РОЗДІЛ 4. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

4.1.ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ. РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ СИМЕТРИЧНИМ ЯДРОМ

Рівняння відносно функції $u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D \subset R^n$ називається інтегральним, якщо ця функція знаходиться під знаком інтеграла. Ми розглянемо лише лінійні інтегральні рівняння

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_D g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + f(\boldsymbol{x}) \qquad (4.1),$$

де функції $f: D \to R$ та $g: D \times D \to R$ відомі.

Визначимо оператор G в деякому функціональному просторі формулою

$$Gu(\boldsymbol{x}) = \int_D g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Тоді рівняння (4.1) можна записати в абстрактній формі

$$u = Gu + f \qquad (4.2)$$

а функція $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ називається ядром інтегрального оператора G.

В курсі аналізу були досліджені одновимірні інтегральні рівняння типу згортки:

на всій осі: $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) u(y) dy + f(x)$,

що розв'язуються за допомогою перетворення Фур'є;

на півосі: $u(t) = \int_0^t g(t - s) u(s) ds + f(t)$

для функцій-оригіналів, що розв'язуються за допомогою перетворення Лапласа.

Елементарним є клас вироджених інтегральних рівнянь – для них область значень оператора G є скінченновимірною.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$u(x) = \lambda \int_0^1 (x + \ y - 2xy) u(y) dy + x + x^2$$

Розв'язок. Оскільки

$(Gu)(x) = \int_0^1 yu(y)dy + x \int_0^1 (1 - 2y)\, u(y)dy,$ то $Im\, G = \{\alpha + \beta x\}$.

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x) = a + bx + x^2$$

і підставимо це $u(x)$ в рівняння :

$$a + bx + x^2 = \lambda \int_0^1 y(a + by + y^2)dy + \lambda x \int_0^1 (1 - 2y)(a + by + y^2)dy + x + x^2$$

що приводить до системи

$$a = \lambda \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{4}\right), \ b = 1 - \frac{\lambda}{6}(b + 1) \ ,$$

розв'язком якої є

$$a = \frac{\lambda^2 - 42\lambda}{6(\lambda - 2)(\lambda + 6)}, \ \ b = \frac{6 - \lambda}{\lambda + 6} .$$

Таким чином, розв'язком рівняння у випадку $\lambda \neq 2, \lambda \neq -6$ є функція

$$u(x) = \frac{\lambda^2 - 42\lambda}{6(\lambda - 2)(\lambda + 6)} + \frac{6 - \lambda}{\lambda + 6} x + x^2$$

Вправа 4.1. Розв'язати інтегральні рівняння.

1. $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xy^3 + 5x^2 y^3) u(y) dy + 4x^4 + 3$;
2. $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + xy) u(y) dy + x + x^2$;
3. $u(x) = \lambda \int_0^{\pi} sin(2x + \ y) u(y) dy + \pi - 2x$.

Повернемось до абстрактної форми (4.2) інтегрального рівняння і введемо параметр λ:

$u = \lambda Gu + f$.

Формально розв'язок цього рівняння має вигляд

$u = (I - \lambda G)^{-1} f$

і обернений оператор існує за умови

$\frac{1}{\lambda} \in \rho(G)$, $\rho(G)$ – резольвентна множина оператора G.

Якщо застосувати метод ітерацій, то формальний розв'язок зображується як сума ряду

$u = f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_k$, $u_k = Gu_{k-1}$,

$(I - \lambda G)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k G_k$ (ряд Неймана

Розглянемо питання збіжності цього ряду. Достатньою умовою є нерівність

$|\lambda| \, \|G\| < 1$

де $\|G\|$ - хоча б одна з можливих норм оператора G.

В цьому випадку ряд мажорується спадною геометричною прогресією.

Насправді збіжність має місце і для менших обмежень на оператор G. Як приклад, розглянемо одновимірне рівняння Вольтерра

$u(x) = \lambda \int_0^x g(x,y)u(y)dy + f(x)$

З курсу функціонального аналізу відомо, що спектр оператора Вольтерра $\sigma(G) = \{0\}$. Доведемо, що ряд Неймана збігається для всіх λ. Розглянемо спочатку рівняння з обмеженими коефіцієнтами: $|g(x,y)| < c_1$, $|f(x)| < c_2$, і оцінимо доданки ряду

$f + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(x)$, $u_n(x) = \lambda \int_0^x g(x,y) u_{n-1}(y)\, dy$:

$|u_1(x)| < \lambda c_1 c_2 x$; $|u_2(x)| < \lambda^2 {c_1}^2 c_2 \frac{x^2}{2}$; … $|u_n(x)| < \lambda^n {c_1}^n c_2 \frac{x^n}{n!}$,

тобто сума ряду не перевищує $c_2 \exp\{ \lambda c_1 x \}$.

Більш цікавою (стосовно застосувань) є ситуація, коли функції g та f мають ітегровну особливість, наприклад:

$$|g(x,y)| < \frac{c_1}{\sqrt{|x-y|}}\,,\ |f(x)| < \frac{c_2}{\sqrt{x}}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. За умов (4.3) ітерації рівняння Вольтера утворюють абсолютно збіжний ряд.

Доведення. Оцінимо члени ряду; при цьому застосуємо властивості Г-функції:

$$\int_0^1 \tau^{\alpha-1}\,(1-\beta)^{\beta-1}d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ .\ \text{Тоді}$$

$$|u_1(x)| < c_1c_2\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{c_1c_2\pi}{\Gamma(1)}\,,$$

$$|u_2(x)| < \frac{c_1{}^2c_2\pi}{\Gamma(1)}\int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{c_1{}^2c_2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{x}\,,$$

$$|u_n(x)| < \frac{c_1{}^n c_2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,x^{\frac{n-1}{2}}\ .$$

Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ можна довести за ознакою Даламбера: оцінимо

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{n-2}{4}}\,e^{-\frac{x}{2}}\,e^{\frac{n}{4}}dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{n}{2}}\,dx} \le \sqrt{\frac{\int_0^\infty e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,dx}{\int_0^\infty e^{-x}\,x^{\frac{n}{2}}\,dx}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{n}{2}-1}}$$

(ми скористалися інтегральною нерівністю Коші-Буняковського та співвідношенням $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 0$$

і ряд збігається.

Зауваження 1. Наведений метод розв’язку рівняння Вольтера має місце і для більш загальних умов на члени рівняння:

$$|g(x,y)| < \frac{c_1}{|x-y|^{\alpha}}\,,\ |f(x)| < \frac{c_2}{x^{\beta}}\,,\ \alpha,\beta < 1$$

Зауваження 2. Теорема 4.1. стверджує, що для існування розв'язку рівняння достатньою умовою є інтегровність ядра. Таке ж твердження має місце і для довільної розмірності: якщо в (4.1) функція g задовольняє нерівності

$$|g(x,y)| < \frac{c_1}{||x-y||^{\alpha}}, \ \alpha < n \text{ (полярне ядро)},$$

то оператор G є обмеженим, і ряд Неймана збігається.

Зауваження 3. Якщо ядро g інтегрального рівняння

$$u(x) = \int_a^b g(x,y)u(y)dy + f(x)$$

симетричне, тобто $g(x,y) = g(y,x)$, то інтегральний оператор G є симетричним в гільбертовому просторі $L_2(a,b)$, тобто $(Gu,v) = (Gv,u)$, де скалярний добуток визначається формулою:

$$(u,v) = \int_a^b u(y)v(y)dy \, .$$

У випадку неперервного ядра G виявляється компактним оператором, тобто образ $G(\Omega)$ обмеженої в $L_2(a,b)$ множини функцій є передкомпактною множиною. Відмітимо наступну властивість такого оператора G в довільному гільбертовому просторі H.

Теорема. Симетричний компактний оператор G в гільбертовому просторі H має злічену множину дійсних власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ... , яким відповідає послідовність власних функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ..., тобто рівняння $Gu = \lambda u$ має злічену кількість розв'язків. Кожне власне число λ_k має скінченну кратність, а послідовність $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ... має єдину граничну точку 0. Власні функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ... утворюють базис в підпросторі ImG.

4.2.МЕТОД ПОВЕРХНЕВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЄ

Ідея методу потенціалів – зведення граничної задачі для еліптичного рівняння до інтегрального рівняння.

Нехай D – область в R^3, Π – її межа, точки $M = M(x,y,z)$, $P = P(\xi,\eta,\zeta)$;

$$r(M,P) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\ .$$

Для функції μ, що неперервна на поверхні Π, покладемо

$$v(x,y,z) = \iint_\pi \mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma,\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = (\boldsymbol{grad}_P \frac{1}{r}, \boldsymbol{n}) \qquad (4.4)$$

де $\boldsymbol{n}$ —одиничний вектор зовнішньої нормалі. Назвемо функцію $v(M)$ потенціалом подвійного шару. Відзначимо наступну властивість цього потенціалу:

Якщо $M \notin \Pi$, то $\Delta_M v = 0$, оскільки лапласіан можна внести під знак інтеграла.

Дослідимо ряд властивостей потенціалу подвійного шару, і в першу чергу геометричний зміст $v(x)$, коли $\mu \equiv 1$. Нехай Π – довільна (не обов'язково замкнута) поверхня, $M(x,y,z) \notin \Pi$. Визначимо тілесний кут Ω, під яким з точки M видно поверхню Π. Для цього побудуємо конічну поверхню K, утворену променями, що виходять з точки M та рухаються вздовж межі γ поверхні Π. Нехай $S_R(M)$ – сфера радіуса R з центром в M, F – підмножина сфери, що знаходиться всередині конуса K. Тоді

$$\Omega = \frac{\text{площа } F}{R^2}.$$

Твердження 1. Має місце формула

$$w(M) = \iint_\Pi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = -\Omega.$$

*Доведення***.** Проведемо сферу $S_\varepsilon(M)$ і нехай Π_ε – її підмножина, що знаходиться всередині конуса K. Розглянемо замкнену поверхню

$$\Gamma = \Pi \cup K \cup \Pi_\varepsilon\ ,\ \ M \notin \Gamma.$$

Оскільки функція $\varphi(M) = \frac{1}{r(M,P)}$, $P \in \Gamma$, є гармонічною всередині Γ, то

$$\oiint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0,$$

тобто

$$\oiint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \iint_{\Pi} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma + \iint_{K} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma + \iint_{\Pi_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0.$$

Другий доданок в правій частині дорівнює нулю, а третій можна обчислити:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \Big|_{P\in\Pi_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \text{ звідки } \iint_{\Pi_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \frac{\text{площа } \Pi_\varepsilon}{\varepsilon^2} = \Omega.$$

Твердження доведено.

Наслідок. Нехай D – область в R^3, Π – її межа. Тоді

$$w(M) = \begin{cases} -4\pi, & M \in D \\ -2\pi, & M \in \Pi \\ 0, & M \notin D \cup \Pi \end{cases}$$

Отримана для $w(M)$ формула використовується для доведення наступного співвідношення.

Твердження 2. Нехай $\mu \in C^2(R^3)$. Тоді має місце формула

$$\iiint_D (\boldsymbol{grad}\, \mu, \boldsymbol{grad}\, \tfrac{1}{r}) d\xi d\eta d\zeta = \lambda\mu(M) + \oiint_{\Pi} \left(\mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma\right),$$

де

$$\lambda = \begin{cases} 4\pi, & M \in D \\ 2\pi, & M \in \Pi \\ 0, & M \notin D \cup \Pi \end{cases}$$

Доведення. Як і при доведенні формул Гріна запишемо формулу Гаусса-Остроградського для векторного поля

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \mu(\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{grad}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

в області D — $K_\varepsilon(M)$. Зауважимо, що $\Delta\frac{1}{r} = 0$.

Випадок $M \notin D \cup \Pi$ є тривіальним; випадок $M \in D$ вже розглянуто при дослідженні властивостей гармонічних функцій. Якщо $M \in \Pi$, то $K_\varepsilon(M)$ вирізає з області D половину кулі, і відповідний інтеграл по половині Π_ε сфери $S_\varepsilon(M)$ можна обчислити за теоремою про середнє значення:

$$\oiint_{\Pi} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \mu(A)2\pi, \quad A \in \Pi_\varepsilon .$$

Граничний перехід $\varepsilon \to 0$ доводить твердження.

Твердження 3. Нехай поверхня $\Pi \in C^2$, тобто функції, в рівнянні цієї поверхні мають дві неперервні похідні. Якщо $\mu \in C^2(\Pi)$, то потенціал подвійного шару (4.4) є функцією, неперервною на Π.

Схема доведення. Нехай $M(x, y, z) \in \Pi, M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$. Треба оцінити різницю

$$v(M) - v(M_0) = \iint_{\Pi} \mu(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{r(M,P)} \partial\sigma \; - \iint_{\Pi} \mu(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{r(M_0,P)} \, d\sigma$$

де $r(M_0, P) < \delta$.

Доводиться, що за рахунок диференційованості поверхні цю різницю можна зробити менше ε.

Вправа 4.2.. Довести твердження 3.

Зауваження 1. Умову $\Pi \in C^2$ можна послабити: достатньою умовою є нерівність

$$\left|\boldsymbol{n}_M - \boldsymbol{n}_{M_0}\right| \le c|MM_0|^\alpha, \; \alpha > 0,$$

тобто вектор одиничної нормалі як функції як функція точки задовольняє умові Гьольдера. Поверхня, що задовольняє цій умові, відноситься до класу поверхонь Ляпунова.

Отримані результати дозволяють дослідити граничну поведінку потенціалу подвійного шару (4.4), коли $M(x, y, z) \to M(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$. Виявляється, що $v(M)$ має на поверхні Π розрив першого роду.

Позначимо:

$$v_+(M_0) = \lim_{M\to M_0} v(M), \quad M \notin D \cup \Pi \,;$$

$$v_-(M_0) = \lim_{M\to M_0} v(M), \quad M \in D \,,$$

тобто $v_+(M_0)$ і $v_-(M_0)$ – зовнішня та внутрішня границі потенціалу.

Теорема 4.2. Якщо $\Pi \in C^2$, то мають місце співвідношення:

$$v_+(M_0) = 2\pi\mu(M_0) + v(M_0) = 2\pi\mu(M_0) + \oiint_\Pi \mu\,(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M_0P)}\right) d\sigma;$$

$$v_-(M_0) = -2\pi\mu(M_0) + v(M_0) = -2\pi\mu(M_0) + \oiint_\Pi \mu\,(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M_0P)}\right) d\sigma,$$

тобто стрибок функції v на поверхні Π

$$v_+(M_0) - v_-(M_0) = 4\pi\mu(M_0).$$

Нагадаємо, що нормаль $\boldsymbol{n}$ – зовнішня.

Доведення спирається на твердження 2 та 3:

$$v\,(M\,) = \oiint_\Pi \mu\,(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(M\,P)}\right) d\sigma = -\lambda\mu(M) + \iiint_D \left(\boldsymbol{grad}\,\mu, \boldsymbol{grad}\,\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta,$$

де об’ємний інтеграл є функцією, неперервною на поверхні Π. Тоді

$$v_+(M_0) - v\,(M_0) = 2\pi\mu(M_0); \quad v_-(M_0) - v\,(M_0) = -2\pi\mu(M_0).$$

Зауваження 2. Нормальна похідна функції v неперервна на поверхні Π; похідні по дотичних напрямках мають стрибок в точці M_0.

Повернемось до задачі Діріхлє

$$\Delta u(x,y,z) = 0 \text{ в } D; u\big|_{\,\Pi} = f(x,y,z)$$

і будемо шукати її розв’язок у вигляді потенціалу подвійного шару

$$u(x,y,z) = \oiint_\Pi \mu\,(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)} d\sigma \qquad (4.5)$$

Оскільки для $M \in D$ функція u задовольняє рівнянню $\Delta u = 0$, залишається знайти таку щільність $\mu(\xi,\eta,\zeta)$, щоб виконувалась гранична умова, яку можна записати таким чином:

$$u_-(x_0, y_0, z_0) = \lim_{M \to M_0} u(x,y,z) = f(x,y,z), \qquad M \epsilon D.$$

Теорема 4.3. Розв'язок задачі Діріхлє дається формулою (4.5), де функція μ задовольняє інтегральному рівнянню *на поверхні* Π:

$$-2\pi\mu(x,y,z) + \oiint_{\Pi} \mu\,(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)}d\sigma = f(x,y,z)\ .$$

Доведення. Перейдемо в (4.5) до границі $M \to M_0$; з твердження теореми 4.2 випливає потрібна рівність.

Стосовно отриманого інтегрального рівняння відомо, що воно має єдиний розв'язок, якщо f – неперервна функція.

Приклад. Нехай D – підпростір $z > 0$, тоді на площині $z = 0$: $u(x,y,0) = f(x,y), P(\xi,\eta,0), M(x,y,0).$ тобто

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)} = -\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 0,$$

і рівняння має розв'язок

$$\mu(x,y,0) = -\frac{1}{2\pi}f(x,y).$$

Розв'язок задачі Діріхлє

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)}d\sigma.$$

Обчислимо підінтегральну нормальну похідну

$$-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,P)}\Big|_{P\in\Pi} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\ ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z-\varsigma}{r^3}\Big|_{\varsigma=0} = \frac{z}{r^3}$$

тобто

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\,((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}d\xi d\eta.$$

Таку ж саму форму отримано методом функцій Гріна.

Метод потенціалів можна застосувати і для розв'язку задачі Діріхлє на площині. Так, якщо γ – замкнута крива, що обмежує область $D \epsilon R^2$, покладемо

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}\oint_\gamma \mu(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\ln((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)\,dl \qquad (4.6)$$

Позначимо $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = \rho$.

Аналогом твердження 2 є формула $\big(M = M(x,y)\big)$:

$$\iint_D (\boldsymbol{grad}\,\mu, \boldsymbol{grad}\ln\frac{1}{\rho})d\xi d\eta = \lambda\mu(M) + \oint_\gamma \mu\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho}\,dl,$$ де

$$\lambda = \begin{cases} 2\pi, & M \in D \\ \pi, & M \in \gamma \\ 0, & M \notin D \cup \gamma \end{cases}$$

З останньої формули випливають співвідношення

$$v_+(M_0) = \pi\mu(M_0) + v(M_0), v_-(M_0) = -\pi\mu(M_0) + v(M_0).$$

Якщо шукати розв'язок задачі Діріхлє

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ в } D;\ \lim_{M\to M_0} u(x,y) = f(x_0,y_0),\ \ M \in D, M_0 \in \gamma$$

у вигляді (4.6), то отримаємо інтегральне рівняння для функції μ *на кривій* γ:

$$-\pi\mu(x,y) + \oint_\gamma \mu(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}ln\frac{1}{\rho}dl = f(x,y).$$

Вправа 4.3. Розв'язати методом потенціалів задачу Діріхлє на півплощині $y > 0$.

Метод потенціалів застосовний і для розв'язку параболічних граничних задач: знайти функцію $u(t,x,y,z)$, що задовольняє умовам

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, t > 0, (x,y,z) \in D; u(0,x,y,z) = 0,\ \ u(t,x,y,z)\big|_\Pi = f(t,x,y,z),$$

де Π- межа області D. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(t,x,y,z) = \int_0^t ds \oiint_\Pi \mu(s,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial n}p(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\sigma, \boldsymbol{\xi} = (\xi,\eta,\zeta),\ \boldsymbol{x} = (x,y,z),$$

де функція

$$p(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{3}{2}}} exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2 t}\right\}.$$

Доводиться, що $u(t, \boldsymbol{x})$ задовольняє рівнянню для $t > 0, \boldsymbol{x} \epsilon D$, а гранична умова виконується за рахунок вибору функції μ, яка задовольняє деякому інтегральному рівнянню.

4.3. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЗБУРЕНОЇ ДИФУЗІЇ . МЕТОД ПАРАМЕТРИКСУ.

Розглянемо одновимірне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2(x) \geq \varepsilon^2 \tag{4.7}$$

із змінним коефіцієнтом дифузії $a^2(x)$. Доводиться, що розв'язок задачі Коші для початкової умови $u(0, x) = \varphi(x)$ має вигляд:

$$u(t, x) = (H(t)\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(t, x, y)dy\,, \; p(t, x, y) > 0 \tag{4.8}$$

тобто еволюційний оператор $H(t)$ є інтегральним з ядром $p(t, x, y)$.

Якщо $\varphi(x) = 1$, то $u(t, x) = 1$, звідки випливає рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, y)dy = 1\,, t > 0, x \in R.$$

Таким чином, для всіх $t > 0, x \in R$ ядро $p(t, x, y)$ є щільністю деякої випадкової величини. Для сталого коефіцієнта дифузії ця випадкова величина є гаусівською $\aleph(x, 2a^2t)$.

Згідно (1.9), розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), u(0, x) = \varphi(x)$$

має вигляд:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(t, x, y)dy + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau, y)p(t - \tau, x, y)dy \tag{4.9}$$

Дослідимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x,u) \qquad (4.10)$$

яке назвемо збуреним по відношенню до рівняння $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

Скориставшись формулою (4.9), запишемо розв'язок задачі Коші для (4.10)

$$u(t,x) = v(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f\big(\tau, y, u(\tau,y)\big)p(t-\tau,x,y)dy \qquad (4.11)$$

де $v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)p(t,x,y)dy$ є розв'язком задачі Коші для незбуреного рівняння.

Дослідимо детальніше випадок лінійного збурення:

$$f(t,x,u) = c(t,x)u, \ \ |c(t,x)| \le A.$$

Відповідне інтегральне рівняння

$$u(t,x) = v(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau,y)u(\tau,y)p(t-\tau,x,y)dy$$

є рівнянням Вольтерра: за наведеною вище схемою його розв'язок:

$$u(t,x) = v(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x),$$

$$u_n(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau,y)u_{n-1}(\tau,y)p(t-\tau,x,y)dy, \ \ u_0 = v.$$

Якщо $|v(t,x)| < B$, то для ітерації u_n встановлюється оцінка:

$$|u_n(t,x)| < \frac{A^n B}{n!}t^n,$$

тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x)$ збігається абсолютно.

Зауважимо, що для $c = const$ розв'язок $u(t,x) = v(t,x)e^{ct}$.

Ядро $p(t,x,y)$, визначене формулою (4.8), носить назву фундаментального розв'язку рівняння (4.7).

Застосуємо ідею зведення до інтегрального рівняння для побудови фундаментального розв'язку рівняння (4.7). Відзначимо властивості $p(t,x,y)$, що випливають з його визначення:

1. $\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) = a^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, y \in R$;
2. $\lim_{t\downarrow 0}\int \varphi(y)p(t,x,y)dy = \varphi(x)$.

Представимо $p(t,x,y)$як суму двох доданків:

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau,z,y)m(t-\tau,x,z)dz \qquad (4.12)$$

де функція

$$m(t,x,y) = \frac{1}{2a(x)\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(x)t}}$$

що зветься параметриксом, нагадує розв'язок рівняння із "замороженим" в точці x коефіцієнтом дифузії $a^2(x)$; $r(t,x,y)$ - шукана функція.

Доданок $m(t,x,y)$ забезпечує виконання початкової умови. Другий доданок, тобто функцію $r(t,x,y)$ треба вибрати так, щоб сума (4.12) задовольняла рівнянню (4.7). Якщо підставити (4.12) в (4.7), отримаємо співвідношення:

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} M(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)dz \qquad (4.13)$$

де нев'язка

$$M(t,x,y) = a^2(x)\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{\partial m}{\partial t} \ .$$

Обчислення $M(t,x,y)$ приводить до виразу:

$$M(t,x,y\,) = m(t,x,y)\Big(2(\frac{a'(x)}{a(x)})^2 - \frac{a''(x)}{a(x)} + g_1(x)\frac{(x-y)^4}{t^2} + g_2(x)\frac{(x-y)^2}{t} +$$

g3(x)|x−y|3t2+g4(x)x−yt

Нехай функція $a(x)$ задовольняє умовам:

$$\varepsilon < |a(x)| < K; \quad |a'(x)| < C; \qquad |a''(x)| < C$$

Тоді $g_k(x)$ обмежені; параметрикс $m(t,x,y\,)$ задовольняє нерівності

$$m(t,x,y\,) < \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4K^2 t}}$$

З нерівності $s^b e^{-\alpha s} < C(\delta, b)e^{-(\alpha-\delta)s}, b > 0, \delta > 0,$ випливає оцінка нев'язки:

$$|M(t, x, y\,)| < \frac{C}{\sqrt{t}} q(t, x, y),$$

де гауссівська щільність

$$q(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}, \sigma > k\sqrt{2}\,.$$

Теорема. Розв'язок інтегрального рівняння (4.13) задовольняє нерівності

$$|r(t, x, y\,)| < \frac{d}{\sqrt{t}} q(t, x, y).$$

Доведення. Розв'язок має вигляд

$$r(t, x, y\,) = M(t, x, y\,) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t, x, y), \quad r_0 = M,$$

$$r_n(t, x, y\,) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} M(t-\tau, x, z\,) r_{n-1}(\tau, z, y\,)dz$$

Оскільки згортка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(t-\tau, x, z)q(\tau, z, y)dz = q(t, x, y),$$

то оцінка кожного доданку приводить до збіжності ряду, сума якого задовольняє наведеній нерівності.

Наслідок.. Фундаментальний розв'язок задовольняє нерівності

$$p(t, x, y) < m(t, x, y) + C\sqrt{t}q(t, x, y)$$