Практичне заняття. Модель Леонтьєва

Основні теоретичні відомості:

Розглянемо статичну лінійну модель багатогалузевої економіки. У основу цієї моделі покладено наступні припущення.

1. У економічній системі, що є об'єктом моделювання, виробляються та споживаються n товарів.
2. Кожна галузь виробляє лише один товар, різні галузі виробляють різні товари.
3. Під виробничим процесом у кожній галузі розуміють перетворення деяких товарів у один товар, при цьому витрати сировини на виробництво одиниці товару залишаються незмінними.

Нехай x_i – обсяг виробництва i-го товару за плановий період (рік), a_{ij} – кількість одиниць i-го товару, яку потрібно витратити на виробництво одиниці j-го товару, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$. Величина x_i складається з двох частин: обсяг виробництва, що витрачається на виробничі потреби та обсяг виробництва, що витрачається на кінцеве (невиробниче) споживання. Виходячи з припущень моделі 1 – 3, виробниче споживання i-го товару всіма галузями дорівнює $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, тому чисте виробництво i-го товару, призначене для кінцевого споживання, становить $x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i=1,...,n$.

Якщо прирівняти чисте виробництво кожного i-го товару та кінцевий попит y_i на цей товар, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i, \ i=1,...,n. \qquad (1)$$

Систему (1) називають *моделлю Леонтьєва* або *статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу*. Величини y_i у системі (1) є заданими.

Отже, модель Леонтьєва є системою з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. *Сутність моделі Леонтьєва полягає у визначенні обсягів валового виробництва галузей за відомим кінцевим попитом на їх продукцію на основі даних про технологічні можливості галузей, відображених у коефіцієнтах витрат a_{ij} системи (1).*

Використовуючи модель Леонтьєва, можна розв'язувати також і обернену задачу: за заданими обсягами валового виробництва кожного товару визначити обсяги його кінцевого споживання.

Величини x_i та y_i можна задавати у вартісних або натуральних одиницях виміру. У відповідності з цим розрізняють натуральний та вартісний міжгалузевий баланси. Далі будемо розглядати вартісний баланс.

Введемо наступні позначення: x_{ij} – кількість продукції i-ї галузі, що використовується для виробничих потреб у j-й галузі, z_j – умовно чиста продукція j-ї галузі, що включає кінцеве споживання, оплату праці та амортизацію. Принципова схема міжгалузевого балансу наведена у таблиці

Таблиця. Принципова схема міжгалузевого балансу у вартісному виразі

Галузі – виробники	Галузі – споживачі				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно чиста продукція	z_1	z_2	…	z_n	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$	
Валовий продукт	x_1	x_2	…	x_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Розглянувши схему балансу по стовбцям, робимо висновок, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі – споживача та її умовно чистої продукції дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \; j = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

Аналізуючи схему міжгалузевого балансу по рядкам, ми бачимо, що валова продукція кожної галузі – виробника дорівнює сумі матеріальних витрат її галузей – споживачів та кінцевої продукції даної галузі, призначеної для кінцевого (невиробничого) споживання:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \; i = 1, ..., n. \qquad (3)$$

Формули (3.3) описують систему з n рівнянь, які називають рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямами використання.

Основу математичної моделі міжгалузевого балансу складає <u>*матриця*</u> *А коефіцієнтів прямих витрат* a_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$. Її називають також *технологічною матрицею*. Коефіцієнт прямих витрат a_{ij} показує, яка кількість продукції i-ї галузі потрібна (якщо враховувати лише прямі витрати) для виробництва одиниці продукції j-ї галузі, тому виконується рівність:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},\ i = 1,...,n,\ j = 1,2,...,n. \tag{4}$$

Визначивши коефіцієнти технологічної матриці A, ми тим самим визначаємо коефіцієнти моделі Леонтьєва (3.1). У матричній формі цю модель можна записати у вигляді:

$$X = AX + Y, \tag{5}$$

де $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y^T = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Систему (3.5) можна записати у вигляді:

$$(E - A)X = Y, \tag{6}$$

де E – одинична матриця.

З (3.6) можна визначити валову продукцією X всіх галузей:

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{7}$$

Тут $(E - A)^{-1}$ – матриця, обернена до $(E - A)^{-1}$. Нехай $B = (E - A)^{-1}$. Тоді (3.7) набуває вигляду $X = BY$, де матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають *матрицею повних_витрат,* а її компоненти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних витрат*. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі, призначеної для кінцевого споживання.

Планові розрахунки за формулами (7) мають сенс у тому випадку, якщо ці розрахунки дозволять отримати розв'язання $x_i \geq 0$, $i = 1,...,n$.

Невід'ємну матрицю A називають <u>*продуктивною*</u>, якщо існує такий невід'ємний вектор X, що

$$X > AX. \tag{8}$$

Умова (3.8) означає, що для моделі міжгалузевого балансу (1) існує вектор Y кінцевої продукції з додатними координатами.

Для того, щоб матриця A прямих витрат у моделі Леонтьєва була продуктивною, необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з наступних умов.

1. Матриця $(E - A)$ є невід'ємно оборотною, тобто існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, всі елементи якої є невід'ємними;
2. Матричний ряд $E + A + A^2 + ... + A^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є збіжним, причому його сума дорівнює $(E - A)^{-1}$;
3. Найбільше за модулем власне значення λ матриці Aє меншим за одиницю;
4. Всі головні мінори матриці $(E - A)$ є додатними.

Більш простою , але лише достатньою умовою продуктивності матриці A є обмеження на величину найбільшої з сум елементів матриці A у кожному стовбці: якщо сума елементів кожного стовпця матриці A менша за одиницю, то матриця A є продуктивною.

Приклад У таблиці наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях.

Таблиця. Міжгалузевий баланс умовної економічної системи з двох галузей

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	A	B		
A	7	21	72	100
B	12	15	123	150

Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо кінцеве споживання продукції галузі A повинно збільшитися удвічі, а галузі B – залишитися на попередньому рівні. Знайти умовно чисту продукцію галузей.

Розв'язання. Знайдемо елементи технологічної матриці A – коефіцієнти прямих витрат $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$. Отримуємо:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07; \; a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14; \; a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12;$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10.$$

Технологічна матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність:

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12 = 0,19 < 1, \; a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24 < 1.$$

Отже, матриця A є продуктивною і для довільного вектору Y кінцевого споживання можна знайти вектор валового виробництва X, що забезпечує даний вектор кінцевого споживання. Знайдемо вектор X за формулою (3.7): $X = (E - A)^{-1} Y$

Вектор Y кінцевого споживання має вигляд:

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $B = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,14) \cdot (-0,12) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор X валового виробництва:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j,\ i = 1,2;\ j = 1,2,\ x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47;\ x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05.$$

Умовно чисту продукцію галузей визначаємо за формулою: $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$, $j = 1,2$. Маємо:

$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99$ (грошових одиниць);

$z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98$ (грошових одиниць).

Задача 1. Діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, на протязі останнього року характеризується наступними даними, наведеними у таблиці (в умовних грошових одиницях). Знайти технологічну матрицю A цієї економічної системи.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Валовий обсяг виробництва
	A	B	
A	100	160	500
B	275	40	400

Розв’язання. Елементи a_{ij} матриці A дорівнюють кількості продукції i-ї галузі, що витрачається на виробництво одиниці продукції j-ї галузі. Отримуємо:

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0,2;\ a_{12} = \frac{160}{400} = 0,4;\ a_{21} = \frac{275}{500} = 0,55;\ a_{22} = \frac{40}{400} = 0,1.$$

Тоді $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}$.

27. З'ясувати, чи є продуктивною технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$. (Відповідь. Так.)

Задача 2. У таблиці наведено дані міжгалузевого балансу за звітний період у умовних грошових одиницях. Знайти необхідний обсяг валового виробництва для кожної галузі, якщо за планом кінцеве споживання у енергетиці повинно збільшитися у 2 рази, а у машинобудуванні рівень кінцевого споживання повинен зрости на 20%.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Фактичне кінцеве споживання	Валовий обсяг виробництва
	Енергетика	Машинобудування		
Енергетика	100	160	240	500
Машинобудування	275	40	85	400

(Відповідь. $X^T = \begin{pmatrix} 945,6 & 691,2 \end{pmatrix}$).

Задача 3. Задано технологічну матрицю (матрицю прямих витрат) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$. Знайти: а) вектор валового виробництва X, що забезпечує планове кінцеве споживання $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приріст ΔX валового виробництва, що забезпечує збільшення кінцевого споживання на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

(Відповідь. а) $X = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$; б) $\Delta X = \begin{pmatrix} 184 \\ 132 \end{pmatrix}$.)

Задача 4. На плановий період відомі наведені у таблиці коефіцієнти прямих витрат та величина кінцевого споживання у промисловості, сільському господарстві та інших галузях. Знайти обсяги валового виробництва продукції у галузях та міжгалузеві постачання.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцеве споживання (у.г.о.)
	Промисловість	Сільське господарство	Інші галузі	
Промисловість	0,3	0,25	0,2	56
Сільське господарство	0,15	0,12	0,03	20
Інші галузі	0,1	0,05	0,08	12

(Відповідь. $X=\begin{pmatrix}102,2\\41,0\\26,4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}30,7 & 10,3 & 5,3\\15,3 & 4,9 & 0,8\\10,2 & 2,1 & 2,1\end{pmatrix}$.)

Задача 5. Чистою продукцією галузі називають різницю між її валовою продукцією та продукцією всіх галузей, витраченою на виробництво у даній галузі. В умовах попередньої задачі знайти чисту продукцію для промисловості, сільського господарства та інших галузей.

(Відповідь. $\begin{pmatrix}46,0 & 23,7 & 18,2\end{pmatrix}$.)

Задача 6. У таблиці наведено дані про діяльність економічної системи, що складається з двх галузей, а також план виробництва продукції для кінцевого споживання Y_1 у майбутньому періоді (в у.г.о.). Знайти матриці прямих та повних витрат, а також обсяг валового виробництва продукції у плановому періоді, що забезпечує виробництво продукції кінцевого споживання Y.

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Чиста продукція	План кінцевого споживання, Y
	A	B		
A	80	120	300	350
B	70	30	200	300

(Відповідь. $A=\begin{pmatrix}0,16 & 0,4\\0,14 & 0,1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}1,29 & 0,57\\0,20 & 1,20\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}622,5\\430,0\end{pmatrix}$.)

Задача 7. Дана технологічна матриця A та вектор кінцевого споживання Y для економічної системи з трьох галузей. Знайти 1) коефіцієнти повних витрат; 2) вектор валового виробництва; 3) міжгалузеві поставки; 4) перевірити продуктивність матриці A.

$$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) Елементи матриці $B=\left(E-A\right)^{-1}$ називають коефіцієнтів повних матеріальних витрат. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції у *i*-ї галузі для забезпечення виробництва необхідної для кінцевого споживання продукції *j*-ї галузі.

$$B=\begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,864 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix}=\left(E-A\right)^{-1}.$$

2) Вектор валового обсягу виробництва по галузі:

$$X=\begin{pmatrix} 775,51 \\ 510,20 \\ 729,59 \end{pmatrix}=BY.$$

3)Міжгалузеві постачання $c_{ij}=a_{ij}x_j$:

$$\left[C\right]=\begin{pmatrix} 232,65 & 51,02 & 291,8 \\ 155,1 & 255,1 & 0,0 \\ 232,65 & 51,02 & 145,92 \end{pmatrix}.$$

4) Всі елементи матриці B є невід’ємними, тому матриця A є продуктивною.