Тема 3

ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛУ

4.16

Потенціал об'єму простого й подвійного шарів. Основні означення

Одним із важливих розділів математичної фізики є теорія потенціалу, яка дістала розвиток історично досить рано. Вона має важливе значення з погляду фізичних застосувань та розвитку методів розв'язання крайових задач теорії рівнянь еліптичного типу.

Важливу роль у розвитку теорії потенціалу й дослідженні крайових задач для рівняння Лапласа відіграла праця О. М. Ляпунова «Про деякі питання, пов'язані із задачею Діріхле» (1898). У даній темі буде використано низку результатів цієї роботи.

Нехай у деякій точці $A(a, b, c)$ тривимірного простору міститься електричний (або магнітний) заряд q. Тоді на підставі закону Кулона цей заряд створює електростатичне поле, напруга якого $\vec{E}$ в довільній точці $M(x, y, z)$, відмінній від $A(a, b, c)$, становить

$$\vec{E} = kq\frac{\vec{r}}{r^3}$$

або в проекціях

$$E_x = kq\frac{x-a}{r^3}, \quad E_y = kq\frac{y-b}{r^3}, \quad E_z = kq\frac{z-c}{r^3}, \tag{4.109}$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$; $r = |\overrightarrow{AM}|$; k — коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибраної системи одиниць. Для простоти вважатимемо, що $k = 1$.

Неважко бачити, що праві частини формули (4.109) дорівнюють із протилежним знаком частинним похідним від функції

$$u(M) = \frac{q}{r} + C_1, \quad C_1 = \text{const} \tag{4.110}$$

за x, y і z відповідно. Ця функція називається ***потенціалом електростатичного поля***. Вважається, що в (4.110) $C_1 = 0$, щоб $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Таким чином, точковий заряд q створює потенціал

$$u(M) = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}. \tag{4.111}$$

Оскільки за кількох точкових зарядів потенціали, створені ними, додаються, то потенціали, створені неперервно розподіленими зарядами, обчислюються у вигляді границі суми, тобто у вигляді інтеграла.

Нехай заряд розподілений в об'ємі T з об'ємною густиною $f(M)$. Тоді потенціал, створений цим зарядом,

$$v(M) = \iiint_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |\overline{MN}|, \quad N = N(\xi, \eta, \zeta). \tag{4.112}$$

Права частина формули (4.112) називається *об'ємним потенціалом.*

Якщо заряд розподілений по поверхні S із поверхневою густиною $\psi(N)$, то потенціал, створений цим зарядом,

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds, \tag{4.113}$$

де r — відстань від точки M до змінної точки N на поверхні S.

Права частина (4.113) називається *потенціалом простого шару.*

Припустимо тепер, що два точкових заряди q і $-q$ (рис. 4.14), які знаходяться на осі l на відстані h, прямують до точки A, причому напрям від $-q$ до q весь час збігається з додатним напрямом осі l. Тоді потенціал у довільній точці, крім A, є різницею двох величин, які намагаються стати рівними одна одній; тому цей потенціал прямує до нуля.

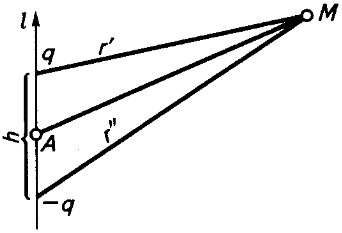

Рис. 4.14

Якщо ж у процесі руху q змінюється таким чином, що $qh = p = \text{const}$, то границя потенціалу становить

$$\omega(M) = \lim_{h\to 0} q\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}\right) = \lim_{h\to 0} p\frac{1/r' - 1/r''}{h} =$$

$$= p\frac{\partial}{\partial \bar{l}}\left(\frac{1}{r}\right) = p\frac{\cos(\overline{AM}, \bar{l})}{r^2}. \tag{4.114}$$

Граничне розміщення зарядів у фізиці називають диполем, величину p — моментом, а вісь $\bar{l}$ — віссю цього диполя. За допомогою точкових зарядів диполь може бути реалізований тільки наближено (два великих заряди на малій відстані один від одного).

Нехай тепер дано орієнтовну поверхню S, тобто таку, на якій вказано зовнішні й внутрішні сторони. Нехай на S розподілений диполь із густиною $\mu(N)$, причому в кожній точці N напрям осі диполя збігається з напрямом внутрішньої нормалі до S у точці N. Тоді потенціал, створений диполем,

$$\omega(M) = \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos(\overrightarrow{NM}, \vec{n}_i)}{r^2} ds, \tag{4.115}$$

де вектор $\vec{r}$ напрямлений від N до M; $\vec{n}_i$ — внутрішня нормаль до S.

Цей інтеграл називається ***потенціалом подвійного шару***, оскільки розглядуваний розподіл диполя може бути наближено реалізований як два накладених на поверхню S розподіли зарядів із густиною $h^{-1}\mu(M)$ і $-h^{-1}\mu(N)$ на відстані h (по нормалі до S) один від одного, якщо тільки h досить мале.

Надалі вважатимемо, що вектор $\vec{r}$ напрямлений від точки M до N і нормаль до S братимемо зовнішню. Тоді (4.115) можемо записати у вигляді

$$\omega(M) = -\iint\limits_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \iint\limits_S \mu(N) \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \tag{4.116}$$

де $\varphi = (\vec{r}, \vec{n})$ — кут між зовнішньою нормаллю й вектором $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$.

4.17 Об'ємний потенціал

Розглянемо потенціал об'єму

$$v(M) = \iiint\limits_T \frac{f(N)}{r} d\tau, \quad r = |\overrightarrow{MN}|, \tag{4.117}$$

де T — скінченна область, обмежена поверхнею S; $\overline{T} = T \cup S$. Вважаємо, що функція $f(N)$ — обмежена й інтегровна в T. Інтеграл (4.117) є власним інтегралом, якщо точка M лежить поза T ($r \neq 0$). У цьому випадкові функція $v(M)$ неперервна й має частинні похідні всіх порядків. Ці похідні можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла, й $v(M)$ задовольняє рівняння Лапласа $\Delta v(M) = 0$ поза T. Покажемо, що при $M \to \infty$ у довільному напрямі функція прямує до нуля, так що

$$|v(M)| < A/\rho_1, \quad A = \text{const},$$

де ρ_1 — відстань точки M від початку координат.

Розташуємо початок координат усередині області T (рис. 4.15). Тоді $MN \geq OM - ON$, або $r \geq \rho_1 - ON$. Позначимо через d діаметр області T. Тоді $r \geq \rho_1 - d$. Вважатимемо, що точка M настільки віддалена від початку координат, що $\rho_1 > 2d$, тобто $d < \rho_1/2$. Але тоді $r < 0{,}5\rho_1$, або $r^{-1} < 2\rho_1^{-1}$. Ураховуючи дану нерівність, маємо

$$| v(M) | \leq \iiint_T | f(N) | \frac{d\tau}{r} < \frac{2}{\rho_1} \iiint_T | f(N) | \, d\tau = \frac{A}{\rho_1},$$

де $A = 2\iiint\limits_T | f(N) | \, d\tau.$

Таким чином, потенціал об'єму є гармонічною функцією поза областю T.

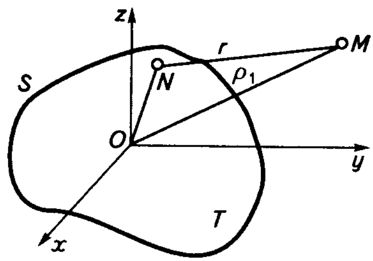

Рис. 4.15

Нехай тепер точка $M \in T$. Тоді інтеграл (4.117) буде невласним. Унаслідок обмеженості $f(N)$ інтеграл (4.117) збігається, оскільки $| f(N) | \, r^{-1} < Cr^{-1}$. Покажемо, що він є неперервною функцією.

Справді, нехай M_0 — довільна внутрішня точка області T. Візьмемо в області T область T_δ, яка містить точку M_0, і обчислимо модуль інтеграла

$$| v_\delta(M) | = \left| \iiint_{T_\delta} \frac{f(N)}{r} d\tau \right| < C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} d\tau,$$

де $K_\delta(M_0)$ — куля радіусом δ із центром у точці M_0, яка містить область T_δ, $T_\delta \subset K_\delta(M_0)$. Для обчислення останнього інтеграла введемо сферичну систему координат із центром у точці M. Очевидно, що

$$C \iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-1} d\tau < C \iiint_{K_{2\delta}(M)} r^{-1} d\tau = C \int_0^{2\delta} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = 8C\pi\delta^2,$$

де $K_{2\delta}(M)$ — куля радіусом 2δ із центром у точці M. Отже, $| v_\delta(M) | <$

$< 8\pi C\delta^2$ і при $\delta \to 0 \mid v_\delta(M) \mid \to 0$ незалежно від точки M_0, тобто, якщо задано $\varepsilon > 0$, то, вибираючи $\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{8\pi C}\right)^{1/2}$, переконуємося в рівномірній збіжності інтеграла (4.117) у довільній точці M_0 області T. Оскільки рівномірну збіжність інтеграла (4.117) доведено за умови обмеженості густини $f(N)$, то цей інтеграл неперервний також і в точках розриву першого роду функції $f(N)$.

Справедлива наступна теорема.

ТЕОРЕМА 4.16

Якщо $f(N)$ обмежена й інтегровна в області T, то потенціал $v(M)$ і його частинні похідні першого порядку неперервні в усьому просторі, й ці похідні можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла.

Доведення

Для доведення теореми залишилося показати, що частинні похідні першого порядку $v_x(M)$, $v_y(M)$, $v_z(M)$ в області T є неперервними і їх можна дістати диференціюванням під знаком інтеграла (4.117).

Для цього розглянемо інтеграли

$$X(M) = -\iiint_T f(N)\frac{x-\xi}{r^3}d\tau,$$
$$Y(M) = -\iiint_T f(N)\frac{y-\eta}{r^3}d\tau, \qquad (4.118)$$
$$Z(M) = -\iiint_T f(N)\frac{z-\zeta}{r^3}d\tau,$$

які дістаються диференціюванням (4.117) відповідно за x, y і z під знаком інтеграла.

Повторюючи вищенаведені міркування для інтегралів (4.118), маємо

$$|X(M)| < C\iiint_{T_\delta}\frac{|x-\xi|}{r^3}d\tau < C\iiint_{K_\delta(M_0)} r^{-2}d\tau < C\iiint_{K_{2\delta}(M_0)} r^{-2}d\tau = 8\pi C\delta < \varepsilon,$$
$$|Y(M)| < \varepsilon, \quad |Z(M)| < \varepsilon,$$

якщо $\delta < \varepsilon(8\pi C)^{-1}$. Звідси випливає рівномірна збіжність інтегралів (4.118) та їх неперервність також і в точках розриву функції $f(N)$. Точки краю S області T можна розглядати як точки розриву густини $f(N)$, яка дорівнює нулю за межами T. Отже, потенціал $v(M)$ та інтеграли (4.118) неперервні в усьому просторі.

Покажемо, що $X(M) = v_x$ для довільних точок $M(x, y, z) \in T$. Для цього доведемо: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки $|\Delta t| < \delta$, то

$$\left| \frac{v(x+\Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon.$$

Розглянемо кулю $K_{\delta'}(M)$ досить малого радіуса δ' із центром у точці M, яка належить області T. Вважаємо, що точка $M_1(x+\Delta x, y, z) \in \in K_{\delta'}(M)$. Розділимо $v(M)$ на два доданки:

$$v(M) = v_1(M) + v_2(M),$$

де

$$v_1(M) = \iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} r^{-1} f(N) d\tau; \quad v_2(M) = \iiint\limits_{T \setminus K_{\delta'}(M)} r^{-1} f(N) d\tau.$$

Тоді

$$\frac{v(x+\Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{v_1(x+\Delta x, y, z) - v_1(x, y, z)}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{v_2(x+\Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Для довільних фіксованих розмірів кулі $K_{\delta'}(M)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v_2(x+\Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x} = X_2(M) =$$
$$= \iiint\limits_{T \setminus K_{\delta'}(M)} f(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau,$$

тому що точка M лежить за межами області $T \setminus K_{\delta'}(M)$.

Поклавши $X(M) = X_1(M) + X_2(M)$, оцінимо

$$\left| X(M) - \frac{v(x+\Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} \right| \le$$
$$\le \left| X_2(M) - \frac{v_2(x+\Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| +$$
$$+ |X_1(M)| + \left| \frac{v_1(x+\Delta x, y, z) - v_1(x, y, z)}{\Delta x} \right|$$

і покажемо, що кожний доданок можна зробити меншим за $\varepsilon/3$. Справді, оскільки $|f(N)| < C$ і $|r^{-1}(x-\xi)| < 1$, то

$$|X_1(M)| = \left| \iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} f(N)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau \right| < C\int\limits_0^{\delta'}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr}{r^2} = 4\pi C\delta'.$$

Розглянемо останній доданок

$$|d| = \left|\frac{v_1(x+\Delta x,\, y,\, z) - v_1(x,\, y,\, z)}{\Delta x}\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} f(N)(r_1^{-1} - r^{-1})\,d\tau\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} f(N)\frac{r-r_1}{r_1 r}\,d\tau\right|,$$

де $r_1 = \sqrt{[(x+\Delta x)-\xi]^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Сторони трикутника MNM_1 дорівнюють r, r_1, Δx, отже, $|r - r_1| \le |\Delta x|$. Унаслідок нерівності $2ab \le a^2 + b^2$ маємо

$$|d| \le C\iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} (rr_1)^{-1}d\tau \le \frac{C}{2}\left[\iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} r_1^{-2}d\tau + \iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} r^{-2}d\tau\right].$$

Переходячи до сферичних координат, дістаємо

$$\iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} r^{-2}d\tau = 4\pi\delta', \quad \iiint\limits_{K_{\delta'}(M)} r_1^{-2}d\tau \le \iiint\limits_{K_{2\delta'}(M)} r_1^{-2}d\tau = 8\pi\delta'.$$

Нехай $\delta' = \varepsilon(18\pi C)^{-1}$. Тоді справедливі оцінки

$$|X_1(M)| < \varepsilon/3, \quad |d| < \varepsilon/3. \qquad (4.119)$$

Фіксуємо кулю $K_{\delta'}(M)$. Тоді фіксованою буде й область $T\backslash K_{\delta'}(M)$. Рівність (4.118) відносно вибраної області $T\backslash K_{\delta'}(M)$ означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке δ'', що як тільки $|\Delta x| < \delta''$, то

$$\left|\frac{v_2(x+\Delta x,\, y,\, z) - v_2(x,\, y,\, z)}{\Delta x} - X_2(M)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Покладемо $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Тоді, враховуючи (4.119), дістанемо

$$\left| \frac{v(x+\Delta x,\, y,\, z) - v(x,\, y,\, z)}{\Delta x} - X(M) \right| < \varepsilon,$$

якщо тільки $|\,\Delta x\,| < \delta$, що й потрібно було показати.

Аналогічно доводиться справедливість формул $Y(M) = v_y$ і $Z(M) = v_z$.

ТЕОРЕМА 4.17

Якщо густина $f(N) \in C(T) \cap C^1(T)$, *то потенціал об'єму (4.117) має неперервні похідні другого порядку в області T і задовольняє в цій області рівняння Пуассона*

$$\Delta v(M) = -4\pi f(M). \qquad (4.120)$$

Доведення

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — довільна точка області T. Позначимо через $K_\delta(M_0)$ кулю радіусом δ із центром у точці M_0, яка цілком міститься всередині області T, а через T_1 — область $T_1 = T \backslash K_\delta(M_0)$. Як і в теоремі 4.16, розділимо потенціал об'єму (4.117) на два доданки:

$$v(M) = \iiint\limits_{T_1} r^{-1} f(N)\, d\tau + \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} r^{-1} f(N)\, d\tau = v_1(M) + v_2(M). \quad (4.121)$$

На підставі доведеної теореми маємо

$$v_x(M) = \iiint\limits_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau + \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} r^{-1} f(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau. \quad (4.122)$$

Але

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2},$$

отже,

$$v_x(M) = \iiint\limits_{T_1} f(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau - \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau.$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\frac{\partial v_2(M)}{\partial x} = -\iiint\limits_{K_\delta(M_0)} f(N) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\iiint\limits_{K_\delta(M_0)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f(N)\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right] d\tau =$$

$$= -\iiint\limits_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(f(N)\frac{1}{r}\right) d\tau + \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} r^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Застосуємо до першого інтеграла формулу Гаусса—Остроградського. Тоді

$$\frac{\partial v_2(M)}{\partial x} = -\iint\limits_{S_\delta(M_0)} f(N)\frac{\cos(\vec{n},\,\xi)}{r}ds + \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} r^{-1}\frac{\partial f}{\partial \xi}d\tau,$$

де $S_\delta(M_0)$ — сфера радіусом δ із центром у точці M_0; $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до $S_\delta(M_0)$ у точці N.

Підставивши знайдену похідну в (4.122), дістанемо

$$v_x(M) = \iiint\limits_{T_1} f(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau + \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} \frac{1}{r}\frac{\partial f(N)}{\partial \xi}d\tau -$$

$$- \iint\limits_{S_\delta(M_0)} f(N)\frac{\cos(\vec{n},\,\xi)}{r}ds. \qquad (4.123)$$

Перший доданок у правій частині (4.123) є власним інтегралом для точок M, які лежать у кулі $K_\delta(M_0)$, і він має в $K_\delta(M_0)$ похідні всіх порядків. Те саме можна стверджувати стосовно третього доданка, тому що точка $N \in S_\delta(M_0)$, а точка $M \in K_\delta(M_0)$.

Другий доданок є потенціалом об'єму з неперервною густиною $\dfrac{\partial f(N)}{\partial \xi}$ і на підставі теореми 4.16 він має неперервні похідні першого порядку в усьому просторі.

Таким чином, можна стверджувати, що $v_x(M)$ має неперервні похідні першого порядку в кулі $K_\delta(M_0)$. Унаслідок довільності вибору точки $M_0 \in T$ звідси випливає існування неперервних похідних першого порядку від функції $v_x(M)$ всюди в області T. Застосовуючи аналогічні міркування до функцій $v_y(M)$ і $v_z(M)$, дістаємо, що величина $v(M)$ має в області T неперервні похідні до другого порядку включно.

Покажемо тепер, що об'ємний потенціал $v(M)$ задовольняє в області T рівняння Пуассона. Звернемося до формул (4.121), (4.123). Потенціал $v_1(M)$ по області T_1 є гармонічною функцією в кулі $K_\delta(M_0)$, тому що $K_\delta(M_0)$ лежить поза T_1, тобто $\Delta v_1(M) = 0$ в кулі $K_\delta(M_0)$, а отже, $\Delta v(M) = \Delta v_2(M)$ у кулі $K_\delta(M_0)$. Таким чином, для обчислення $\Delta v(M)$ достатньо здиференціювати за x під знаком інтеграла ті члени в (4.123), в яких інтегрування здійснюється по $K_\delta(M_0)$ і $S_\delta(M_0)$, скласти аналогічні вирази для похідних другого порядку за y і z і додати всі три похідні. Обчисливши таким чином $\Delta v(M)$ у кулі $K_\delta(M_0)$, візьмемо всі його значення в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Дістанемо

$$\Delta v(M_0) =$$

$$= \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} \left[\frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} + \frac{\partial f(N)}{\partial \eta} \frac{\eta - y_0}{r_0^3} + \frac{\partial f(N)}{\partial \zeta} \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \right] d\tau -$$

$$- \iint\limits_{S_\delta(M_0)} f(N) \left[\frac{\xi - x_0}{r_0^3} \cos(\vec{n}, \xi) + \frac{\eta - y_0}{r_0^3} \cos(\vec{n}, \eta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\zeta - z_0}{r_0^3} \cos(\vec{n}, \zeta) \right] ds, \qquad (4.124)$$

де $r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2}$.

Формула (4.124) справедлива для всякого δ, якщо $K_\delta(M_0) \subset T$, а величина $\Delta v(M_0)$ не залежить, очевидно, від вибору δ. Доведемо, що при $\delta \to 0$ потрійний інтеграл прямує до нуля. Справді, нехай $m = \max \left| \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \right|$ у деякій фіксованій досить малій кулі $K_{\delta_0}(M_0)$. Тоді при $\delta \leq \delta_0$, беручи до уваги, що $|(\xi - x_0) r_0^{-1}| = |\cos(\vec{n}, \xi)| \leq 1$, дістаємо

$$\left| \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} d\tau \right| \leq m \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} r_0^{-2} d\tau.$$

Ввівши сферичні координати з центром у точці M_0, матимемо

$$\left| \iiint\limits_{K_\delta(M_0)} \frac{\partial f(N)}{\partial \xi} \frac{\xi - x_0}{r_0^3} d\tau \right| \leq m \int\limits_0^\delta \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = 4\pi m \delta.$$

Аналогічно оцінюються решта доданків у потрійному інтегралі. Отже, потрійний інтеграл у формулі (4.124) прямує до нуля при $\delta \to 0$.

Дослідимо тепер в (4.124) інтеграл по сфері $S_\delta(M_0)$. Оскільки зовнішня нормаль до сфери $S_\delta(M_0)$ напрямлена вздовж її радіуса, то

$$(\xi - x_0) r_0^{-3} \cos(\vec{n}, \xi) + (\eta - y_0) r_0^{-3} \cos(\vec{n}, \eta) + (\zeta - z_0) r_0^{-3} \cos(\vec{n}, \zeta) =$$

$$= r_0^{-2} [\cos^2(\vec{n}, \xi) + \cos^2(\vec{n}, \eta) + \cos^2(\vec{n}, \zeta)] = \frac{1}{r_0^2},$$

а отже, інтеграл по $S_\delta(M_0)$ можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_\delta(M_0)} f(N)ds.$$

Застосовуючи до поверхневого інтеграла теорему 4.10 про середнє значення, дістаємо

$$\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_\delta(M_0)} f(N)ds = 4\pi f(N_\delta),$$

де N_δ — деяка точка на $S_\delta(M_0)$. Коли $\delta \to \infty$, точка $N_\delta \to M_0$ і інтеграл по $S_\delta(M_0)$ прямує до $4\pi f(M_0)$. Отже, формула (4.124) при $\delta \to 0$ дає

$$\Delta v(M_0) = -4\pi f(M_0),$$

що й потрібно було довести.

◇ *Зауваження 4.5.* Якщо $f(M) \in C(\bar{T}) \cap C^1(T)$, то рівняння $v(M) = -f(M)$ має частинний розв'язок

$$v(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T \frac{f(N)}{r}d\tau, \quad r = |\,MN\,|.$$

4.18
Потенціал подвійного шару

Розглянемо потенціал подвійного шару неперервної густини $\mu(N)$, розподіленої на поверхні Ляпунова S:

$$\omega(M) = -\iint\limits_S \mu(N)\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)ds = \iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}ds, \qquad (4.125)$$

де похідна береться за напрямом зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до поверхні S у точці $N(\xi, \eta, \zeta)$; вектор $\vec{r}$ напрямлений від точки $M(x, y, z)$ до точки $N(\xi, \eta, \zeta)$.

Потенціал подвійного шару поза S всюди має похідні всіх порядків і задовольняє рівняння Лапласа.

Покажемо, що потенціал подвійного шару прямує до нуля на нескінченності.

Візьмемо початок координат усередині області T, обмеженої поверхнею S (рис. 4.16). Тоді $MN \geq OM - ON$, або $r \geq \rho_1 - ON$. Позначимо

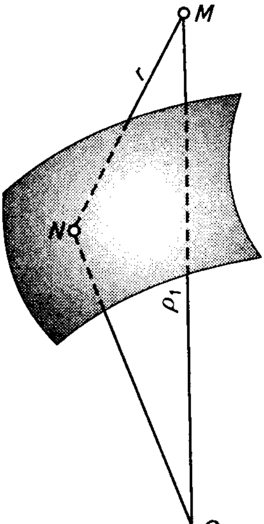

Рис. 4.16

через L найбільшу відстань точок поверхні від початку координат. Тоді $r \geq \rho_1 - L$. Вважатимемо, що точка M настільки віддалена від початку координат, що $\rho_1 > 2L$, тобто $L < 0{,}5\rho_1$; отже, $r > 0{,}5\rho_1$, або $r^{-1} < 2\rho_1^{-1}$.

Ураховуючи останню нерівність, маємо

$$|\omega(M)| \leq \iint_S |\mu(N)| \frac{|\cos(r, \vec{n})|}{r^2} ds \leq$$

$$\leq \frac{4}{\rho_1^2} \iint_S |\mu(N)|\, ds = A\rho_1^{-2},$$

де $A = 4\iint_S |\mu(N)|\, ds.$

Отже, потенціал подвійного шару прямує до нуля на нескінченності як ρ_1^{-2}.

Нехай тепер точка M збігається з деякою точкою N_0, що лежить на поверхні S. Тоді $r_0 = |\overline{N_0 N}|$ перетворюється в нуль у разі збігу точок N і N_0, і інтеграл (4.125) у цьому разі є невласним. Покажемо, що він збіжний. Для цього достатньо дослідити підінтегральну функцію на деякій частині σ_0 поверхні S поблизу точки N_0. По частині поверхні $S\backslash\sigma_0$ інтеграл має скінченне значення, тому що $N_0 \notin S\backslash\sigma_0$.

Поверхня σ_0 є поверхнею Ляпунова. Отже, в точці N_0 можна побудувати місцеву систему координат, і рівняння частини σ_0 поверхні S представляється в цій системі у вигляді $\zeta = f(\xi, \eta)$.

У місцевій системі координат точка N_0 має координати (0, 0, 0), а точка N — координати (ξ, η, ζ). Тоді $r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Знайдемо вираз для $\cos(\vec{r}_0, \vec{n})$, де $\vec{r}_0$ — напрям $\overline{N_0 N}$. Маємо

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos(\vec{r}_0, \xi)\cos(\vec{n}, \xi) + \cos(\vec{r}_0, \eta)\cos(\vec{n}, \eta) + \cos(\vec{r}_0, \zeta)\cos(\vec{n}, \zeta).$$

Але

$$\cos(\vec{r}_0, \xi) = \xi r_0^{-1}, \quad \cos(\vec{r}_0, \eta) = \eta r_0^{-1}, \quad \cos(\vec{r}_0, \zeta) = \zeta r_0^{-1},$$

отже,

$$\cos(\vec{r}_0, \vec{n}) = \frac{1}{r_0}[\xi \cos(\vec{n}, \xi) + \eta \cos(\vec{n}, \eta) + \zeta \cos(\vec{n}, \zeta)].$$

Напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні σ_0 виражаються формулами

$$\cos(\vec{n},\,\xi) = \frac{f_\xi}{\sqrt{1+f_\xi^2+f_\eta^2}},\quad \cos(\vec{n},\,\eta) = \frac{f_\eta}{\sqrt{1+f_\xi^2+f_\eta^2}},$$

$$\cos(\vec{n},\,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1+f_\xi^2+f_\eta^2}}.$$

У місцевій системі координат $f_\xi(N_0) = f_\eta(N_0) = 0$. Надалі вважатимемо поверхню σ_0 настільки малою, що

$$ad^\alpha \le 1 \tag{4.126}$$

(див. означення поверхні Ляпунова в п. 4.11). Тоді кут $\theta_0 = (\vec{n},\,\zeta)$ між нормалями в точках N_0 і N до поверхні σ_0 менший за $0{,}5\pi$. Отже, на підставі третьої умови означення поверхні Ляпунова маємо

$$\cos\,\theta_0 \ge 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2 \ge 1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha}, \tag{4.127}$$

звідки

$$\frac{1}{\cos\,\theta_0} = \sqrt{1+f_\xi^2+f_\eta^2} \le \frac{2}{2-a^2 r_0^{2\alpha}} \le 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \le 2.$$

Унаслідок (4.126)

$$f_\xi^2 + f_\eta^2 \le 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} \le 3a^2 r_0^{2\alpha} \tag{4.128}$$

і

$$|\,f_\xi\,| \le \sqrt{3}ar_0^\alpha,\quad |\,f_\eta\,| \le \sqrt{3}ar_0^\alpha. \tag{4.129}$$

Введемо полярні координати:

$$\xi = \rho_0\,\cos\,\theta,\quad \eta = \rho_0\,\sin\,\theta,\quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Тоді

$$\zeta_{\rho_0}^2 = (f_\xi\,\cos\,\theta + f_\eta\,\sin\,\theta)^2 \le f_\xi^2 + f_\eta^2.$$

Звідси, беручи до уваги (4.128), дістаємо

$$|\,\zeta_{\rho_0}\,| \le \sqrt{3}ar_0^\alpha \le \sqrt{3},\quad ar_0^\alpha \le 1, \tag{4.130}$$

або

$$|\,\zeta\,| \le \sqrt{3}\rho_0, \tag{4.131}$$

але тоді

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \zeta^2} \le 2\rho_0. \qquad (4.132)$$

Із нерівностей (4.130), (4.132) маємо

$$|\zeta_{\rho_0}| \le \sqrt{3}a2^\alpha \rho_0^\alpha,$$

звідки

$$|\zeta| \le \frac{2^\alpha \rho_0^{\alpha+1}}{1+\alpha}\sqrt{3}a.$$

При $\alpha \le 1$ буде $2^\alpha \le 1+\alpha$, отже, попередню нерівність можна представити у вигляді $|\zeta| \le 2a\rho_0^{\alpha+1}$.

Із (4.127) і (4.132) дістаємо

$$1 - \cos\theta_0 \le \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha} \le 2^{2\alpha-1}a^2\rho_0^{2\alpha}.$$

Дамо оцінку напрямних косинусів одиничного вектора $\vec{n}$ зовнішньої нормалі до поверхні S у точці N. На підставі (4.129) і (4.132) маємо

$$|\cos(\vec{n}, \zeta)| < |f_\xi| \le \sqrt{3}ar_0^\alpha \le \sqrt{3}a2^\alpha\rho_0^\alpha,$$

$$|\cos(\vec{n}, \eta)| < |f_\eta| \le \sqrt{3}a2^\alpha\rho_0^\alpha.$$

Оскільки $\cos(\vec{n}, \zeta) = \cos\theta_0$, то $|\cos(\vec{n}, \zeta)| \ge 0{,}5$.

Позначимо $C = \sup\{2a, \sqrt{3}a2^\alpha, 2^{2\alpha-1}a^2\}$. Тоді з попередніх оцінок дістанемо

$$\begin{gathered} |\zeta| \le C\rho_0^{\alpha+1}, \ |\cos(\vec{n}, \xi)| \le C\rho_0^\alpha, \ |\cos(\vec{n}, \eta)| \le C\rho_0^\alpha, \\ 1 - \cos(\vec{n}, \zeta) \le C\rho_0^{2\alpha}, \ |\cos(\vec{n}, \zeta)| \ge 0{,}5. \end{gathered} \qquad (4.133)$$

Беручи до уваги оцінки (4.133) та враховуючи очевидні нерівності $|\xi| \le \rho_0$, $|\eta| \le \rho_0$, $\rho_0 \le r_0$, де $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, маємо

$$\left|\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2}\right| \le \frac{|\cos(\vec{n}, \xi)|}{r_0^2} + \frac{|\cos(\vec{n}, \eta)|}{r_0^2} + \frac{|\zeta|}{r_0^3} \le$$

$$\le 3C\rho_0^{\alpha-2} = \frac{b}{\rho_0^{2-\alpha}}, \quad b = 3C. \qquad (4.134)$$

Функція $\mu(N)$ неперервна на поверхні S, отже,

$$|\,\mu(N)\,| \le \max_{S} |\,\mu(N)\,| = A. \tag{4.135}$$

Замінюючи інтеграл по σ_0 інтегралом по проекції σ_0' частини поверхні σ_0 на площину $\xi O \eta$ місцевої системи координат, дістаємо

$$\iint\limits_{\sigma_0} \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} ds = \iint\limits_{\sigma_0'} \mu(\xi, \eta) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\theta_0}.$$

На підставі (4.133)—(4.135) легко переконатися в справедливості оцінки

$$\left| \mu(\xi, \eta) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} \frac{1}{\cos\theta_0} \right| \le \frac{2Ab}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

звідки випливає збіжність інтеграла (4.125), якщо точка M належить поверхні S. Таким чином, потенціал подвійного шару (4.125) визначений у всьому просторі.

Якщо точка $M \in S$, наприклад, збігається з точкою N_0 поверхні S, то значення інтеграла (4.125) у цій точці називається ***прямим значенням потенціалу подвійного шару.***

Нехай точка $M(x, y, z)$ знаходиться поза поверхнею S і наближається до точки $N_0 \in S$. Якщо при цьому наближенні виявиться, що потенціал подвійного шару $\omega(M)$ прямує до деякої скінченної границі, то казатимемо, що ***потенціал подвійного шару набуває в точці N_0 граничного значення.***

Надалі покажемо, що граничні значення потенціалу подвійного шару $\omega(M)$, взагалі кажучи, різні залежно від того, ззовні чи зсередини прямує точка M до S, і ці граничні значення не збігаються з прямими значеннями, тобто покажемо, що потенціал подвійного шару (4.125) зазнає розриву, коли точка M переходить через поверхню S.

Розглянемо спочатку потенціал (4.125), коли $\mu(N) \equiv 1$. Тоді

$$\omega_1(M) = -\iint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \iint\limits_{S} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Нехай точка M знаходиться поза замкненою поверхнею S. При цьому r^{-1} є гармонічною функцією всередині S із неперервними похідними всіх порядків аж до S. Тоді, згідно з властивостями гармонічних функцій,

$$\omega_1(M) = -\iint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r} \right) ds = 0 \quad (M \text{ — поза } S).$$

Нехай точка M знаходиться всередині S. Побудуємо кулю $K_\delta(M)$ із центром у точці M і такого малого радіуса δ, щоб $K_\delta(M)$ цілком містилася всередині області T, яка обмежена поверхнею S. Тоді в області $T\backslash K_\delta(M)$ функція r^{-1} гармонічна й маємо

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds + \iint\limits_{C_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0,$$

де $C_\delta(M)$ — сфера радіусом δ із центром у точці M.

У точках сфери $C_\delta(M)$ зовнішня щодо області $T\backslash K_\delta(M)$ нормаль має напрям, протилежний напряму радіуса сфери, а отже,

$$\left.\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{C_\delta(M)} = -\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{C_\delta(M)} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Таким чином, попередня рівність запишеться у вигляді

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds + \frac{1}{\delta^2} \iint\limits_{C_\delta(M)} ds = 0,$$

або

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds + 4\pi = 0,$$

звідки

$$\omega_1(M) = -\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 4\pi \;\; (M \text{ — всередині } S).$$

Припустимо, що точка M знаходиться на поверхні S. Знайдемо пряме значення потенціалу

$$\omega_1(M) = -\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds.$$

Проведемо малу сферу $C_\delta(M)$ із центром у точці M і радіусом $\delta \le d$ (d — стала, яка фігурує в означенні поверхні Ляпунова). Ця сфера вирізає частину σ поверхні S. Згідно з означенням невласного інтеграла маємо

$$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{S\backslash\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds.$$

Нехай $C'_\delta(M)$ — частина поверхні $C_\delta(M)$, яка знаходиться всередині поверхні $S\,(C'_\delta(M) \subset T)$. Розглянемо область, обмежену поверхнями $S\backslash\sigma$ та $C'_\delta(M)$. Оскільки точка M знаходиться поза цією областю, то в цій області функція r^{-1} є гармонічною, і

$$\iint\limits_{S\backslash\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds + \iint\limits_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 0,$$

або з урахуванням попередньої рівності

$$\iint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = -\lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds. \qquad (4.136)$$

Введемо сферичні координати з центром у точці M. Як і раніше, маємо

$$\left.\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{C'_\delta(M)} = \frac{1}{\delta^2}, \quad ds = \delta^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Тоді

$$\iint\limits_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\theta(\varphi)}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} [1 + \cos\theta(\varphi)] d\varphi =$$

$$= 2\pi + \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi) d\varphi. \qquad (4.137)$$

Покажемо, що

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi) d\varphi = 0.$$

Для цього введемо місцеву систему координат із початком у точці M, спрямувавши вісь $M\zeta$ по нормалі до S у точці M, а за площину xMy візьмемо площину, дотичну до поверхні S у точці M. Тоді $\cos\theta(\varphi) = \zeta/\delta$.

Зазначимо, що точки $(\delta, \varphi, \theta(\varphi))$ лежать на лінії перетину сфери $C_\delta(M)$ із поверхнею Ляпунова S, тому для координат ζ точок цієї лінії справедлива оцінка $|\zeta| \leq C\delta^{1+\alpha}$ [див. оцінки (4.133)].

Отже, $|\cos\theta(\varphi)| \le C\delta^{\alpha}$, а звідси випливає, що $\cos\theta(\varphi) \to 0$ при $\delta \to 0$ рівномірно, тобто незалежно від точки M, і

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi)\,d\varphi \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0.$$

Таким чином, із (4.137) маємо

$$\lim_{\delta\to 0} \iint_{C'_\delta(M)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = 2\pi$$

і остаточно з рівності (4.136) дістаємо

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = -2\pi, \quad M \in S.$$

Об'єднаємо добуті результати:

$$\omega_1(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \begin{cases} 0 & (M \text{ — поза } S) \\ 2\pi & (M \in S) \\ 4\pi & (M \text{ — усередині } S). \end{cases} \tag{4.138}$$

Інтеграл $\omega_1(M)$ називається *інтегралом Гаусса*, який є розривною функцією.

Надалі вважатимемо поверхню S такою, що за довільного положення точки M виконується нерівність

$$\iint_S \frac{|\cos\varphi|}{r^2} ds \le C, \tag{4.139}$$

де C — цілком певне додатне число. Припустимо, наприклад, що існує таке ціле додатне число K, що за довільного положення M можна розділити S на окремі частини, кількість яких не перевищує K, так, що пряма, яка проходить через M, перетинає кожну частину не більше, ніж в одній точці, причому на кожній із частин $\cos\varphi$ зберігає знак. За цією умовою нерівність (4.139) виконується, якщо взяти $C = 4\pi K$.

Формули (4.138) показують, що при $\mu(N) \equiv 1$ потенціал подвійного шару (4.125) зазнає розриву неперервності, коли M перетинає поверхню S. Покажемо, що дане твердження справедливе для довільної неперервної густини $\mu(N)$.

ТЕОРЕМА 4.18

Потенціал подвійного шару $\omega(M)$ має границі, коли точка M прямує до точки $N_0 \in S$ ззовні або зсередини. Якщо границю значень $\omega(M)$ ззовні позначити через $\omega_e(N_0)$, а границю зсередини — через $\omega_i(N_0)$, то справедливі формули

$$\begin{aligned}\omega_e(N_0) &= \iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}ds - 2\pi\mu(N_0) = \\ &= \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0), \\ \omega_i(N_0) &= \iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}ds + 2\pi\mu(N_0) = \\ &= \omega(N_0) + 2\pi\mu(N_0),\end{aligned} \tag{4.140}$$

де φ_0 — кут, утворений напрямом $\vec{r}_0 = \overline{N_0N}$ із зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до поверхні S у змінній точці N.

Доведення

Нехай N_0 — фіксована точка поверхні S. Складемо потенціал подвійного шару

$$\omega_0(M) = \iint\limits_S [\mu(N) - \mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}ds \tag{4.141}$$

і покажемо, що він зберігає неперервність, коли M перетинає поверхню S у точці N_0. Нехай ε — задане додатне число. Виділимо таку частину σ поверхні S, усередині якої міститься точка N_0 і на якій внаслідок неперервності виконується нерівність

$$|\mu(N) - \mu(N_0)| \le \frac{\varepsilon}{4C}, \quad N \in \sigma, \tag{4.142}$$

де C — стала, що входить в умову (4.139).

Розділивши поверхню S на дві частини σ і $S\backslash\sigma$, матимемо

$$\begin{aligned}\omega_0(M) &= \iint\limits_\sigma [\mu(N) - \mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}ds + \\ &+ \iint\limits_{S\backslash\sigma} [\mu(N) - \mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}ds = \omega_0^{(1)}(M) + \omega_0^{(2)}(M).\end{aligned} \tag{4.143}$$

У разі довільного положення точки M справедлива нерівність

$$|\omega_0^{(1)}(M)| \le \iint\limits_\sigma |\mu(N) - \mu(N_0)|\frac{|\cos\varphi|}{r^2}ds,$$

звідки на підставі (4.139), (4.143) дістаємо

$$|\,\omega_0^{(1)}(M)\,| \le \varepsilon/4. \tag{4.144}$$

Із (4.143) випливає

$$\omega_0(M)-\omega_0(N_0)=\omega_0^{(1)}(M)-\omega_0^{(1)}(N_0)+[\omega_0^{(2)}(M)-\omega_0^{(2)}(N_0)],$$

отже,

$$|\,\omega_0(M)-\omega_0(N_0)\,| \le |\,\omega_0^{(1)}(M)\,|+|\,\omega_0^{(1)}(N_0)\,|+|\,\omega_0^{(2)}(M)-\omega_0^{(2)}(N_0)\,|,$$

або внаслідок (4.144)

$$|\,\omega_0(M)-\omega_0(N_0)\,| \le \varepsilon/2+|\,\omega_0^{(2)}(M)-\omega_0^{(2)}(N_0)\,|\,. \tag{4.145}$$

У потенціалі подвійного шару $\omega_0^{(2)}(M)$ інтегрування здійснюється по поверхні $S\backslash\sigma$, а точка N_0 знаходиться всередині σ, тому функція $\omega_0^{(2)}(M)$ у точці N_0 та її деякому околі неперервна й має похідні всіх порядків.

Таким чином, за всіх M, досить близьких до N_0, маємо

$$|\,\omega_0^{(2)}(M)-\omega_0^{(2)}(N_0)\,| \le \varepsilon/2,$$

і внаслідок (4.145)

$$|\,\omega_0(M)-\omega_0(N_0)\,| \le \varepsilon,$$

звідки з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ випливає неперервність функції $\omega_0(M)$ у точці N_0.

Нехай точка $M \in S$. Позначимо її через N. З урахуванням (4.138) маємо

$$\begin{gathered}\omega_0(N)=\iint\limits_S \mu(N)\frac{\cos\varphi}{r^2}ds-\mu(N_0)\iint\limits_S\frac{\cos\varphi}{r^2}ds=\omega(N)-2\pi\mu(N_0),\\ \omega_0(N_0)=\omega(N_0)-2\pi\mu(N_0),\end{gathered} \tag{4.146}$$

де $\omega(N_0)$ — значення інтеграла (4.125) у точці N_0.

Нехай $N \to N_0$ $(N \in S)$. Унаслідок доведеної неперервності $\omega_0(M)$

$$\omega_0(N) \to \omega_0(N_0)=\omega(N_0)-2\pi\mu(N_0).$$

Звідси та з формул (4.146) бачимо, що $\omega(N)$ має при цьому границю $\omega(N_0)$, тобто функція $\omega(M)$, визначена формулою (4.125), є неперервною на поверхні S.

Припустимо тепер, що точка M знаходиться всередині S. На підставі (4.138) маємо

$$\omega_0(M) = \omega(M) - 4\pi\mu(N_0). \tag{4.147}$$

Нехай точка M прямує до N_0. Унаслідок доведеної неперервності $\omega_0(M)$

$$\omega_0(M) \to \omega_0(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \tag{4.148}$$

Але тоді з (4.147) випливає, що й $\omega(M)$ має границю, коли точка M прямує до N_0 зсередини S, причому на підставі (4.148)

$$\omega_i(N_0) - 4\pi\mu(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0),$$

тобто

$$\omega_i(N_0) = \omega(N_0) + 2\pi\mu(N_0). \tag{4.149}$$

Із (4.149) бачимо, що границя $\omega_i(N_0)$ і значення функції $\omega(M)$ у точці N_0 різні, якщо тільки $\mu(N_0) \neq 0$.

Нехай точка M знаходиться поза поверхнею S. Тоді згідно з (4.138) $\omega_0(M) = \omega(M)$. Повторюючи вищенаведені міркування, маємо

$$\omega_e(N_0) = \omega(N_0) - 2\pi\mu(N_0). \tag{4.150}$$

Із формул (4.149), (4.150) безпосередньо дістаємо значення стрибка потенціалу подвійного шару в довільній точці $N_0 \in S$:

$$\omega_i(N_0) - \omega_e(N_0) = 4\pi\mu(N_0).$$

Зазначимо, що функція $\omega(M)$, визначена формулою (4.125), є неперервною всередині S і аж до S. Це випливає із формул (4.140) і неперервності функції $\omega(N_0)$ на поверхні S. Аналогічно можна стверджувати, що вона є неперервною поза S і аж до S.

4.19
Потенціал простого шару

Розглянемо потенціал простого шару з неперервною густиною $\psi(N)$, яка розподілена по поверхні Ляпунова:

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds, \quad r = |\overrightarrow{MN}|. \tag{4.151}$$

У всіх точках $M(x, y, z)$ простору, які не належать поверхні S, потенціал простого шару має похідні всіх порядків і задовольняє рівняння Лапласа. Як і в п. 4.18, можна показати, що потенціал простого шару прямує до нуля на нескінченності як B^{-1}, де $B = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ТЕОРЕМА 4.19

Потенціал простого шару (4.151) із неперервною густиною є функцією, неперервною в усьому просторі.

Доведення

Якщо точка $M \in S$, то потенціал простого шару (4.151) є невласним інтегралом. Покажемо, що в точках поверхні S він збігається рівномірно, й $u(M)$ є функцією, неперервною на S.

Нехай N_0 — довільна точка поверхні S. В точці N_0 побудуємо місцеву систему координат (S — поверхня Ляпунова). Нехай $\varepsilon > 0$ — задане число й σ_1 — частина поверхні S, визначена умовою $\xi^2 + \eta^2 \le d_1^2$ ($d_1 \le 0{,}25d$; d — стала, яка фігурує в означенні поверхні Ляпунова).

Покажемо, що можна вибрати d_1 настільки малим, що для довільного положення M у деякому околі точки N_0 виконується нерівність

$$\left| \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \le \varepsilon. \tag{4.152}$$

Унаслідок неперервності функції $\psi(N)$ на S існує така стала A, що $|\psi(N)| \le A$ для всіх $N \in S$. Маємо

$$\left| \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \le 2A \iint\limits_{\sigma_{d_1}(N_0)} \frac{d\xi\, d\eta}{\rho_1}, \tag{4.153}$$

де $\sigma_{d_1}'(N_0)$ — круг радіусом d_1 із центром у N_0; ρ_1 — довжина проекції M_1N_1 відрізка MN на дотичну до S площину в точці N_0. Припустимо, що точка M знаходиться всередині кулі радіусом d_1 із центром у точці N_0. Тоді точка $M_1 \in \sigma_{d_1}(N_0)$, і якщо на площині (ξ, η) візьмемо круг $\sigma_{2d_1}(M_1)$, то він міститиме весь круг $\sigma_{d_1}(N_0)$, а отже, враховуючи (4.153), дістаємо

$$\left| \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\psi(N)}{r} ds \right| \le 2A \iint\limits_{\rho_1 \le 2d_1} \frac{d\xi\, d\eta}{\rho_1} = 2A \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2d_1} \frac{\rho_1 d\rho_1\, d\varphi}{\rho_1} = 8\pi A d_1.$$

Остання оцінка справедлива за довільного положення точки N_0 на поверхні S. Аби дістати оцінку (4.152), достатньо вибрати d_1 таким чином, щоб $8\pi A d_1 < \varepsilon$. Оцінка (4.152) справедлива за довільного положення точки M у кулі радіусом d_1 із центром у точці N_0, отже, інтеграл (4.151) збігається рівномірно на поверхні S і функція $u(M)$ є неперервною в точці $N_0 \in S$, що й потрібно було довести.

4.20
Нормальна похідна потенціалу простого шару

Нехай $\vec{n}_0$ — напрям зовнішньої нормалі до поверхні S у точці N_0 (рис. 4.17). Вважаючи, що $M \notin S$, візьмемо похідну від функції (4.151) за напрямом $\vec{n}_0$. Від точки M залежить тільки множник r^{-1}, і ми можемо диференціювати його під знаком інтеграла:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} = \iint_S \psi(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0}\left(\frac{1}{r}\right) ds = \iint_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n}_0)}{r^2} ds. \qquad (4.154)$$

Наголосимо на різниці між останнім інтегралом і потенціалом подвійного шару (4.125). В інтегралі (4.125) береться кут між напрямом $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$ і зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до поверхні S у змінній точці інтегрування N, а в інтегралі (4.154) розглядається кут між $\vec{r}$ і зовнішньою нормаллю до S у фіксованій точці N_0 (рис. 4.17).

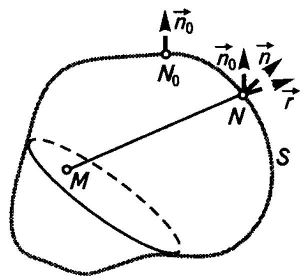

Рис. 4.17

Покажемо, що інтеграл (4.154) існує й у тому випадкові, коли M збігається з точкою N_0. Тоді матимемо

$$\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0} = \iint\limits_S \psi(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds, \tag{4.155}$$

де r_0 — відстань $|N_0N|$. Для доведення існування інтеграла (4.155) достатньо розглянути його на частині σ_0 поверхні S, яка містить точку N_0, тобто $N_0 \in \sigma_0$. У точці N_0 побудуємо місцеву систему координат. Як і раніше, через (x, y, z) позначимо координати точки M, а через (ξ, η, ζ) — координати точки N у місцевій системі координат. Тоді інтеграл (4.154) запишемо у вигляді

$$\iint\limits_{\sigma_0} \psi(N) \frac{\zeta - z}{r^3} ds.$$

Якщо M збігається з N_0, то $z = 0$, і інтеграл набирає вигляду

$$\iint\limits_{\sigma_0} \psi(N) \frac{\zeta}{r_0^3} ds = \iint\limits_{\sigma_0'} \psi(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\vec{n}, z)} d\xi\, d\eta,$$

де σ_0' — проекція σ_0 на дотичну площину до поверхні S у точці N_0, а $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ — рівняння частини σ_0 поверхні S у місцевій системі координат.

Беручи до уваги (4.133) та нерівності $r_0 \ge \rho_0$, $|\psi(N)| \le A$, дістаємо таку оцінку підінтегральної функції:

$$\left| \psi(\xi, \eta) \frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3 \cos(\vec{n}, z)} \right| \le \frac{2CA}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

звідки й випливає збіжність інтеграла (4.154), коли точка M збігається з точкою $N_0 \in S$.

З'ясуємо тепер поведінку нормальної похідної потенціалу простого шару (4.154) в разі наближення M до N_0 по нормалі зсередини та ззовні поверхні S. Для цього позначимо через $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i$ границю $\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0}$, коли $M \to N$ зсередини поверхні S, а через $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e$ — поза S.

Покажемо, що нормальна похідна потенціалу простого шару (4.154) має цілком певні границі й для них справедливі такі формули:

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i = \iint\limits_S \psi(N)\frac{\cos(\vec{r}_0,\, \vec{n}_0)}{r_0^2}\,ds + 2\pi\psi(N_0),$$
$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = \iint\limits_S \psi(N)\frac{\cos(\vec{r}_0,\, \vec{n}_0)}{r_0^2}\,ds - 2\pi\psi(N_0). \qquad (4.156)$$

Для доведення справедливості формул (4.156) візьмемо різницю інтеграла (4.154) й потенціалу подвійного шару з тією самою густиною $\psi(N)$:

$$F(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} - \omega(M) = \iint\limits_S \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r},\, \vec{n})}{r^2}\,ds. \quad (4.157)$$

Цей інтеграл має сенс, якщо точка M знаходиться за межами поверхні S ($M \notin S$) або збігається з точкою $N_0 \in S$.

Доведемо, що різниця (4.157) залишається неперервною, коли M перетинає поверхню S у точці N_0. Для цього покажемо, що $F(M) \to F(N_0)$, коли точка $M \to N_0$ по нормалі $\vec{n}_0$. У точці N_0 побудуємо місцеву систему координат. Нехай σ_1 — частина поверхні S, яка визначається умовою $\xi^2 + \eta^2 \le d_1^2$, $d_1 \le \frac{1}{2}d$, $N_0 \in S$. Точка M знаходиться на нормалі до S у точці N_0. Тоді в місцевій системі координат $x = y = 0$, а отже,

$$\cos(\vec{r},\, \vec{n}) = \frac{\xi}{r}\cos(\vec{n},\, \xi) + \frac{\eta}{r}\cos(\vec{n},\, \eta) + \frac{\zeta - z}{r}\cos(\vec{n},\, \zeta),$$
$$\cos(\vec{r},\, \vec{n}_0) = \frac{\zeta - z}{r}.$$

Таким чином,

$$\frac{\cos(\vec{r},\, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r},\, \vec{n})}{r^2} =$$
$$= -\frac{\xi}{r^3}\cos(\vec{n},\, \xi) - \frac{\eta}{r^3}\cos(\vec{n},\, \eta) - \frac{\zeta - z}{r^3}[\cos(\vec{n},\, \zeta) - 1].$$

Беручи до уваги (4.133) та нерівності $|\xi| \le \rho_0$, $|\eta| \le \rho_0$, $r \ge \rho_0$, $|\zeta - z| \le r$, де $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — довжина проекції $\overline{MN}$ на дотичну до S площину в точці N_0, дістаємо

$$\frac{|\cos(\vec{r},\, \vec{n}_0) - \cos(\vec{r},\, \vec{n})|}{r^2} \le \frac{b_1}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

де b_1 — стала. Внаслідок неперервності густини $\psi(N)$ на S буде $|\psi(N)| \le A$, а отже,

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_0)-\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}ds\right| \le \iint\limits_{\rho_0\le d_1}\frac{2Ab_1}{\rho_0^{2-\alpha}}d\xi\, d\eta =$$

$$= 2Ab_1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d_1}\frac{d\rho_0\, d\varphi}{\rho_0^{1-\alpha}} = b_2 d_1^{\alpha},$$

де b_2 — стала.

Добута оцінка справедлива за довільного положення точки M на нормалі до S у точці N_0, причому M може збігатися з точкою N_0. Звідси випливає: якщо $\varepsilon > 0$, то, вибираючи d_1 таким чином, щоб $b_2 d_1^{\alpha} < 0{,}25\varepsilon$, матимемо

$$\left|\iint\limits_{\sigma_1} \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_0)-\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}ds\right| \le 0{,}25\varepsilon. \qquad (4.158)$$

Запишемо (4.157) у вигляді

$$F(M) = \iint\limits_{\sigma_1} \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_0)-\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}ds +$$

$$+\iint\limits_{S\setminus\sigma_1} \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n}_0)-\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}ds = F_1(M)+F_2(M).$$

Тоді

$$F(M)-F(N_0) = F_1(M)-F_1(N_0)+F_2(M)-F_2(N_0),$$

звідки

$$|F(M)-F(N_0)| \le |F_1(M)| + |F_1(N_0)| + |F_2(M)-F_2(N_0)|,$$

або внаслідок (4.158)

$$|F(M)-F(N_0)| \le \varepsilon/2 + |F_2(M)-F_2(N_0)|, \qquad (4.159)$$

якщо вважати, що точка M знаходиться на нормалі до S у точці N_0. В інтегралі $F_2(M)$ інтегрування здійснюється по поверхні $S\setminus\sigma_1$, а точка

$N_0 \in \sigma_1$. Тому функція $F_2(M)$ у точці N_0 та деякому її околі є неперервною, отже, для всіх M, досить близьких до N_0,

$$|F_2(M) - F_2(N_0)| < 0{,}5\varepsilon.$$

Таким чином, із (4.159) дістаємо

$$|F(M) - F(N_0)| < \varepsilon,$$

звідки внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\lim_{M \to N_0} F(M) = F(N_0), \tag{4.160}$$

причому $M \to N_0$ по нормалі до S у точці N_0 зсередини або ззовні поверхні S. Раніше було показано, що потенціал подвійного шару $\omega(M)$ має границю, коли M прямує до N_0 по нормалі зсередини або ззовні поверхні S. Тоді з (4.157) на підставі (4.160) випливає, що нормальна похідна потенціалу простого шару (4.154) має границі, коли $M \to N_0$ по нормалі зсередини або ззовні поверхні S. Використовуючи (4.160), дістаємо

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \omega_i(N_0) = \iint_S \psi(N)\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2}ds - \omega(N_0),$$

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e - \omega_e(N_0) = \iint_S \psi(N)\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2}ds - \omega(N_0).$$

Беручи до уваги (4.140), переконуємося в справедливості формул (4.156), з яких безпосередньо випливає значення стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 4\pi\psi(N_0).$$

Зазначимо, що нормальна похідна потенціалу простого шару прямує до своїх граничних значень $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i$ і $\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e$ рівномірно для всієї поверхні S у разі прямування M до N_0 по нормалі.

Казатимемо, що гармонічна всередині чи поза S функція $u(M)$ має правильну нормальну похідну, якщо в разі прямування M до N_0 по нормалі до S її нормальна похідна $\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0}$ прямує до своїх граничних значень рівномірно відносно точки $N_0 \in S$.

Отже, справедлива наступна теорема.

ТЕОРЕМА 4.20

Потенціал простого шару з неперервною густиною має правильні нормальні похідні як зсередини, так і ззовні поверхні S.

4.21
Логарифмічний потенціал

У випадку площини логарифмічні потенціали простого й подвійного шарів мають відповідно такий вигляд:

$$u(M) = \int_l \psi(N) \ln \frac{1}{r} ds, \quad M = M(x, y),$$
$$N = N(\xi, \eta), \quad r = |\overline{MN}|; \tag{4.161}$$

$$\omega(M) = -\int_l \mu(N) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds = \int_l \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds, \tag{4.162}$$

де l — деяка замкнена крива на площині xOy; $\psi(N)$ — лінійна густина простого шару; $\mu(N)$ — густина моменту лінійного подвійного шару.

Вираз $r^{-1} \cos(\vec{r}, \vec{n}) ds$ дає кут, під яким бачимо елемент кривої ds із точки M, причому цей кут буде додатним, якщо $\cos \varphi > 0$, і від'ємним — при $\cos \varphi < 0$.

Надалі вважатимемо, що функції $\psi(N)$ і $\mu(N)$ є неперервними, а l — крива Ляпунова (означення кривої Ляпунова аналогічне означенню поверхні Ляпунова).

У випадку двох незалежних змінних формула (4.138) набере вигляду

$$\omega(M) = \int_l \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \begin{cases} 0 & (M \text{ — поза } l), \\ \pi & (M \in l), \\ 2\pi & (M \text{ — всередині } l). \end{cases} \tag{4.163}$$

Покажемо: якщо l має неперервну кривину, то потенціал подвійного шару в точках кривої l існує. Для цього розглянемо криву на площині xOy і виберемо початок координат у точці N, вісь Ox спрямуємо по дотичній, а вісь Oy — по нормалі в цій точці (рис. 4.18). Рівняння кривої в деякому околі точки N запишеться у вигляді $y = y(x)$. За припущенням крива має неперервну кривину, тобто $y(x)$ має неперервні похідні до другого порядку включно.

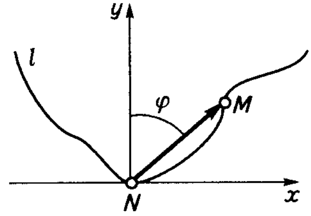

Рис. 4.18

Застосовуючи формулу Тейлора, дістаємо

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

звідки внаслідок вибору системи координат

$$y(x) = \frac{x^2}{2} y''(\theta x).$$

Ураховуючи цю рівність, маємо

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4}[y''(\theta x)]^2} = x\sqrt{1 + x^2[0,5y''(\theta x)]^2},$$

$$\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \cos\varphi = \frac{y}{r} = \frac{xy''(\theta x)}{2\sqrt{1 + x^2[0,5y''(\theta x)]^2}},$$

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{y''(\theta x)}{2(1 + x^2[0,5y''(\theta x)]^2)}.$$

Із виразу кривини $K = \dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ випливає $y''(0) = K(N)$. У зв'язку з цим

$$\lim_{MN \to 0} \frac{\cos\varphi}{r} = 0,5K(N).$$

Таким чином, функція $r^{-1}\cos\varphi$ є неперервною вздовж кривої l, а отже, можемо стверджувати, що потенціал подвійного шару існує й є неперервною функцією, якщо $M \in l$. У тривимірному просторі функція $r^{-2}\cos\varphi$ мала, взагалі кажучи, полярність за збігу точок M і N.

Для потенціалу подвійного шару (4.162) можна довести справедливість таких формул:

$$\begin{aligned} \omega_i(N_0) &= \int_l \mu(N)\frac{\cos(\vec{r}_0,\ \vec{n})}{r_0}ds + \pi\mu(N_0) = \omega(N_0) + \pi\mu(N_0), \\ \omega_e(N_0) &= \int_l \mu(N)\frac{\cos(\vec{r}_0,\ \vec{n})}{r_0}ds - \pi\mu(N_0) = \omega(N_0) - \pi\mu(N_0), \end{aligned} \tag{4.164}$$

де $r_0 = |N_0N|$ і $(\vec{r}_0,\ \vec{n})$ — кут, утворений напрямом $\overline{N_0N}$ із напрямом зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до кривої l у точці N; N_0 — фіксована точка на l.

Формули (4.164) є аналогом формул (4.140).

Із (4.164) випливає, що

$$\omega_i(N_0) - \omega_e(N_0) = 2\pi\mu(N_0).$$

Потенціал простого шару (4.161) визначений у всіх точках площини й неперервний на всій площині.

Нехай точка $N_0 \in l$ і $\vec{n}_0$ — напрям нормалі в цій точці. Якщо $M \notin l$, то

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}_0} = \int_l \psi(N)\frac{\partial \ln(r^{-1})}{\partial \vec{n}_0}ds = \int_l \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n}_0)}{r}ds. \tag{4.165}$$

У разі наближення M до N_0 по нормалі зсередини і ззовні l похідна (4.165) має границі, які визначаються за формулами [див. формули (4.156)]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \int_l \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n}_0)}{r_0}ds + \pi\psi(N_0), \\ \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \int_l \psi(N)\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n}_0)}{r_0}ds - \pi\psi(N_0), \end{aligned} \tag{4.166}$$

з яких випливає

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 2\pi\psi(N_0).$$

Як і вище, можна показати, що вираз $r_0^{-1}\cos(\vec{r}_0,\ \vec{n}_0)$ є неперервною функцією. Зазначимо, що потенціал простого шару (4.161) не перетворюється в нуль на нескінченності.

4.22

Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь

Метод відокремлення змінних та метод функції Гріна, розглянуті в попередній темі, дають змогу дістати **явний** вираз для розв'язків крайових задач. Але їх можна застосувати тільки у випадку областей найпростішого вигляду.

Тут покажемо, що у випадку досить широкого класу областей задачі Діріхле та Неймана (внутрішні чи зовнішні) для рівнянь Лапласа й Пуассона за допомогою поверхневих потенціалів можуть бути зведені до інтегральних рівнянь. Цей спосіб часто буває досить ефективним в якісному дослідженні крайових задач (теоретичне дослідження питання існування та єдиності розв'язку крайових задач, його стійкості тощо) та в разі їх наближеного інтегрування.

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле: в класі $C^2(D) \cap C(D \cup S)$ знайти гармонічну функцію $u(x, y, z)$, яка задовольняє крайову умову

$$u(M)|_S = \varphi(N), \quad M = M(x, y, z), \quad N \in S. \tag{4.167}$$

Розв'язок поставленої задачі шукатимемо у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(M) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds, \quad r = |MN|. \tag{4.168}$$

У разі довільного вибору густини $\mu(N)$ функція (4.168) задовольняє в області D рівняння Лапласа. Виберемо $\mu(N)$ таким чином, щоб функція (4.168) задовольняла крайову умову (4.167).

Згідно з другою з формул (4.140) маємо

$$\varphi(N_0) = \iint_S \mu(N) \frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{r_0^2} ds + 2\pi\mu(N_0), \quad r_0 = |N_0N|.$$

Позначимо $K(N_0; N) = -\dfrac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n})}{2\pi r_0}$. Тоді попереднє рівняння запишеться у вигляді

$$\mu(N_0) = \frac{1}{2\pi}\varphi(N_0) + \iint_S \mu(N) K(N_0; N) ds. \tag{4.169}$$

Знайшовши розв'язок інтегрального рівняння (4.169) та підставивши його в (4.168), дістанемо розв'язок внутрішньої задачі Діріхле.

Зазначимо, що ядро $K(N_0; N)$ несиметричне, оскільки нормаль береться в точці N і r_0 має напрям $\overrightarrow{N_0 N}$.

У випадку площини внутрішня задача Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до інтегрального рівняння вигляду

$$\mu(N_0) = \frac{1}{\pi}\varphi(N_0) + \int_l \mu(N)K_1(N_0; N)ds, \qquad (4.170)$$

де $K_1(N_0; N) = -\dfrac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{\pi r_0}$.

Для зведення зовнішньої задачі Діріхле до інтегрального рівняння користуємося першою із формул (4.140). Матимемо

$$\mu(N_0) = -\frac{1}{2\pi}\varphi(N_0) - \iint_S \mu(N)K(N_0; N)ds. \qquad (4.169a)$$

Розглянемо тепер внутрішню задачу Неймана: в просторі функцій $C^2(D) \cap C(D \cup S)$ знайти розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє крайову умову

$$\lim_{M \to N} \frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}} = \Phi(N), \quad M \in D,\ N \in S. \qquad (4.171)$$

Шукаємо розв'язок поставленої задачі Неймана у вигляді потенціалу простого шару:

$$u(M) = \iint_S \frac{\psi(N)}{r} ds. \qquad (4.172)$$

Згідно з доведеними теоремами 4.19, 4.20, якщо $\psi(N) \in C(S)$, то функція (4.172) є неперервною в усьому просторі й в області D задовольняє рівняння Лапласа. Виберемо густину $\psi(N)$ таким чином, щоб задовольнялась і крайова умова (4.171). Для цього використаємо першу з формул (4.156). Маємо

$$\Phi(N_0) = \iint_S \psi(N)\frac{\cos(\vec{r}_0, \vec{n}_0)}{r_0^2} ds + 2\pi\psi(N_0),$$

або

$$\psi(N_0) = \frac{1}{2\pi}\Phi(N_0) - \iint_S \psi(N) K_2(N_0;\, N)\, ds, \tag{4.173}$$

де $K_2(N_0;\, N) = -\dfrac{\cos(\vec{r}_0,\, \vec{n}_0)}{r_0^2}$.

Для зовнішньої задачі Неймана користуємося другою з формул (4.156).

Дістаємо

$$\psi(N_0) = -\frac{1}{2\pi}\Phi(N_0) - \iint_S \psi(N) K_2(N_0;\, N)\, ds. \tag{4.173a}$$

У випадку двовимірного простору внутрішня та зовнішня задачі Неймана зведуться відповідно до таких інтегральних рівнянь:

$$\psi(N_0) = \frac{1}{\pi}\Phi(N_0) + \int_l \psi(N) K_3(N_0;\, N)\, ds, \tag{4.174}$$

$$\psi(N_0) = -\frac{1}{\pi}\Phi(N_0) - \int_l \psi(N) K_3(N_0;\, N)\, ds, \tag{4.174a}$$

де $K_3(N_0;\, N) = -\dfrac{\cos(\vec{r}_0,\, \vec{n}_0)}{\pi r_0}$.

Можна показати: якщо S (або l) є поверхнею (кривою) Ляпунова і в її означенні $\alpha = 1$, то для рівнянь (4.169), (4.170), (4.169а), (4.173)—(4.174а) справедливі основні теореми теорії інтегральних рівнянь, які розглядаються в курсі функціонального аналізу.

Вправа. За допомогою потенціалу подвійного шару знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа у випадку круга радіусом R із центром у початку координат.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке:

а) перебуває в стані спокою;

б) рухається із заданою швидкістю $v = (v_x, v_y, v_z)$, причому $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, вздовж осі Ox.

(Відповідь:

а) $\Delta u(x, y, z) = 0$, де $u(x, y, z)$ — концентрація;

б) $k\Delta u - v_x\dfrac{\partial u}{\partial x} - v_y\dfrac{\partial u}{\partial y} - v_z = 0$, де k — коефіцієнт дифузії; v_x, v_y, v_z — проекції швидкості $\vec{v}$ на координатні осі. Якщо $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, то рівняння набирає вигляду $k\Delta u - vu_x = 0$. Останнє рівняння називають ще *рівнянням газової атаки*.)

✓ *Вказівка.* Для виведення рівнянь стаціонарного процесу дифузії потрібно використати закон збереження речовини для довільного об'єму V, обмеженого поверхнею S, і застосувати формулу Остроградського. Закон збереження речовини для нерухомої поверхні S записується так:

$$\iint_S \left(-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + v_n u\right) ds = 0,$$

або

$$\iiint_V [\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(\vec{v}u)]\,dx\,dy\,dz = 0,$$

звідки внаслідок довільності об'єму V, а також умови $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ і випливає рівняння дифузії.

2. Виходячи з рівнянь Максвелла, показати, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, яка пропорційна об'ємній густині зарядів $\rho(x, y, z)$.

✓ *Вказівка.* Рівняння Максвелла мають вигляд

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}),\quad \vec{J} = \sigma\vec{E};$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H});$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho,\quad \operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0,$$

де $\vec{E}$, $\vec{H}$ — вектори відповідно електричного й магнітного полів; ε — діелектрична стала; μ — магнітна проникність; σ — провідність середовища; c — швидкість світла в порожнечі; $\vec{J}$ — густина струму провідності.

Рівняння, які задовольняє поле стаціонарно розподілених зарядів, дістають із рівнянь Максвелла, якщо всі похідні за часом покласти такими, що дорівнюють нулю. Для електростатичного поля в середовищі, яке не є провідником,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \ \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho.$$

Із першого з рівнянь випливає, що $\vec{E}$ — потенціальний вектор, тобто існує така скалярна функція $u(x, y, z)$, що $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$. Функцію $u(x, y, z)$ називають ***потенціалом поля***. Із другого з рівнянь маємо

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho(x, y, z).$$

Якщо $\varepsilon = \text{const}$, то для $u(x, y, z)$ дістаємо

$$\Delta u(x, y, z) = -\frac{1}{\varepsilon}4\pi\rho(x, y, z).$$

В порожнечі $\varepsilon = 1$.

3. Показати, що потенціал стаціонарного магнітного поля задовольняє рівняння Лапласа.

✓ *Вказівка*. Якщо магнітне поле є стаціонарним, то воно має визначатися рівняннями

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \ \operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0.$$

Із першого з рівнянь випливає потенціальність вектора $\vec{H}$: $\vec{H} = -\operatorname{grad} u$. Підставивши цей вираз у друге з рівнянь і врахувавши однорідність та ізотропність середовища ($\mu = \text{const}$), дістанемо рівняння Лапласа.

4. Скласти математичну модель стаціонарного процесу розподілу температури в неоднорідному ізотропному тілі V із краєм S, якщо в тілі є джерела теплоти інтенсивністю $f(x, y, z)$, а поверхня S теплоізольована. Коефіцієнт теплопровідності $K(x, y, z)$.

5. Визначити форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами $2a$ *і* $2b$, на яку діє рівномірно розподілене навантаження q (початок координат вибрати в центрі мембрани). Сторони нерухомо закріплені. Обчислити прогин центра мембрани, вважаючи, що $b/a = 2$.

6. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченного колового циліндра радіусом l, якщо на його по-

$^1/_2$ 11 6-55

верхні підтримується температура $u(l, \varphi) = u_0 \sin\varphi$ ($u_0 = \text{const}$). Розв'язок дістати у формі ряду й у формі інтеграла Пуассона.

7. Дано прямокутну мембрану $OACB$ (рис. 4.19). Через сторону OA тепло рівномірно підводиться, через OB — рівномірно відводиться, а дві сторони AC і BC теплоізольовані. Визначити стаціонарну температуру внутрішніх точок мембрани.

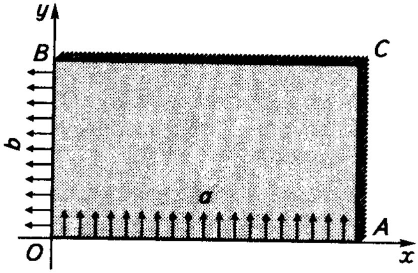

Рис. 4.19

8. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіусом a, якщо на неї діє рівномірно розподілене навантаження q. Краї мембрани нерухомо закріплені.

9. Дві сторони AC і BC прямокутної однорідної мембрани $OACB$ (рис. 4.20) теплоізольовані, а на двох інших — підтримується нульова температура. Знайти закон стаціонарного розподілу температури за умови, що в мембрані виділяється теплота з густиною $Q = \text{const}$.

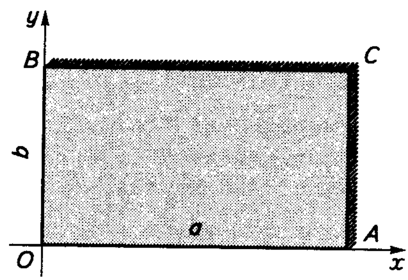

Рис. 4.20

10. Дослідити стаціонарний розподіл температури однорідної мембрани, що має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл, а дві інші — відрізками радіусів (рис. 4.21). Одна з граней ($\rho = b$)

має температуру T_0 = const, інші — підтримуються за нульової температури.

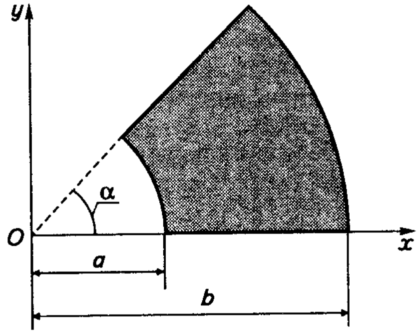

Рис. 4.21

11. Тонку плівку натягнуто на дротяний каркас, який проектується на площину xOy в прямокутник зі сторонами $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = m$; відхилення точок контура від площини xOy задається рівностями $u(0, y) = 0$, $u(l, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, m) = h \sin\frac{\pi x}{l}$ (h = const). Визначити форму поверхні, на якій розміститься плівка.

12. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченного колового циліндра радіусом l, якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура: 0° — у тих точках, де $\alpha < \varphi < 2\pi$; $2\pi u_0 \alpha^{-1}$ — у тих точках, де $0 < \varphi < \alpha$ (u_0, α = const). Розглянути випадок, коли α досить мале.

13. Знайти закон стаціонарного розподілу температури в прямокутній мембрані, дві протилежні сторони $y = 0$ і $y = b$ якої мають відповідно нульову температуру й T_0 = const, а дві інші ($x = \pm a$) — випромінюють теплоту за законом Ньютона в навколишнє середовище, температура якого дорівнює нулю.

14. Тонку плівку натягнуто на дротяний каркас, який проектується на площину xOy в круговий сектор $0 \le \varphi \le \alpha$, $0 \le \rho \le R$. На плівку діє рівномірно розподілене навантаження q. Сторони $\varphi = 0$ і $\varphi = \alpha$ нерухомо закріплені, а край $\rho = R$ вільний. Визначити форму поверхні, на якій розміститься плівка.

15. Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b, якщо три сторони $x = a$, $y = 0$, $y = b$ вільні, а на четвертій — задано відхилення $u(0, y) = y(y - b)$.

16. Напівкругла мембрана радіусом a нерухомо закріплена на півколі й вільна на прямолінійному краю. Знайти форму прогину мембрани під рівномірним навантаженням q.

17. Усередині нескінченного колового циліндра радіусом l відбувається рух нестисливої рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості $\vec{v}$ на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці на поверхні циліндра задається формулами:

а) $\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{v} = v_0 \sin\varphi, \quad v_0 = \text{const};$

б) $\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{v} = \begin{cases} -v_0 & \text{при} \quad \varphi \in (0, \pi), \\ v_0 & \text{при} \quad \varphi \in (-\pi, 0). \end{cases}$

18. Знайти закон стаціонарного розподілу температури в однорідній прямокутній мембрані, яка підігрівається джерелом теплоти, що виділяє в одиниці площі теплоту $Q = \text{const}$, якщо крізь сторони мембрани тепловіддача в навколишнє середовище нульової температури відбувається за законом Ньютона.

19. Зінтегрувати крайові задачі й дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \;\; 2 < \rho < 4, \;\; 0 < \varphi \le 2\pi,$

$$u(2, \varphi) = A\varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=4} = 0, \quad 0 < \varphi \le 2\pi, \quad A = \text{const};$$

б) $\Delta u(x, y) = 2x, \;\; x \in (0, a), \;\; y \in (0, b),$

$u(0, y) = u(a, y) = 0, \;\; y \in [0, b],$

$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0, \;\; x \in [0, a];$

в) $u(\rho, \varphi) = \varphi, \;\; 0 < \rho < 2, \;\; 0 < \varphi < \pi/4,$

$u(\rho, 0) = u(\rho, \pi/4) = 0, \;\; 0 \le \rho \le 2;$

$u(2, \varphi) = A \sin 4\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le \pi/4, \;\; A = \text{const};$

г) $\Delta u(x, y) = \sin x \sin y, \;\; 0 < x, \;\; y < \pi,$

$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \;\; y \in [0, \pi],$

$u(x, 0) = \sin x, \;\; u(x, \pi) = \sin x, \;\; x \in [0, \pi];$

д) $\Delta u(x, y) = 0, \;\; x \in [0, +\infty], \;\; y \in [0, b],$

$u|_{x=0} = Ay, \;\; u(+\infty, y) = 0, \;\; y \in [0, b], \;\; A = \text{const},$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} + u(x, b) = 0, \quad x \in [0, +\infty];$$

е) $\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \ \ 0 < \varphi \le 2\pi, \ \ \rho \in (a, b),$

$$\frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho} = a \cos \varphi, \ \ u(l, \varphi) = B \sin 2\varphi + Q, \ \ \varphi \in [0, 2\pi],$$

$A, B, Q = \text{const}.$

20. Побудувати функцію Гріна для рівняння Лапласа у випадку внутрішньої задачі Діріхле, якщо область має вигляд: а) півкруга; б) кільця; в) шару $z \in [0, l]$.

(Відповідь (рис. 4.22):

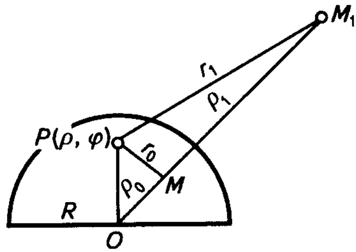

Рис. 4.22

а) $G(P, M) = G_1(\rho, \varphi, \rho_0, \varphi_0) - G_1(\rho, \varphi, \rho_0, 2\pi - \varphi_0),$

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{R_{r_0}},$$

$r_0 = | PM |, \ \ r_1 = | PM_1 |, \ \ \rho_0 = | OM |, \ \ \rho_1 = | OM_1 |,$

$M(\rho_0, \varphi_0), \ \ M_1(\rho_1, \varphi_1);$

б) $$G(P, M) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{e_n r_n'}{r_n e_n'},$$

де $r_n = | PM_n |; \ \ r_n' = | PM_n' |;$

$M_n = P(\rho_n, \varphi_0); \ \ M_n' = P(\rho_n', \varphi_0);$

$$e_n = \begin{cases} \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^k, & \text{коли } n = 2k, \\ \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{k+1}, & \text{коли } n = 2k + 1; \end{cases}$$

$^1/_2$+11 6-55

$$e'_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \frac{R_1}{\rho_0}, \text{ коли } \ n = 2k, \\ \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \frac{R_2}{\rho_0}, \text{ коли } \ n = 2k+1; \end{cases}$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^k \rho_0, \text{ коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^{k+1} \rho, \text{ коли } n = 2k+1; \end{cases}$$

$$\rho'_n = \begin{cases} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)^k \frac{R_1^2}{\rho_0}, \text{ коли } n = 2k, \\ \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)^k \frac{R_2}{\rho_0}, \text{ коли } \ n = 2k+1, \end{cases}$$

R_1, R_2 — радіуси;

в) $G(P, M) = \dfrac{1}{4\pi} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{r_n} - \dfrac{1}{r'_n} \right)$,

де $r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl+\xi)]^2}$;

$r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl-\xi)]^2}$.)

21. Знайти об'ємний потенціал V кулі за сталої густини $f(N) = \rho_0$:
а) поставивши крайову задачу для V і розв'язавши її;
б) прямим обчисленням об'ємного інтеграла.

(Відповідь:

$$V = u(r) = \begin{cases} 2\pi\rho_0 (R^2 - r^2/3), & \text{коли } \ r < R, \\ \dfrac{M}{r}, & \text{коли } \ r > R, \end{cases}$$

де R — радіус кулі; $M = \dfrac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$ — її маса.)

22. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка з густиною $\psi(M) = x$.

(Відповідь:

$$u(x, y) = \frac{a^2 - x^2 + y^2}{2} \ln \frac{(a + x)^2 + y^2}{(a - x)^2 + y^2} + ax -$$

$$- xy \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}, \quad x \in [-a, a].)$$

23. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка зі сталою густиною заряду.

(Відповідь:

$$u(x, y) = \rho_0 \left\{ 2a - y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} - \frac{a - x}{2} \ln[y^2 + (a - x)^2] - \right.$$

$$\left. - \frac{a + x}{2} \ln[y^2 + (a + x)^2] \right\},$$

де ρ_0 — густина.)