6. Диференціальні та різницеві моделі у економічних дослідженнях

6.1 Диференціальна модель насичення ринку

Побудуємо модель насичення ринку продукцією деякого підприємства. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва цієї продукції у момент часу t. Будемо вважати, що зі збільшенням виробництва відбувається насичення ринку цією продукцією і її ціна $p(y)$ зменшується за лінійним законом:

$$p(y) = b - ay, a > 0, b > 0.$$

Швидкість зміни обсягів виробництва прямо пропорційна доходу підприємства від реалізації виробленої продукції з коефіцієнтом пропорційності k:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot p(y) \cdot y = k(b - ay)y. \qquad (6.1)$$

Розв'яжемо це диференціальне рівняння, розділивши змінні:

$$\frac{dy}{y(b - ay)} = k \cdot dt.$$

Інтегруючи ліву частину цього рівняння за змінною y, а праву – за змінною t, отримаємо:

$$y(t) = \frac{b \cdot Ce^{bkt}}{a(Ce^{bkt} - 1)}.$$

Графіком отриманої функції $y(t)$ є так звана *логістична крива*. При $t \to +\infty$ $y(t) \to \frac{b}{a}$.

Модель (6.1) є диференціальною, оскільки вона виражається диференціальним рівнянням. До диференціальної моделі виду (6.1) зводиться *модель Золотаса* динаміки рівня суспільного добробуту, яка описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dW}{dy} = kW(A - W), \qquad (6.2)$$

де W – рівень суспільного добробуту, $k > 0$, $A > 0$ – відомі сталі, y – доход на душу населення. Рівняння (6.2) називають *рівнянням Ферхюльста-Перла*. Його розв'язком є логістична крива $W(y) = \frac{A}{1 + Be^{-Aky}}$, де B – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови $W(0) = W_0$.

6.2 Модель природного зростання виробництва продукції

Побудуємо модель динаміки виробництва деякого виду продукції, що продається на ринку за фіксованою ціною p. Нехай $q(t)$ – кількість продукції, реалізованої на ринку на момент часу t. Тоді на цей момент величина доходу підприємства складає $p \cdot q(t)$.Частина цього доходу, $J(t) = mpq(t)$ витрачається на модернізацію та розширення виробництва ($m = \text{const}$ – норма інвестицій, $0 < m < 1$). Якщо вироблена продукція реалізується повністю, то внаслідок розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого знову буде спрямована на розширення виробництва. Нехай швидкість зміни обсягу виробництва прямо пропорційна збільшенню інвестицій. Тоді для знаходження $q(t)$ отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dq}{dt} = \alpha \cdot J(t) = \alpha \cdot mp \cdot q(t), \tag{6.3}$$

де $\alpha = \text{const}$ – коефіцієнт пропорціональності, $k = \alpha \cdot m \cdot p$ – стала величина. Розділивши у отриманому рівнянні змінні, знаходимо: $\frac{dq}{q} = \alpha \cdot dt$. Звідси після інтегрування отримуємо: $q(t) = Ce^{kt}$, де C – стала інтегрування. Її визначають з початкової умови: $q(0) = q_0$. Звідси знаходимо, що $q(t) = q_0 e^{kt}$.

6.3 Моделі динаміки ринкової ціни та виробничих фондів

У моделі динаміки ринкової ціни товару встановлюється зв'язок між зміною ціни $p(t)$ та незадоволеним попитом $d(p) - s(p)$, $d(p) = a - bp$ – величина попиту, $s(p) = \alpha + \beta p$ – величина пропозиції товару за ціною $p(t)$, $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – відомі сталі. Вважається, що швидкість зміни ціни пропорційна незадоволеному попиту з коефіцієнтом пропорційності $k > 0$:

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot \big(d(p) - s(p)\big).$$

Підставивши у цей вираз лінійні залежності для попиту $d(p)$ та пропозиції $s(p)$, отримаємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dp}{dt} + k(b + \beta)p = k(a - \alpha).$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$p(t) = C \cdot e^{-k(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

При $t \to \infty$ $p(t) \to \frac{a - \alpha}{b + \beta}$.

Отримаємо диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів на підприємстві. Нехай K – вартість основних виробничих фондів підприємства, μ – коефіцієнт їхнього вибуття, тобто за рік фонди зменшуються на величину μK. Вважаючи, що вибуття виробничих фондів відбувається рівномірно, отримаємо, що за час Δt вони зменшаться на величину $\mu K \cdot \Delta t$. Сталі інвестиції у обсязі J за рік збільшують за час Δt величину фондів на $\rho J \cdot \Delta t$, де $\rho = \text{const}$. Отже, отримуємо рівність:

$$K(t+\Delta t)=K(t)-\mu K\cdot\Delta t+\rho J\cdot\Delta t,$$

звідки

$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=\rho J-\mu K.$$

Перейшовши у останній рівності до границі при $\Delta t\to 0$, отримуємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $K(t)$:

$$\frac{dK}{dt}=\rho J-\mu K.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$K(t)=C\cdot e^{-\mu t}+\frac{\rho J}{\mu}, \tag{6.4}$$

де C – стала інтегрування. Рівність (6.4) характеризує динаміку основних виробничих фондів підприємства. Сталу C визначають з початкової умови $K(0)=K_0$. Тоді $C=K_0-\frac{\rho J}{\mu}$ і рівність (6.4) набуває вигляду:

$$K(t)=\left(K_0-\frac{\rho J}{\mu}\right)\cdot e^{-\mu t}+\frac{\rho J}{\mu}.$$

6.4 Модель економічного зростання Солоу

Нехай $X=F(K,L)$ – виробнича функція деякої економічної системи, X – обсяг виробництва, K – вартість основних виробничих фондів, L – витрати на оплату праці. Далі розглянемо випадок, коли виробнича функція є функцією Кобба – Дугласа: $X=K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}$.

У *моделі Солоу* вважається, що швидкість зміни факторів виробництва K та L має вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{dK}{dt}=s\cdot X,\\ \dfrac{dL}{dt}=\lambda\cdot L,\end{cases} \tag{6.5}$$

де s – частка накопичення у доході X від реалізованої продукції, λ – темп зростання оплати праці.

Нехай $k=\frac{K}{L}$. Тоді виробнича функція Кобба-Дугласа набуває вигляду:

$$X=K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}=L\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=L\cdot k^{\alpha}. \tag{6.6}$$

Підставивши (6.6) у перше з рівнянь системи (6.5), отримаємо:

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^{\alpha}.$$

Враховуючи, що $K = kL$, з останнього рівняння з врахуванням другого рівняння системи (6.5), знаходимо:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(k \cdot L)}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k \cdot \lambda L.$$

Звідси отримуємо, що $\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^{\alpha} = L\frac{dk}{dt} + k\lambda L$ або

$$\frac{dk}{dt} + \lambda k = s \cdot k^{\alpha}. \qquad (6.7)$$

Рівняння (6.7) є рівнянням Бернуллі. Інтегруючи його за допомогою підстановки $k = u(t) \cdot v(t)$, знаходимо загальний розв'язок (6.7) у вигляді

$$k(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{s}{\lambda}e^{\lambda(1-\alpha)t} + C_1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Отже, знайдено відношення факторів виробництва у момент часу t. Сталу інтегрування C_1 визначають з початкової умови $k(0) = \frac{K(0)}{L(0)} = k_0$.

6.5 Основні поняття та означення теорії різницевих рівнянь

Різницевим оператором Δ називають оператор, що переводить послідовність x_n у послідовність y_n за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ n = 1, 2, \ldots. \qquad (6.8)$$

Вираз Δx_n називають *різницею першого порядку*.

Різницевим рівнянням називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. *Розв'язком різницевого рівняння* називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеве рівняння для довільного натурального n отримуємо тотожність.

Різницею другого порядку називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n. \qquad (6.9)$$

Оскільки $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$, то

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \qquad (6.10)$$

За індукцією можна визначити *різницю m-го порядку*:

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1}x_{n+1} - \Delta^{m-1}x_n. \qquad (6.11)$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу:

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k} C_m^k x_{n+k}. \qquad (6.12)$$

Виконується також рівність:

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \Delta^k x_n . \qquad (6.13)$$

У формулах (6.12) та (6.13) $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Лінійним різницевим рівнянням називають рівняння виду

$$a_0(n)\Delta^m x_n + a_1(n)\Delta^{m-1} x_n + \ldots + a_m(n) x_n = f(n), \qquad (6.14)$$

де x_n – невідома послідовність, $a_0, a_1, \ldots, a_m, f$ – задані функції натурального аргументу n. Число m (старший порядок різниці) називають *порядком різницевого рівняння*. Використовуючи формулу (6.12), лінійне різницеве рівняння можна записати у вигляді:

$$c_0(n) x_{n+m} + c_1(n) x_{n+m-1} + \ldots + c_m(n) x_n = f(n). \qquad (6.15)$$

Якщо $f(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ то рівняння (6.14) або (6.15) називають *лінійним однорідним різницевим рівнянням* m*-го порядку*.

Розглянемо різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b, \qquad (6.16)$$

де y_n, y_{n+1} – члени невідомої числової послідовності.

Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь, тому математичні моделі, у яких використовуються різницеві рівняння, відносяться до дискретних моделей. Методи розв'язання лінійних різницевих рівнянь аналогічні методам розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

Загальний розв'язок рівняння (6.16) будемо шукати у вигляді: $y_n = y_n^{\circ} + y_n^{*}$, де y_n° – загальний розв'язок відповідного однорідного різницевого рівняння $f(n) = 0$, y_n^{*} – частинний розв'язок заданого неоднорідного різницевого рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння y_n° шукаємо у вигляді: $y_n^{\circ} = C \cdot \lambda^n$, де C – довільна стала. Підставивши y_n° у рівняння $y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$, знаходимо:

$$C \cdot \left(\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n\right) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a .$$

Тут λ фактично є коренем характеристичного рівняння $\lambda + a = 0$, отриманого аналогічно такому рівнянню для диференціального рівняння $y' + ay = 0$ (у різницевому рівнянні y_{n+m} замінюємо на λ^m). Отже, $y_n^{\circ} = C \cdot (-a)^n$.

Частинний розв'язок y_n^{*} неоднорідного різницевого рівняння (6.16) шукаємо за виглядом його правої частини $f(n)$. Оскільки у даному випадку $f(n) = b = \text{const}$, то $y_n^{*} = A = \text{const}$. Знайдемо сталу A, підставивши $y_n^{*} = A$ у рівняння. Маємо:

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = y_n^{*}.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок різницевого рівняння (6.16) у вигляді:

$$y_n = y_n^{\circ} + y_n^{*} = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a}.$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має вигляд:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = b. \tag{6.17}$$

Тут p, q та b – задані сталі.

Структура загального розв'язку рівняння (6.17) також визначається рівністю $y_n = y_n^\circ + y_n^*$. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Можливими є наступні випадки.

1. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_n^\circ = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$.

2. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^o = (C_1 n + C_2) \cdot \lambda^n$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді маємо:

$$y_n^\circ = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right),\ \varphi = \arg(\lambda_2).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.17) у відповідності до його правої частини шукаємо у вигляді: $y_n^* = B = \text{const}$. Підставивши y_n^* у рівняння, знаходимо: $B + pB + qB = b$, звідки $B = \dfrac{b}{1 + p + q}$. Отже, розв'язком рівняння (6.17) є послідовність $y_n = y_n^\circ + \dfrac{b}{1 + p + q}$, де y_n° визначається у залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Прикладом економіко-математичної моделі, що приводиться до розв'язання лінійного різницевого рівняння, є так звана *павутиноподібна модель ринку*.

Нехай деяке виробниче підприємство визначає пропозицію свого товару у поточному періоді на основі цін, що склалися у попередньому періоді: $s_n = s(p_{n-1})$. Попит на товар залежить від ціни товару у поточному періоді: $d_n = d(p_n)$. Будемо вважати функції попиту та пропозиції лінійними, тобто

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1},\ d_n = a - b \cdot p_n,\ a > m > 0,\ l > 0,\ b > 0.$$

Знайдемо ціну рівноваги з умови $d_n = s_n$. Тоді $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$. Замінивши номер ($n - 1$)-го члена послідовності на n, отримуємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку відносно ціни p_n:

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

Розв'язком цього лінійного різницевого рівняння є послідовність

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{l}{b}\right)^n + \frac{a - m}{b + l}.$$

З отриманого розв'язку випливає, що при $l < b$ $p_n \to p_0 = \dfrac{a - m}{b + l}$, якщо $n \to \infty$. Це значення p_0 є ціною рівноваги для даного товару. Якщо $l > b$, то з часом ціна p_n буде віддалятися від ціни рівноваги p_0. Для випадку $l = b$ спостерігаємо циклічні коливання ціни p_n у n-му періоді часу відносно значення p_0.

Лінійною називають систему різницевих рівнянь відносно m невідомих послідовностей $x_{1,n}$, $x_{2,n},\dots,x_{m,n}$ (n – номер члена послідовності):

$$\begin{cases} x_{1,n+1}=a_{11}x_{1,n}+a_{12}x_{2,n}+\ldots+a_{1m}x_{m,n}+f_1(n), \\ x_{2,n+1}=a_{21}x_{1,n}+a_{22}x_{2,n}+\ldots+a_{2m}x_{m,n}+f_2(n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{m,n+1}=a_{m1}x_{1,n}+a_{m2}x_{2,n}+\ldots+a_{mm}x_{m,n}+f_m(n). \end{cases} \tag{6.18}$$

Перейдемо до матричних позначень:

$$X_n=\begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \dots \\ x_{m,n} \end{pmatrix},\ B_n=\begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \dots\dots\dots \\ f_m(n) \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (6.18) можна записати у матричній формі:

$$X_{n+1}=A\cdot X_n+B_n. \tag{6.19}$$

Загальний розв’язок системи (6.19) будемо шукати у вигляді: $X_n=X_n^o+\tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв’язок відповідної однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв’язок (6.19). Для розв’язання лінійної однорідної системи різницевих рівнянь використовують *метод Ейлера*, згідно з яким фундаментальну систему розв’язків системи $X_{n+1}=A\cdot X_n$ шукають серед векторних послідовностей виду $X_n=D\cdot\lambda^n$, де D – деякий вектор. Підставивши $X_n=D\cdot\lambda^n$ у матричну рівність $X_{n+1}=A\cdot X_n$, отримуємо:

$$D\cdot\lambda^{n+1}=A\cdot D\cdot\lambda^n, \tag{6.20}$$

звідки знаходимо, що $A\cdot D=\lambda\cdot D$. Це означає, що векторна послідовність $X_n=D\cdot\lambda^n$ є розв’язком лінійної однорідної системи різницевих рівнянь $X_{n+1}=A\cdot X_n$ тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням матриці A, а D – відповідним йому власним вектором.

Власні значення матриці A визначаються як корені многочлена $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$, де E – одинична матриця. Цей многочлен називають характеристичним многочленом для системи різницевих рівнянь (6.19), а рівняння $P(\lambda)=0$ – її характеристичним рівнянням.

Якщо всі власні значення $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ матриці A є дійсними і різними (всі корені характеристичного рівняння дійсні та прості), то фундаментальну систему розв’язків утворюють векторні послідовності $D_1\lambda_1^n$, $D_2\lambda_2^n$, …, $D_m\lambda_m^n$. Тут D_i – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_i, $i=1,2,\dots,m$. Загальний розв’язок лінійної однорідної системи різницевих рівнянь у цьому випадку має вигляд:

$$X_n^\circ=C_1D_1\lambda_1^n+C_2D_2\lambda_2^n+\ldots+C_mD_m\lambda_m^n.$$

6.6 Динамічна модель Леонтьєва

У моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу $X=AX+Y$, розглянутій раніше, всі її елементи вважалися сталими, середніми за деякий період часу. На практиці обсяг виробництва у період часу $n+1$ визначається значеннями X_n та Y_n, що були досягнуті у періоді n. Тому розглядається динамічна модель Леонтьєва у вигляді:

$$X_{n+1} = AX_n + Y_n. \tag{6.21}$$

Матричне рівняння (6.21) є системою n лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі: для заданого вектора кінцевого споживання Y_n та матриці прямих витрат A визначити вектор валового виробництва X_n.

Приклад 6.1 Визначити вектор валового виробництва X_n у динамічній моделі Леонтьєва, якщо технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, вектор кінцевого споживання $Y_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок системи $X_{n+1} = AX_n + Y_n$ лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді $X_n = X_n^\circ + X_n^*$, де X_n° – загальний розв'язок однорідної системи, X_n^* – частинний розв'язок заданої системи. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,3 \\ 0,3 & 0,2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 0,5$. Знайдемо відповідні власні вектори. При $\lambda_1 = -0,1$ отримуємо рівняння для координат α_1 та α_2 власного вектора:

$$0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0,$$

звідки $\alpha_1 = -\alpha_2$, наприклад, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$.

Для $\lambda_2 = 0,5$ маємо:

$$-0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0.$$

Звідси отримуємо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Отже, власні вектори $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$X_n^\circ = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n,$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Частинний розв'язок заданої системи будемо шукати за виглядом правої частини цієї системи: $X_n^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, $X_{n+1}^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1}$. Підставивши ці вирази у задану неоднорідну систему, отримуємо:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\cdot 2^{n+1}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\cdot 2^n+\begin{pmatrix}2^n\\ 2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2\alpha_1+0,3\alpha_2+1\\ 0,3\alpha_1+0,2\alpha_2+1\end{pmatrix}\cdot 2^n .$$

Після скорочення обох частин цієї рівності на 2^n, отримуємо систему рівнянь відносно α_1 та α_2:

$$\begin{cases}2\alpha_1=0,2\alpha_1+0,3\alpha_2+1,\\ 2\alpha_2=0,3\alpha_1+0,2\alpha_2+1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1,8\alpha_1+0,3\alpha_2=-1,\\ 0,3\alpha_1-1,8\alpha_2=-1.\end{cases}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\frac{2}{3}.$$

Отже, $X_n^*=\begin{pmatrix}2/3\\ 2/3\end{pmatrix}\cdot 2^n$, загальний розв'язок системи (вектор валового виробництва) X_n у розглянутій динамічній моделі Леонтьєва матиме вигляд:

$$X_n=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cdot(-0,1)^n+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cdot(0,5)^n+\begin{pmatrix}2/3\\ 2/3\end{pmatrix}\cdot 2^n .$$

Значення сталих C_1 та C_2 можна знайти, знаючи вектор валового виробництва у перші два роки.

6.7 Модель Самуельсона-Хікса

Модель Самуельсона-Хікса – це динамічна модель, у якій економічний цикл розглядається як наслідок взаємодії національного доходу, споживання та накопичення капіталу. Основне припущення моделі полягає у тому, що попит d у момент часу $t=n+1$ лінійно залежить від величини національного доходу y у попередній момент часу $t=n$:

$$d_{n+1}=ay_n+b .$$

Модель Самуельсона-Хікса можна подати у вигляді лінійного неоднорідного різницевого рівняння другого порядку

$$y_{n+2}=(a+\alpha)y_{n+1}-\alpha y_n+b, \tag{6.22}$$

де $\alpha>0$ – акселератор або темп приросту капіталомісткості національного доходу.

Загальний розв'язок рівняння (6.22) будемо шукати у вигляді суми частинного розв'язку y_n^* неоднорідного рівняння та загального розв'язку y_n° відповідного однорідного рівняння: $y_n=y_n^\circ+y_n^*$. Частинний розв'язок (6.22) шукаємо у вигляді сталої $y_n^*=A$, яку визначаємо шляхом підстановки у рівняння:

$$A-(a+\alpha)A+\alpha A-b=0 .$$

Звідси знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.22):

$$y_n^*=\frac{b}{1-a}.$$

Характеристичне рівняння для (6.22) має вигляд:

$$\lambda^2-(a+\alpha)\lambda+\alpha=0 .$$

Вигляд розв'язку однорідного рівняння залежить від знаку дискримінанта для характеристичного рівняння.

Приклад 6.2 Використовуючи модель Самуельсона-Хікса, визначити динаміку зростання національного доходу y_n, якщо для даної національної економіки параметри моделі $a=\alpha=0,5; b=5$, у початкові періоди часу $n=0$ та $n=1$ національний доход становив відповідно $y_0=10$ г.о., $y_1=20$ г.о.

Розв'язання. Підставивши параметри моделі у різницеве рівняння (6.22), отримаємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+2}-y_{n+1}+0,5y_n=5.$$

Запишемо та розв'яжемо відповідне характеристичне квадратне рівняння:

$$\lambda^2-\lambda+0,5=0.$$

Його дискримінант дорівнює $-1<0$, рівняння має пару комплексних коренів

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}.\ \lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{i}{2},\ |\lambda_2|=|\lambda_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \arg\lambda_2=\frac{\pi}{4},$$

тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y_n^{\circ}=\left(|\lambda_2|\right)^n\left(C_1\cos\left(n\arg\lambda_2\right)+C_2\sin\left(n\arg\lambda_2\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді невідомої константи: $y_n^*=A$. Підставивши цю сталу у рівняння, отримаємо:

$$A-A+0,5A=5\Rightarrow A=10=y_n^*.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_n=y_n^{\circ}+y_n^*=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right)+5.$$

Значення сталих C_1 та C_2 знайдемо, використовуючи початкові умови $y_0=10$, $y_1=20$. При $n=0$ та $n=1$ відповідно отримуємо:

$$y_0=C_1+5=10\Rightarrow C_1=5,\ y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5\cos\frac{\pi}{4}+C_2\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}+\frac{C_2}{2}=20\Rightarrow C_2=35.$$

Отже, вираз для залежності величини національного доходу y_n від часу n, що моделює динаміку національного доходу, має вигляд:

$$y_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(5\cos\frac{n\pi}{4}+35\sin\frac{n\pi}{4}\right)+5.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які математичні моделі називають диференціальними?

2. Надайте означення диференціального рівняння.
3. Що називають порядком диференціального рівняння?
4. Вкажіть основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
5. Наведіть приклади лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.
6. У чому полягає модель насичення ринку товаром?
7. Наведіть рівняння логістичної кривої.
8. Що описує модель Золотаса?
9. Наведіть рівняння Ферхюльста-Перла.
10. У чому полягає модель природного зростання виробництва продукції?
11. Охарактеризуйте сутність диференціальної моделі динаміки ринкової ціни.
12. Для чого використовують диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів?
13. У чому полягає модель Солоу?
14. Вкажіть основні припущення моделі Солоу.

2. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Залежність ціни товару від обсягу виробництва має вигляд: $p(y)=b-ay$, $a>0$, $b>0$. Швидкість зростання обсягу виробництва є зростаючою функцією прибутку. Валові виробничі витрати описуються залежністю $c(y)=\alpha y+\beta$, $\alpha>0$, $\beta>0$. Побудувати диференціальну модель для знаходження залежності обсягу виробництва продукції від часу t. (Відповідь. $\frac{dy}{dt}=k\left(p(y)\cdot y-c(y)\right)$.)
3. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=-2$.
4. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=-1$ і при $y=2$ ціна $p=10$.
5. Знайти функцію, що має сталу еластичність k.
6. Знайти функцію попиту $y=y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y)=\frac{y-100}{y}$, $p=10$ при $y=90$, $0<y<100$.
7. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу у кожний даний момент часу пропорційна його фактичній вартості $A(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $k=\text{const}$. Початкова вартість обладнання $A(0)=A_0$. Визначити фактичну вартість обладнання у момент часу t.
8. Знайти обсяг реалізованої продукції за час $t=10$ днів, якщо модель зростання обсягів реалізації в умовах конкурентного ринку має вигляд: $\frac{dy}{dt}=y(2-y)$, $y(0)=1$.
9. Швидкість зростання інвестиційного капіталу у момент часу t пропорційна величині капіталу з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює процентній ставці

r. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції.

10. Ціна товару $p(t)$ є функцією часу, функції попиту d та пропозиції s лінійно залежать від ціни, швидкості її зміни $p'(t)$ та темпу $p''(t)$. При цьому $d(p) = p'' - p' - 2p + 480$, $s(p) = 2p'' + 3p' + 3p + 80$. Знайти динаміку зміни ціни $p(t)$ в умовах ринкової рівноваги $\left(d(p) = s(p)\right)$, якщо у початковий момент часу $t = 0$ ціна товару дорівнювала 120 г.о., а швидкість її зміни дорівнювала 40.
11. Наведіть означення різниць першого, другого та m-го порядків.
12. Наведіть означення різницевого рівняння.
13. Наведіть загальний вигляд лінійного різницевого рівняння.
14. Надайте означення порядку різницевого рівняння.
15. Які лінійні різницеві рівняння називають однорідними?
16. Наведіть характеристичне рівняння для загального вигляду лінійного різницевого рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
17. У чому полягає павутиноподібна модель ринку?
18. У чому полягає метод Ейлера розв’язання систем лінійних різницевих рівнянь?
19. Висвітліть зміст динамічної моделі Леонтьєва.
20. У чому полягає сутність моделі Самуельсона-Хікса?
21. Записавши різницеве рівняння для геометричної прогресії, знайти формулу її загального члена b_n.
22. Знайти загальний розв'язок рівняння $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.
23. Числа Фібоначчі визначаються співвідношенням $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$. Знайти формулу n-го члена послідовності.
24. Розв’язати рівняння $2y_n - y_{n+1} = 1 + 2n - n^2$, $y_1 = 1$.
25. Знайти загальний розв’язок системи різницевих рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

26. Зростання процентного депозиту з регулярними щорічними внесками A та річною ставкою p, де $0 < p < 1$, описується різницевим рівнянням $x_{n+1} = (1+p)x_n + A$. Знайти суму депозиту x_n у момент часу n, якщо початковий внесок дорівнював x_0 г.о.
27. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \to \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p: а) $d(p_n) = 11 - p_n$, $s(p_{n-1}) = 1 + 4p_{n-1}$, $p = 2$; б) $d(p_n) = 5 - 1{,}2p_n$, $s(p_{n-1}) = 1 + 0{,}8p_{n-1}$, $p = 4$.
28. Знайти динаміку зростання національного доходу за моделлю Самуельсона-Хікса

$y_{n+2} = (a+\alpha) y_{n+1} - \alpha y_n + b$, якщо: а) $a = \alpha = 0{,}5$; $b = 8$; $y_0 = 5$ г.о., $y_1 = 6$ г.о.; б) $a = 0{,}5$; $\alpha = 3$; $b = 0$; $y_0 = 10$ г.о., $y_1 = 12$ г.о.