1}{a^2\lambda_n^2} e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} \Big|_0^t = \frac{Q}{a^2c\rho\lambda_n^2} X_n(x_0) (1 - e^{-a^2\lambda_n^2t}). \end{aligned}$$

Таким чином розв'язок рівняння (2.92), що задовольняє умови (2.93) і (2.94), має вигляд:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{a^2c\rho\lambda_n^2} X_n(x) X_n(x_0) (1 - e^{-a^2\lambda_n^2t}). \quad (2.96)$$

Зі збільшенням t експонентний множник у кожному доданку прямує до нуля, і в стержні встановлюється стаціонарний розподіл температури:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{a^2c\rho\lambda_n^2} X_n(x) X_n(x_0).$$

Функцією (2.96) можна скористатися для розв'язку задачі теплопровідності при наявності миттєвого точкового джерела, тобто джерела, зосередженого не тільки в просторі, але й у часі. Дійсно, якщо дія точкового джерела, розглянутого вище, починається не в нульовий, а в довільний момент ($\tau > 0$), то розв'язок задачі теплопровідності має вигляд

$$u_{\tau}(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ u(x, t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Будемо вважати, що з моменту τ в точці $x = x_0$ стержня діє джерело інтенсивності $\frac{Q}{\Delta\tau}$, а в момент $\tau + \Delta\tau$ у тій же точці одночасно включається

джерело інтенсивності $-\frac{Q}{\Delta\tau}$. Тоді фактична дія теплових джерел припиняється в момент $\tau + \Delta\tau$, а загальна кількість виділеного тепла за час від τ до $\tau + \Delta\tau$ дорівнює Q . Розподіл температури в стержні описується функцією:

$$G_{\tau}(x, x_0, t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ \frac{Q}{a^2c\rho} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) X_n(x_0) \frac{e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau-\Delta\tau)} - e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}}{\lambda_n^2\Delta\tau}, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Після граничного переходу при $\Delta\tau \rightarrow 0$ одержуємо функцію миттєвого точкового теплового джерела:

$$G(x, x_0, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l} \sin \frac{\pi(2n-1)x_0}{2l} e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\right)^2 (t-\tau)}, \quad t - \tau \geq 0.$$

Вона задає температуру в точці x стержня за умови, що в момент τ у точці x_0 миттєво виділяється $Q = c\rho$ одиниць тепла. Зі зростанням t ця функція прямує до нуля: стержень остигає до нульової температури завдяки тому, що тепло, яке виділилося в початковий момент, іде через кінець $x = 0$, де підтримується нульова температура.

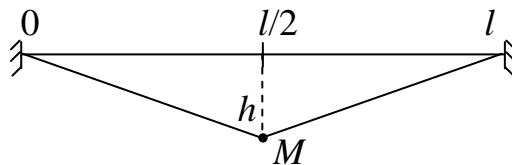
7.3. Зосереджений параметр входить у коефіцієнти рівняння

Приклад 3

Вивчити коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ (щільність ρ) із закріпленими кінцями та зосередженою масою M в точці $x = \frac{l}{2}$ струни, викликані початковим відхиленням струни, яке визначається за формулою

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h(l-x)}{l}, & \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$$

де h – мале число. Початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю.



Розв'язання. Завдання полягає у відшуванні розв'язку рівняння:

$$\left(\rho + M \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.97)$$

який задовольняє граничні

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

і початкові умови:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Тут T_0 – сила натягу струни.

Застосовуючи метод поділу змінних для відшукування нетривіального розв'язку однорідного рівняння, покладемо $u(x, t) = X(x)T(t)$. Одержуємо рівняння $T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0$ і крайову задачу Штурма–Ліувілля:

$$\begin{cases} T_0 X''(x) + \lambda^2 \left(\rho + M \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right) X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

Коефіцієнт $\rho + M \delta \left(x - \frac{l}{2} \right)$ має розрив другого роду в точці $x = \frac{l}{2}$.

Тому доводиться окремо розглядати це рівняння на ділянках $\left(0, \frac{l}{2} \right)$ і $\left(\frac{l}{2}, l \right)$

і знайдені на них розв'язки поєднувати в точці $x = \frac{l}{2}$.

Якщо $0 < x < \frac{l}{2}$, то

$$T_0 X''(x) + \lambda^2 \rho X(x) = 0,$$

$$X''(x) + \frac{\lambda^2}{a^2} X(x) = 0,$$

де $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$. Виходить

$$X(x) = A_1 \sin \frac{\lambda}{a} x + B_1 \cos \frac{\lambda}{a} x,$$

і з умови $X(0) = 0$ знаходимо $B_1 = 0$. Таким чином, $X(x) = A_1 \sin \frac{\lambda}{a} x$.

Аналогічно, при $\frac{l}{2} < x < l$ маємо:

$$X''(x) + \frac{\lambda^2}{a^2} X(x) = 0,$$

$$X(x) = A_2' \sin \frac{\lambda}{a} x + B_2' \cos \frac{\lambda}{a} x.$$

Тепер з $X(l) = 0$ одержимо

$$A_2' \sin \frac{\lambda l}{a} + B_2' \cos \frac{\lambda l}{a} = 0$$

і можна прийняти $A_2' = A_2 \cos \frac{\lambda l}{2}$, $B_2' = -A_2 \sin \frac{\lambda l}{2}$, де A_2 – деяке постійне число. Тоді

$$X(x) = A_2 \left(\sin \frac{\lambda x}{a} \cos \frac{\lambda l}{a} - \cos \frac{\lambda x}{a} \sin \frac{\lambda l}{a} \right) = A_2 \sin \frac{\lambda(x-l)}{a} \quad \text{і}$$

$$X(x) = \begin{cases} A_1 \sin \frac{\lambda}{a} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ A_2 \sin \frac{\lambda}{a} (x-l), & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases} \quad (2.99)$$

У виразі для функції $X(x)$ залишаються невизначеними сталі A_1 , A_2 і λ . Для їхнього відшукування скористаємося тим, що струна повинна в усі моменти часу залишатися нерозривною. Це значить, що повинна виконуватися умова неперервності:

$$X\left(\frac{l}{2}+0\right) = X\left(\frac{l}{2}-0\right). \quad (2.100)$$

Крім того, якщо проінтегрувати рівняння (2.98) за відрізком $\left[\frac{l}{2}-\varepsilon, \frac{l}{2}+\varepsilon\right]$ і потім спрямувати ε до нуля, одержимо так звану умову спряження:

$$T_0 \left[X'\left(\frac{l}{2}+0\right) - X'\left(\frac{l}{2}-0\right) \right] + \lambda^2 M X\left(\frac{l}{2}\right) = 0. \quad (2.101)$$

Пояснимо фізичний зміст останньої умови. Функція $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$ дає значення переміщення зосередженої маси M . Рівняння руху цієї маси за другим законом Ньютона має вигляд

$$M \frac{\partial^2 u\left(\frac{l}{2}, t\right)}{\partial t^2} = F(t).$$

Проекція рівнодіючої сили натягу струни $F(t)$ на напрямок руху дорівнює

$$F(t) = T_0 \left[\frac{\partial u\left(\frac{l}{2}+0, t\right)}{\partial x} - \frac{\partial u\left(\frac{l}{2}-0, t\right)}{\partial x} \right]. \text{ Виходить, що}$$

$$M \frac{\partial^2 u\left(\frac{l}{2}, t\right)}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\partial u\left(\frac{l}{2}+0, t\right)}{\partial x} - \frac{\partial u\left(\frac{l}{2}-0, t\right)}{\partial x} \right], \quad t > 0.$$

Якщо врахувати, що $u\left(\frac{l}{2}, t\right) = T(t)X\left(\frac{l}{2}\right)$ і $T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0$, отримаємо рівність (2.101). Таким чином, умова (2.101) виходить у результаті відділення часу в рівнянні руху зосередженої маси M .

Відшукаємо сталі A_1 і A_2 з (2.100) і (2.101).

$$\begin{cases} A_1 \sin \frac{\lambda l}{2a} + A_2 \sin \frac{\lambda l}{2a} = 0; \\ A_1 \frac{\lambda}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} - A_2 \left(\frac{\lambda}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} - \lambda^2 \frac{M}{T_0} \sin \frac{\lambda l}{2a} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.102)$$

Визначник системи двох лінійних однорідних рівнянь із невідомими A_1 і A_2 дорівнює:

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} \sin \frac{\lambda l}{2a} & \sin \frac{\lambda l}{2a} \\ \frac{\lambda}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} & -\frac{\lambda}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} + \lambda^2 \frac{M}{T_0} \sin \frac{\lambda l}{2a} \end{vmatrix} = \lambda \sin \frac{\lambda l}{2a} \left(\lambda \frac{M}{T_0} \sin \frac{\lambda l}{2a} - \frac{2}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} \right).$$

Для того щоб система (2.102) мала нетривіальний розв'язок (тобто розв'язок, для якого A_1 і A_2 не дорівнюють нулю одночасно), необхідно та достатньо, щоб визначник $d(\lambda)$ дорівнював нулю. Таким чином, для відшукування λ одержуємо рівняння:

$$\lambda \sin \frac{\lambda l}{2a} \left(\lambda \frac{M}{T_0} \sin \frac{\lambda l}{2a} - \frac{2}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} \right) = 0.$$

Оскільки $\lambda \neq 0$ (інакше $X(x) \equiv 0$), то

$$\sin \frac{\lambda l}{2a} = 0$$

або

$$\cos \frac{\lambda l}{2a} = \lambda \frac{Ma}{2T_0} \sin \frac{\lambda l}{2a}.$$

У результаті сукупність власних чисел розпадається на дві серії. Числа першої серії мають вигляд: $\bar{\lambda}_n = \left(\frac{2n\pi a}{l} \right)$, $n = 1, 2, \dots$. При $\lambda = \bar{\lambda}_n$ перше рівняння системи звертається в тотожність, а друге зводиться до рівності

$$\lambda (A_1 - A_2) \cos \frac{\lambda l}{2a} = 0.$$

Оскільки $\cos \frac{\lambda l}{2a} = \cos n\pi \neq 0$, то $A_1 = A_2$. Відповідні власні функції визначаються згідно з (2.99) рівностями:

$$\bar{X}_n(x) = \begin{cases} \sin \frac{2n\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \sin \frac{2n\pi(x-l)}{l} = \sin \frac{2n\pi x}{l}, & \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$$

у яких приймаємо $A_1 = A_2 = 1$. Отже,

$$\bar{X}_n(x) = \sin \frac{2n\pi x}{l}, \quad x \in [0; l].$$

Числа другої серії $\bar{\lambda}_n$, $n=1, 2, \dots$ знаходимо як розв'язки трансцендентного (тобто неалгебраїчного) рівняння $\operatorname{tg} \mu_n = \frac{l\rho}{M} \frac{1}{\mu_n}$, $\bar{\lambda}_n = \frac{2a\mu_n}{l}$.

Загальні властивості послідовності $\bar{\lambda}_n$ можна одержати, розглядаючи графіки лівої і правої частин рівняння (рис. 2.14). Ясно, що всередині кож-

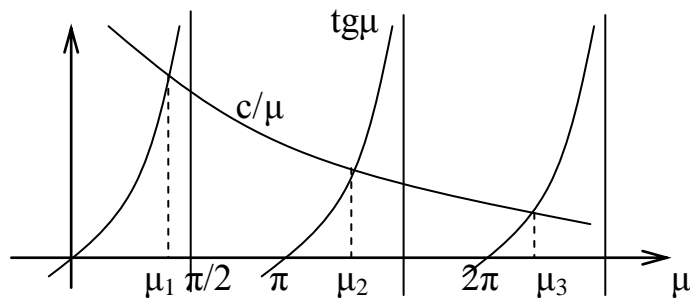


Рис. 2.14

ного інтервалу $\left(m\pi; \frac{\pi}{2} + m\pi \right)$ є єдина точка перетину обох графіків, що визначає власне число $\bar{\lambda}_n = \frac{2a\mu_n}{l}$. Якщо підставити $\lambda = \bar{\lambda}_n$ в (2.102), то з першого рівняння одержимо $A_1 = -A_2$; тоді друге задовольниться автоматично, оскільки його ліва частина дорівнює $A_1 \left(\frac{2\lambda}{a} \cos \frac{\lambda l}{2a} - \lambda^2 \frac{M}{T_0} \sin \frac{\lambda l}{2a} \right) = 0$. Кожному власному числу $\bar{\lambda}_n$ відповідає власна функція:

$$\bar{\bar{X}}_n(x) = \begin{cases} \sin \frac{2\mu_n x}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\sin \frac{2\mu_n(x-l)}{l}, & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

Корисно відзначити, що всі числа $\bar{\lambda}_n$ першої серії містяться серед власних чисел першої задачі, у якій зосереджена маса відсутня. Форма коливань $\bar{X}_n(x)$, що відповідає числу $\bar{\lambda}_n$, така, що $\bar{X}_n\left(\frac{l}{2}\right) = \sin \frac{2\pi n l}{2l} = 0$. Таким чином, у коливаннях, що відповідають частотам $\bar{\lambda}_n$, зосереджена маса M не бере участі і не впливає на величини цих частот.

Числа другої серії $\bar{\bar{\lambda}}_n$ при малих значеннях M і малих номерах n близькі до чисел $\left(\frac{\pi(2n-1)a}{l}\right)$, які становлять другу частину власних чисел першої задачі, де $M = 0$. З вигляду графіків на рис. 2.14 можна встановити, що $\bar{\bar{\lambda}}_1^2 < \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$ і взагалі $\bar{\bar{\lambda}}_n^2 < \left(\frac{\pi(2n-1)a}{l}\right)^2$. Це явище не випадкове та має

цілком природне фізичне обґрунтування: додавання маси M до однорідної струни збільшує її інертність, не міняючи жорсткості, що приводить до зменшення частот вільних коливань. Форми коливання $\bar{\bar{X}}_n(x)$, що відповідають власним числам $\bar{\bar{\lambda}}_n^2$, неперервні у всіх точках, але мають злам при $x = \frac{l}{2}$, оскільки $\bar{\bar{X}}_n'\left(\frac{l}{2}+0\right) - \bar{\bar{X}}_n'\left(\frac{l}{2}-0\right) \neq 0$. Загальний характер власних функцій, що відповідають першим двом власним числам обох серій, показано на рис. 2.15.

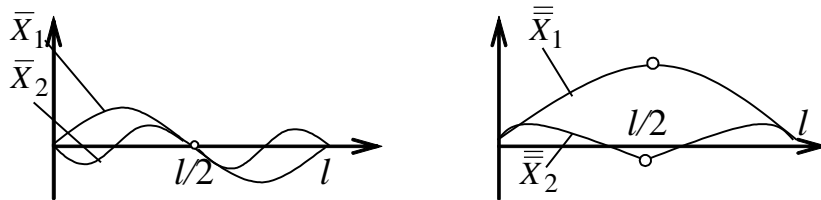


Рис. 2.15

Тепер знаходимо

$$\bar{T}_n(t) = \bar{C}_n \cos \frac{2\pi na}{l} t + \bar{D}_n \sin \frac{2\pi na}{l} t$$

i

$$\bar{\bar{T}}_n(t) = \bar{\bar{C}}_n \cos \frac{2\mu_n a}{l} t + \bar{\bar{D}}_n \sin \frac{2\mu_n a}{l} t,$$

де $\bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{\bar{C}}_n, \bar{\bar{D}}_n$ – довільні сталі.

Загальний розв'язок рівняння (2.97), за принципом суперпозиції та теоремою розвинення, записується у вигляді ряду за власними функціями

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{C}_n \cos \frac{2\pi na}{l} t + \bar{D}_n \sin \frac{2\pi na}{l} t \right) \bar{X}_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{\bar{C}}_n \cos \frac{2\mu_n a}{l} t + \bar{\bar{D}}_n \sin \frac{2\mu_n a}{l} t \right) \bar{\bar{X}}_n(x).$$

Підставляючи початкові умови, знаходимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{C}_n \bar{X}_n(x) + \bar{\bar{C}}_n \bar{\bar{X}}_n(x) \right) = \varphi(x); \quad (2.103)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{D}_n \frac{2\pi na}{l} \bar{X}_n(x) + \bar{\bar{D}}_n \frac{2\mu_n a}{l} \bar{\bar{X}}_n(x) \right) = 0. \quad (2.104)$$

Для знаходження сталих $\bar{C}_n, \bar{D}_n, \bar{\bar{C}}_n, \bar{\bar{D}}_n$ потрібно скористатися співвідношеннями ортогональності. Відповідно до загальної властивості ортогональності двох різних розв'язків $X(x)$ і $Y(x)$ задачі Штурма–Ліувілля (2.98)

повинна виконуватися рівність $\int_0^l \left[\rho + M \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] X(x) Y(x) dx = 0$. Для об-

числення інтеграла скористаємось властивістю δ -функції, тоді приходимо до таких співвідношень ортогональності:

$$\rho \int_0^l X(x) Y(x) dx + M X \left(\frac{l}{2} \right) Y \left(\frac{l}{2} \right) = 0.$$

Вважаємо далі, що $\|y\|^2 = \rho \int_0^l Y^2(x) dx + M Y^2 \left(\frac{l}{2} \right)$, і знаходимо:

$$\|\bar{X}_n\|^2 = \rho \int_0^l \sin^2 \frac{2n\pi x}{l} dx = \rho \frac{l}{2},$$

$$\|\bar{\bar{X}}_n\|^2 = \rho \int_0^{l/2} \sin^2 \frac{2\mu_n x}{l} dx + \rho \int_{l/2}^l \sin^2 \frac{2\mu_n (x-l)}{l} dx + M \sin^2 \mu_n =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{2} \left[x - \frac{l}{4\mu_n} \sin \frac{4\mu_n x}{l} \right]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{\rho}{2} \left[x - \frac{l}{4\mu_n} \sin \frac{4\mu_n(x-l)}{l} \right]_{\frac{l}{2}}^l + M \sin^2 \mu_n = \\
&= \frac{\rho l}{2} - \frac{\rho l}{4\mu_n} \sin 2\mu_n + M \sin^2 \mu_n = \frac{\rho l}{2} - M \frac{\rho l}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \mu_n}{\rho l} \sin \mu_n \cos \mu_n + \\
&+ M \sin^2 \mu_n = \frac{\rho l}{2} + \frac{M}{2} \sin^2 \mu_n.
\end{aligned}$$

Помножимо обидві частини (2.103) на $\rho \bar{X}_m(x)$, проінтегруємо за відрізком $[0, l]$ і потім додамо до результату ряд (2.103) у точці $x = \frac{l}{2}$, помножений

на $M \bar{X}_m\left(\frac{l}{2}\right)$. На підставі співвідношень ортогональності одержимо

$$\begin{aligned}
\bar{C}_n &= \frac{1}{\|\bar{X}_n\|^2} \left(\rho \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2n\pi x}{l} dx + M \bar{X}_n\left(\frac{l}{2}\right) \varphi\left(\frac{l}{2}\right) \right) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2n\pi x}{l} dx = \\
&= \frac{2}{l} (-1)^n \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \varphi\left(x + \frac{l}{2}\right) \sin \frac{2n\pi x}{l} dx = 0,
\end{aligned}$$

оскільки під знаком останнього інтеграла знаходиться непарна функція. Аналогічно

$$\begin{aligned}
\bar{C}_n &= \frac{1}{\|\bar{X}_n\|^2} \left(\rho \int_0^l \varphi(x) \bar{X}_n(x) dx + M \bar{X}_n\left(\frac{l}{2}\right) \varphi\left(\frac{l}{2}\right) \right) = \frac{2}{\rho l + M \sin^2 \mu_n} \cdot \\
&\cdot \left(\rho \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2xh}{l} \sin \frac{2\mu_n x}{l} dx + \rho \int_{\frac{l}{2}}^l -\frac{2h(l-x)}{l} \sin \frac{2\mu_n(x-l)}{l} dx + Mh \sin \mu_n \right) = \\
&= \frac{2h}{\rho l + M \sin^2 \mu_n} \left(\frac{4\rho}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{2\mu_n x}{l} dx + M \sin \mu_n \right) = \\
&= \frac{2h}{\rho l + M \sin^2 \mu_n} \left(\frac{4\rho}{l} \left[-\frac{xl}{2\mu_n} \cos \frac{2\mu_n x}{l} + \left(\frac{l}{2\mu_n}\right)^2 \sin \frac{2\mu_n x}{l} \right]_0^{\frac{l}{2}} + M \sin \mu_n \right) = \\
&= \frac{2h}{\rho l + M \sin^2 \mu_n} \left(M \left(\operatorname{tg} \mu_n - \frac{\rho l}{M \mu_n} \right) \cos \mu_n + \frac{\rho l}{\mu_n^2} \sin \mu_n \right) = \frac{2hl \rho \sin \mu_n}{\mu_n^2 (\rho l + M \sin^2 \mu_n)}.
\end{aligned}$$

Із другої граничної умови (2.104) випливає $\bar{D}_n = \bar{\bar{D}}_n = 0$. Остаточно для розв'язку задачі одержуємо

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hl\rho \sin \mu_n}{\mu_n^2 (\rho l + M \sin^2 \mu_n)} \cos \frac{2\mu_n at}{l} \bar{\bar{X}}_n(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

7.4. Зосереджений фактор входить у граничну умову

Приклад 4

Однорідний стержень має довжину l й площу поперечного перерізу σ . Кінець його $x=0$ закріплено нерухомо, а на кінці $x=l$ зосереджена маса m . Стержень попередньо розтягнутий силою Q . Вивчити позовжні коливання стержня, які виникають при миттєвому припиненні дії сили, що розтягує.

Розв'язання. Поздовжні переміщення точок стержня описуються функцією $u = u(x,t)$, яка задовольняє однорідному рівнянню

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad t > 0, \quad (2.105)$$

де ρ – щільність стержня, а E – модуль пружності. Оскільки кінець $x=0$ не рухається, то $u(0,t) = 0$. За другим законом Ньютона рівняння руху маси m має вигляд

$$m \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = F(t),$$

де $F(t)$ – сила пружної взаємодії маси й стержня. Ця сила дорівнює

$$F(t) = \sigma E \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

Таким чином, функція $u(x,t)$ задовольняє граничні умови

$$u(0,t) = 0, \quad m \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} + \sigma E \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \quad (2.106)$$

Для визначення початкових переміщень стержня знайдемо розв'язок $u_0(x)$ рівняння (2.105), що не залежить від часу. Оскільки $u_0''(x) = 0$, маємо $u_0(x) = cx + b$. З умови $u_0(0) = 0$ виходить, що $b = 0$, а оскільки сила Q на кінці $x=l$ обчислюється за законом Гука

$$Q = \sigma E u'(l),$$

то

$$Q = \sigma E c \quad \text{і} \quad c = \frac{Q}{\sigma E}.$$

Отже, початкові умови задачі мають вигляд

$$u(x,0) = \frac{Qx}{\sigma E}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (2.107)$$

Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (2.105) за методом Фур'є у вигляді добутку

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Підстановка $u(x,t)$ в рівняння (2.106) приводить до двох звичайних рівнянь:

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

і після поділу змінних у граничних умовах (2.106) одержуємо крайову задачу Штурма–Ліувілля для функції $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (2.108)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(l) - \frac{m}{\sigma \rho} \lambda^2 X(l) = 0. \quad (2.109)$$

Ця крайова задача відрізняється від задачі (2.84) – (2.85), оскільки гранична умова в точці $x=l$ містить невідомий параметр λ . Для того, щоб одержати співвідношення ортогональності в цьому випадку, припустимо, що функція $Y(x)$ є розв'язком задачі (2.108) – (2.109), що відповідає іншому значенню параметра і позначається μ^2 . Інтегруючи частинами і з огляду на граничні умови для функції $X(x)$ й $Y(x)$, знаходимо:

$$\begin{aligned} \int_0^l X''(x)Y(x)dx &= X'(l)Y(l) - X'(0)Y(0) - \int_0^l X'(x)Y'(x)dx = \\ &= \frac{m}{\sigma \rho} \lambda^2 X(l)Y(l) - \int_0^l X'(x)Y'(x)dx. \end{aligned}$$

Якщо тепер помножити рівняння (2.108) на $Y(x)$ і проінтегрувати на відрітку $[0,l]$, то одержимо:

$$-\int_0^l X'(x)Y'(x)dx + \frac{m}{\sigma \rho} \lambda^2 X(l)Y(l) + \lambda^2 \int_0^l X(x)Y(x)dx = 0.$$

Помінявши $X(x)$ й $Y(x)$ місцями, знаходимо:

$$-\int_0^l X'(x)Y'(x)dx + \frac{m}{\sigma \rho} \mu^2 X(l)Y(l) + \mu^2 \int_0^l X(x)Y(x)dx = 0.$$

Віднімання цієї тотожності з попередньої дає:

$$(\lambda^2 - \mu^2) \left\{ \frac{m}{\sigma\rho} X(l)Y(l) + \int_0^l X(x)Y(x)dx \right\} = 0,$$

та оскільки $\lambda^2 \neq \mu^2$, звідси виходить співвідношення ортогональності

$$\int_0^l X(x)Y(x)dx + \frac{m}{\sigma\rho} X(l)Y(l) = 0. \quad (2.110)$$

Перейдемо до фактичного відшукування $X(x)$. З рівняння (2.108) знаходимо загальний розв'язок

$$X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x,$$

причому з (2.109) одержуємо, що $B = 0$ і

$$X(x) = A \sin \lambda x.$$

Друга гранична умова (2.109) набуває вигляду

$$\lambda A \cos \lambda l = \frac{m}{\sigma\rho} A \lambda^2 \sin \lambda l \quad \text{або} \quad \lambda A \left(\cos \lambda l - \frac{m}{\sigma\rho} \lambda \sin \lambda l \right) = 0.$$

З умови нетривіальності $X(x)$ виходить, що $\lambda A \neq 0$, так що

$$\cos \lambda l - \frac{m\lambda}{\sigma\rho} \sin \lambda l = 0.$$

Отримали характеристичне рівняння

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{\sigma\rho}{m} \frac{1}{\lambda}, \quad (2.111)$$

яке має нескінченну множину додатних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Загальний характер розташування цих чисел легко зрозуміти, розглядаючи спільно графіки обох частин, схематично зображених на рис. 2.14. Зокрема, якщо масою m можна нехтувати порівняно з $\sigma\rho$, то для перших власних частот λ_n одержуємо наближені значення

$$\lambda_n \approx \frac{\pi(2n-1)}{2l}.$$

Ці числа отримуємо в задачі Штурма–Ліувілля (2.108) при граничних умовах $X(0) = X'(l) = 0$. Кожному власному числу λ_n^2 відповідає власна функція

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x$$

та

$$T_n(t) = C_n \cos a\lambda_n t + D_n \sin a\lambda_n t.$$

Тепер можна подати загальний розв'язок рівняння (2.105), що задовольняє граничні умови (2.106) у вигляді ряду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos a\lambda_n t + D_n \sin a\lambda_n t) X_n(x).$$

Після підстановки цього ряду в початкові умови (2.107) отримаємо рівність

$$\frac{Qx}{E\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x); \quad (2.112)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n a\lambda_n X_n(x). \quad (2.113)$$

Поклавши $\|X\|^2 = \int_0^l X^2(x) dx + \frac{m}{\sigma\rho} X^2(l)$, знаходимо

$$\begin{aligned} \|X_n\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \lambda_n x dx + \frac{m}{\sigma\rho} \sin^2 \lambda_n l = \frac{1}{2} \left(l - \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n l \right) + \frac{m}{\sigma\rho} \sin^2 \lambda_n l = \\ &= \frac{1}{2} l - \frac{m}{\sigma\rho} \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l \left(\frac{\sigma\rho}{2m\lambda_n} - \operatorname{tg} \lambda_n l \right) = \frac{1}{2} \left(l + \frac{m}{\sigma\rho} \sin^2 \lambda_n l \right). \end{aligned}$$

Тепер помножимо обидві частини рівності (2.112) на $X_k(x)$, результат проінтегруємо на відрізку $[0, l]$ і додамо до того ж розвинення (2.112) при $x = l$, попередньо помноженим на $\frac{m}{\sigma\rho} X_k(l)$. Завдяки співвідношенням ортогональності (2.110) у правій частині отриманої рівності залишиться лише один доданок $C_k \|X_k\|^2$. З огляду на характеристичне рівняння (2.111) одержуємо вирази для коефіцієнтів C_k :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\|X_k\|^2} \left(\int_0^l \frac{Qx}{E\sigma} \sin \lambda_k x dx + \frac{m}{\sigma\rho} \sin \lambda_k l \frac{Ql}{E\sigma} \right) = \frac{Q}{E\sigma \|X_k\|^2} \cdot \\ &\cdot \left\{ \left[-\frac{x}{\lambda_k} \cos \lambda_k x + \frac{1}{\lambda_k^2} \sin \lambda_k x \right]_0^l + \frac{ml}{\sigma\rho} \sin \lambda_k l \right\} = \\ &= \frac{Q}{E\sigma \|X_k\|^2} \left\{ \frac{ml}{\sigma\rho} \cos \lambda_k l \left(\operatorname{tg} \lambda_k l - \frac{\sigma\rho}{m\lambda_k} \right) + \frac{\sin \lambda_k l}{\lambda_k^2} \right\} = \frac{Q \sin \lambda_k l}{E\sigma \|X_k\|^2 \lambda_k^2}. \end{aligned}$$

Застосовуючи співвідношення ортогональності до ряду (2.113), знаходимо $D_n = 0$. Остаточню одержуємо:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Q\rho \sin \lambda_n l \sin \lambda_n x}{E\lambda_n^2 (l\sigma\rho + m\sin^2 \lambda_n l)} \cos a\lambda_n t, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (2.114)$$

Як видно з рис. 2.14, точки перетину графіків лівої й правої частин характеристичного рівняння (2.234) із зростанням λ наближаються до послідовності $\frac{\pi n}{l}$. Це значить, що при більших номерах виконується асимптотична рівність $\lambda_n \approx \frac{\pi n}{l}$. Тому ряд (2.114), який представляє розв'язок розглянутої задачі, збігається рівномірно й абсолютно на відрізку $[0, l]$.

7.5. Задача про вільні поперечні коливання стержня

Розглянемо задачу про *поперечні* коливання стержня. Припускаючи, що стержень тонкий і коливання малі, можна вивести рівняння поперечних коливань стержня, що має вигляд

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t), \quad (2.115)$$

де S – площа поперечного перерізу стержня, ρ – щільність матеріалу стержня, $f(x, t)$ – щільність навантаження на одиницю довжини, E – модуль Юнга, J – момент інерції. Розділимо обидві частини рівняння (2.115) на ρS , тоді його можна записати так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g(x, t),$$

де $g(x, t)$ – навантаження на одиницю маси. Нехай початкові умови наводяться в загальному вигляді, тобто

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x).$$

Крайові умови будуть визначені залежно від способу закріплення кінців стержня. Наприклад, якщо лівий кінець вільно обпертий, то

$$u=0$$

та

$$M_x = 0,$$

де M_x – згинальний момент, що виражається через переміщення

$$M_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тому другу умову на лівому кінці можна записати як

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Якщо лівий край жорстко закріплений, то

$$\begin{cases} u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Якщо край стержня вільний, то крайові умови мають вигляд

$$\begin{cases} M_x = 0, \\ Q_x = 0, \end{cases}$$

де Q_x – перерізуюча сила, що визначається через переміщення як

$$Q_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Тому у випадку вільного краю крайові умови запишуться як

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \end{cases}$$

Оператор задачі $L[u]$ в цьому випадку має вигляд

$$L[u] = -b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Покажемо, що цей оператор при деяких умовах буде самоспряженим. Припустимо, що обидва кінці стержня жорстко закріплені. Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^l u L[v] dx &= -b^2 \int_0^l uv^{(iv)} dx = \parallel \text{ інтегруємо частинами } \parallel = \\ &= -b^2 uv^{(iii)} \Big|_0^l + b^2 \int_0^l u'v^{(iii)} dx = \parallel \text{ позаінтегральний доданок дорівнює нулю,} \end{aligned}$$

$$\text{оскільки } u(0) = u(l) = 0 \parallel = b^2 \int_0^l u'v^{(iii)} dx =$$

\parallel ще раз застосовуємо формулу інтегрування частинами \parallel

$$= b^2 u'v'' \Big|_0^l - b^2 \int_0^l u''v'' dx = \parallel \text{ позаінтегральний член дорівнює нулю, оскільки}$$

$$u'(0) = u'(l) = 0 \parallel = b^2 \int_0^l u''v'' dx = -b^2 u''v' \Big|_0^l + b^2 \int_0^l u'''v' dx =$$

\parallel позаінтегральний член дорівнює нулю за рахунок v , оскільки

$$v'(0) = v'(l) = 0 \parallel$$

$$= b^2 u''' v \Big|_0^l - b^2 \int_0^l u^{IV} v dx = \int_0^l v L[u] dx.$$

Таким чином, у випадку жорсткого закріплення обох кінців стержня оператор крайової задачі є самоспряженим, тому його власні значення є дійсними.

Для розв'язку поставленої задачі розглянемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (2.116)$$

Розв'язок рівняння (2.116) будемо шукати методом поділу змінних, тобто подамо функцію $w(x, t)$ у вигляді

$$w(x, t) = T(t)v(x).$$

Тоді

$$T''v = -b^2 T v^{IV}$$

або поділяючи змінні, одержимо

$$-\frac{T''}{b^2 T} = \frac{v^{IV}}{v}.$$

Оскільки отримані відношення сталі, позначимо сталу через k^4 :

$$-\frac{T''}{b^2 T} = \frac{v^{IV}}{v} = k^4.$$

Тоді одержимо два звичайних диференціальних рівняння

$$v^{IV} - k^4 v = 0, \quad (2.117)$$

$$T'' + b^2 k^4 T = 0. \quad (2.118)$$

При додатних значеннях b^2 і k^4 одержимо періодичний за часом розв'язок, що погоджується з коливальним процесом при вільних коливаннях стержня.

Розв'язок (2.118) має вигляд

$$T = A \cos(k^2 b t) + B \sin(k^2 b t).$$

Знайдемо розв'язок (2.117)

$$r^4 - k^4 = 0 \Rightarrow (r^2 - k^2)(r^2 + k^2) = 0 \quad r_{1,2} = \pm k, \quad r_{3,4} = \pm ki.$$

Цим кореням характеристичного рівняння відповідає така система лінійно незалежних функцій, яка є фундаментальною

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = e^{-kx}, \quad y_3 = \cos kx, \quad y_4 = \sin kx.$$

Замість перших двох розв'язків візьмемо їхню напівсуму

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \operatorname{ch} kx$$

і напіврізницю

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \operatorname{sh} kx.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (2.117) запишемо як

$$v(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx.$$

Знайдемо власні значення оператора L

$$L[v] = \lambda v,$$

тобто

$$-b^2 v^{IV} = \lambda v,$$

де λ – дійсне як власне значення самоспряженого оператора. Тоді

$k^4 = -\frac{\lambda}{b^2}$ також буде дійсним. Крайові умови для функції $v(x)$ мають вигляд

гляд

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

Тоді

$$v(0) = C_1 + C_3 = 0.$$

$$v'(0) = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + C_3 k \operatorname{sh} kx + C_4 k \operatorname{ch} kx \Big|_{x=0} = C_2 + C_4 = 0.$$

Тобто $C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$.

Тоді

$$v(x) = C_1 (\cos kx - \operatorname{ch} kx) + C_2 (\sin kx - \operatorname{sh} kx),$$

$$v'(x) = -C_1 k (\sin kx - \operatorname{sh} kx) + C_2 k (\cos kx - \operatorname{ch} kx).$$

Скористаємося крайовими умовами на правому кінці

$$v(l) = v'(l) = 0.$$

Тоді одержимо, що

$$\begin{cases} C_1 (\cos kl - \operatorname{ch} kl) + C_2 (\sin kl - \operatorname{sh} kl) = 0 \\ -C_1 k (\sin kl + \operatorname{sh} kl) + C_2 k (\cos kl - \operatorname{ch} kl) = 0. \end{cases}$$

Отримано однорідну систему рівнянь відносно C_1 і C_2 . Нас цікавлять нетривіальні розв'язки цієї системи, оскільки в протилежному випадку і шуканий розв'язок буде тривіальним. Як відомо, для того щоб однорідна система рівнянь мала нетривіальний розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її детермінант дорівнював нулю. Тому маємо

$$\Delta = k \left\{ (\cos kl - \operatorname{ch} kl)^2 + (\sin^2 kl - \operatorname{sh}^2 kl) \right\} = 0$$

або

$$k(2 - 2 \cos kl \cdot \operatorname{ch} kl) = 0.$$

Скоротимо на k останню рівність, оскільки у випадку $k = 0$ другим співмножник також дорівнює нулю, тому при скороченні на k немає втрати коренів рівняння. Тоді

$$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = 1. \quad (2.119)$$

Покажемо, що корінь $k=0$ треба відкинути. Дійсно, якби $k = 0$, то рівняння (2.117) мало б вигляд $v^{IV} = 0$, і загальний розв'язок його

$$v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3.$$

Користуючись крайовими умовами, визначимо коефіцієнти C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$v(0) = C_1 = 0;$$

$$v'(0) = C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2 \Big|_{x=0} = C_2 = 0;$$

$$\begin{cases} v(l) = C_3 l^2 + C_4 l^3 = 0 \\ v'(l) = 2C_3 l + 3C_4 l^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 + C_4 l = 0 \\ 2C_3 + 3C_4 l = 0. \end{cases}$$

Визначник останньої системи $\Delta = l \neq 0$. Тому $C_3 = C_4 = 0$. Таким чином, $v \equiv 0$, тобто при $k = 0$ був би одержаний тривіальний розв'язок.

Розглянемо рівняння (2.119), звертаючи увагу на те, що k – дійсне. Покажемо, що це рівняння має нескінченну множину дійсних коренів. Позначимо $kl = x$. Тоді з рівняння (2.119) знаходимо, що

$$\cos x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}. \quad (2.120)$$

Отримане трансцендентне рівняння будемо розв'язувати графічно.

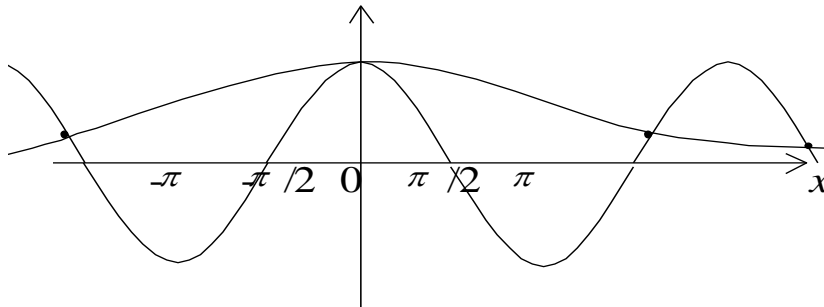


Рис. 2.16

Побудуємо дві криві $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Точки перетину цих кривих є коренями рівняння (2.120).

Як видно з рис 2.16, дійсних коренів буде нескінченна множина (половина додатних, половина від'ємних). Причому, якщо C є коренем, то коренем буде й уявне число iC , оскільки тоді поміняються місцями значеннями $\cos x$ і $\operatorname{ch} x$ ($\cos ix = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} ix = \cos x$), « $-C$ » також буде коренем, а отже, й « $-iC$ » буде коренем. Тобто, якщо будемо знати один корінь, то відразу можемо знайти всі чотири корені ($C, -C, iC, -iC$). Цей набір

значень вичерпує всі корені, що дають додатні значення k^4 . Досліджуємо, чи може k^4 бути від'ємним, тому що знаємо про k^4 тільки те, що воно дійсне. Покажемо, що немає таких значень C , щоб C^4 було від'ємним. Дійсно, якщо $C^4 < 0$, то $\arg C^4 = \pi$, але тоді $\arg C = \frac{\pi}{4}$ і величину C можна подати як

$$C = \rho \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} (1+i) = \sigma(1+i). \quad (2.121)$$

Підставимо це значення в рівняння (2.120)

$$\cos[\sigma(1+i)] \cdot \operatorname{ch}[\sigma(1+i)] = 1,$$

оскільки $\operatorname{ch}x$ – парна функція, а також з огляду на те, що $\operatorname{ch}x = \operatorname{ch}(-x)$, запишемо ще дві рівності, аналогічних (2.121)

$$\cos[\sigma(1+i)] \cdot \operatorname{ch}[-\sigma(1+i)] = 1.$$

$$\cos[\sigma(1+i)] \cdot \cos[-i\sigma(1+i)] = 1.$$

Покажемо, що рівність

$$\cos[\sigma(1+i)] \cdot \cos[-i\sigma(1+i)] = 1 \quad (2.122)$$

можлива тільки при $\sigma = 0$ (σ – дійсне).

Перепишемо рівність (2.122) у вигляді

$$\cos(\sigma + i\sigma) \cos(\sigma - i\sigma) = 1$$

або

$$(\cos \sigma \operatorname{ch} \sigma - i \sin \sigma \operatorname{sh} \sigma)(\cos \sigma \operatorname{ch} \sigma + i \sin \sigma \operatorname{sh} \sigma) = 1$$

або

$$\cos^2 \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma + \sin^2 \sigma \operatorname{sh}^2 \sigma = 1. \quad (2.123)$$

Оскільки $\cos^2 \sigma = 1 - \sin^2 \sigma$, то рівність (2.123) набуде вигляду

$$\operatorname{ch}^2 \sigma - \sin^2 \sigma \operatorname{ch}^2 \sigma + \sin^2 \sigma \operatorname{sh}^2 \sigma = 1.$$

Або тому що

$$\operatorname{ch}^2 \sigma - \operatorname{sh}^2 \sigma = 1, \quad \operatorname{ch}^2 \sigma = \operatorname{sh}^2 \sigma + 1,$$

то одержимо, що

$$\operatorname{sh}^2 \sigma - \sin^2 \sigma = 0$$

або

$$\operatorname{sh} \sigma = \pm \sin \sigma.$$

Для виконання останньої рівності необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з рівностей:

$$1) \operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma = 0$$

або

$$2) \operatorname{sh} \sigma + \sin \sigma = 0.$$

Відмітимо, що $\sigma = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. Тоді

$$\varphi(\sigma) = \operatorname{sh} \sigma - \sin \sigma \text{ при } \sigma = 0 \quad \varphi(\sigma) = 0,$$

$$\varphi'(\sigma) = \operatorname{ch} \sigma - \cos \sigma > 0, \text{ оскільки } \operatorname{ch} \sigma > 1, \text{ а } \cos \sigma \leq 1.$$

Таким чином, $\varphi(\sigma)$ зростає й при $\sigma = 0$ вона дорівнює нулю, звідси при $\sigma > 0$ вона більше нуля, тобто рівність 1) не виконується при $\sigma > 0$. Аналогічно можна показати, що й рівність 2) не виконується при $\sigma > 0$. Таким чином, k^4 може бути тільки додатним.

Замість проведеного дослідження для обґрунтування того, що власні значення є від'ємними, можна було в цьому переконатися таким чином. Нехай λ – деяке власне число, а v відповідна йому власна функція, яка задовольняє задані крайові умови, тоді

$$-b^2 v^{IV} = \lambda v.$$

Помножимо останню рівність на v і проінтегруємо її від 0 до l , тоді

$$-b^2 \int_0^l v^{IV} v dx = \lambda \int_0^l v^2 dx$$

або, інтегруючи частинами, одержимо

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l v^2 dx &= -b^2 \int_0^l v^{IV} v dx = -b^2 v''' v|_0^l + b^2 \int_0^l v''' v' dx = b^2 v'' v'|_0^l - b^2 \int_0^l (v'')^2 dx = \\ &= -b^2 \int_0^l (v'')^2 dx. \end{aligned}$$

Звідси видно, що

$$\lambda = -b^2 \frac{\int_0^l (v'')^2 dx}{\int_0^l v^2 dx} < 0.$$

Таким чином, з наведеного вище випливає, що $k^4 > 0$. Отже, підтверджується припущення, отримане з механічних міркувань, про те, що k^4 може бути тільки додатним. З механічних міркувань k^4 повинне бути дійсним, тому що в протилежному випадку не буде періодичного процесу за часом. Виходить, залишаються тільки такі корені, що кожна четвірка містить додатний корінь. Ці додатні корені можуть бути отримані графічним шляхом.

Всі додатні корені нумеруються в порядку зростання $0 < k_1 < k_2 < \dots$. Кожному кореню відповідає власна функція. Замість умови на правому кінці можна скористатися рівнянням

$$\begin{aligned} \cos kl \operatorname{ch} kl &= 1. \\ C_1 \{ \cos kl - \operatorname{ch} kl \} + C_2 \{ \sin kl - \operatorname{sh} kl \} &= 0. \end{aligned}$$

Цю рівність перепишемо у вигляді

$$\frac{C_1}{\sin kl - \operatorname{sh} kl} = - \frac{C_2}{\cos kl - \operatorname{ch} kl}.$$

Тоді власні функції v_i виразяться як

$$v_i = C \{ (\sin k_i l - \operatorname{sh} k_i l)(\cos k_i x - \operatorname{ch} k_i x) - (\cos k_i l - \operatorname{ch} k_i l)(\sin k_i x - \operatorname{sh} k_i x) \},$$

де $C = \text{const}$ визначається з умови, що $\|v_i\| = 1$. Кожному k_i відповідає власна функція з частотою коливань

$$\omega_i = k_i^2 b, \quad \omega_i^2 = k_i^4 b^2,$$

але $k_i^4 = \frac{\lambda}{b^2}$.

Для кожного значення k_i можна знайти з рівняння (2.118) відповідну функцію T_i . Тоді загальний розв'язок вихідного рівняння набуває вигляду

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x) T_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x) (A_i \cos(k_i^2 b t) + B_i \sin(k_i^2 b t)).$$

Коефіцієнти отриманого ряду, як і раніше, знаходяться за допомогою початкових умов.

Лабораторна робота 6

6.1. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M , прикріпленою в точці $x = x_0$

струни, викликані початковими відхиленнями $U(x, 0) = \begin{cases} h \frac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h \frac{l-x}{l-x_0}, & x_0 < x < l \end{cases}.$

Покласти $x_0 = \frac{l}{5}$.

6.2. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A \cos \omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \frac{4l}{5}$.

6.3. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0 . Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \frac{4l}{5}$.

6.4. Кругла однорідна мембрана радіусом R , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t=0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $R=6$.

6.5. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t=0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l=3$, $m=5$.

6.6. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M , закріпленою в точці $x = x_0$

струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h \frac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h \frac{l-x}{l-x_0}, & x_0 < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \frac{l}{5}$.

6.7. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t=0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A \cos \omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \frac{3l}{5}$.

6.8. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0 . Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \frac{l}{5}$.

6.9. Кругла однорідна мембрана радіусом R , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t=0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $R=8$.

6.10. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t=0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l=4$, $m=5$.

6.11. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M , закріпленою в точці $x = x_0$

струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h \frac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h \frac{l-x}{l-x_0}, & x_0 < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \frac{3l}{5}$.

6.12. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикладена поперечна сила $F(t) = A \cos \omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \frac{2l}{5}$.

6.13. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0 . Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \frac{2l}{5}$.

6.14. Кругла однорідна мембрана радіусом R , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $R=4$.

6.15. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l = 5$, $m = 8$.

6.16. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями й зосередженою масою M , прикріпленою в точці $x = x_0$

струни, викликані початковими відхиленнями $U(x,0) = \begin{cases} h \frac{x}{x_0}, & 0 < x < x_0 \\ h \frac{l-x}{l-x_0}, & x_0 < x < l \end{cases}$.

Покласти $x_0 = \frac{4l}{5}$.

6.17. Знайти коливання однорідної струни $0 \leq x \leq l$ з нерухомо закріпленими кінцями, якщо в точці $x = x_0$ цієї струни з моменту $t = 0$ прикла-

дена поперечна сила $F(t) = A \cos \omega t$. Початкові відхилення й початкові швидкості відсутні. Покласти $x_0 = \frac{l}{5}$.

6.18. Знайти температуру однорідного стрижня $0 \leq x \leq l$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а в точці $x = x_0$ знаходиться зосереджене джерело з постійною потужністю Q_0 . Початкова температура дорівнює нулю. Покласти $x_0 = \frac{3l}{5}$.

6.19. Кругла однорідна мембрана радіусом R , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $R=2$.

6.20. Прямокутна однорідна мембрана зі сторонами l і m , закріплена по контуру, у початковий момент часу $t = 0$ одержує імпульс K , зосереджений у її центрі. Знайти вільні коливання мембрани. Покласти $l = 5$, $m = 9$.

§8. Застосування методу Фур'є для розв'язку диференціальних рівнянь у двовимірній замкнутій області

8.1. Задача про коливання прямокутної мембрани

Математична постановка задачі про вимушені коливання прямокутної закріпленої по краях мембрани зводиться до розв'язку диференціального рівняння:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0 \quad (2.124)$$

при крайових умовах

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

і початкових умовах

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (2.125)$$

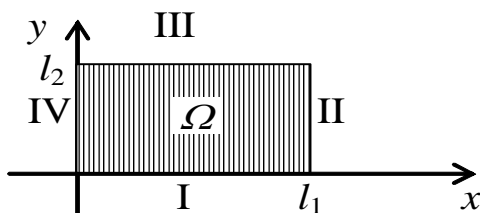


Рис. 2.17

де ρ – щільність матеріалу, з якого зроблена мембрана (рис. 2.17), $g(x, y, t)$ – навантаження, що припадає на одиницю площі, T_0 – натяг мембрани. Розділимо

рівняння (2.124) на ρ , тоді це рівняння набуває вигляду