# 8. Макроекономічні виробничі функції

## 8.1 Поняття виробничої функції

*Виробничою функцією* називають функцію, що устанавлює взаємозв'язок між факторами виробництва (працею та капіталом) та його результатом на певному рівні економічної діяльності (підприємство, ринок, галузь, економіка).

Нехай $X$ – обсяг виробництва у економічній системі, що є об'єктом дослідження, $K$ – основний капітал (інвестиції у засоби виробництва), $L$ – витрати праці. Діяльність цієї економічної системи можна описати з допомогою виробничої функції $X = F(K,L)$, яка у загальному випадку є нелінійною.

Виробничу функцію $X = F(K,L)$ називають *неокласичною*, якщо вона є диференційовною та задовольняє наступні умови:

1) $F(0,L) = F(K,0) = 0$ – при відсутності хоча б одного з факторів виробництва (праці чи капіталу) виробництво є неможливим;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ – зростання обсягів виробництва супроводжується зростанням витрат ресурсів;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ – при збільшенні витрат ресурсів швидкість зростання виробництва сповільнюється;

4) $\lim\limits_{K\to+\infty} F(K,L) = \lim\limits_{L\to+\infty} F(K,L) = +\infty$ – при необмеженому зростанні одного з факторів виробництва обсяг виробництва необмежено зростає;

Виробничу функцію виду

$$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} \tag{8.1}$$

називають *мультиплікативною виробничою функцією*.

Коефіцієнт $A$ у (3.1) називають *коефіцієнтом нейтрального технічного прогресу*, $\alpha_1 > 0$ та $\alpha_2 > 0$ – *коефіцієнти еластичності відповідно за капіталом* та *за працею*.

Окремим випадком мультиплікативної виробничої функції є виробнича функція Кобба-Дугласа:

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \tag{8.2}$$

## 8.2 Характеристики виробничої функції

Частинні похідні виробничої функції $X = F\left(K, L\right)$ за аргументами $K$ та $L$ називають *граничними ефективностями факторів виробництва*. Вони дорівнюють приросту обсягу виробництва на одиницю приросту відповідного фактора виробництва, капіталу (виробничих фондів) чи праці.

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial K}$ – *гранична ефективність виробничих фондів* (*гранична фондовіддача*).

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial L}$ – *гранична продуктивність праці*.

Для мультиплікативної виробничої функції гранична фондовіддача $\frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}$, середня фондовіддача $\frac{X}{K} = A \cdot K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2}$. Таким чином, гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі з коефіцієнтом пропорційності $\alpha_1$. Аналогічно можна показати, що гранична продуктивність праці пропорційна середній продуктивності праці з коефіцієнтом пропорційності $\alpha_2$. Маємо:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_1 \frac{X}{L}. \tag{8.3}$$

З рівностей (3.3) випливає, що при $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ граничні віддачі факторів менші, ніж середні.

При $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ для мультиплікативної виробничої функції виконується третя умова неокласичної функції: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, тобто зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача зменшується. Можна довести, що мультиплікативна виробнича функція має й інші властивості неокласичної функції, тобто вона є неокласичною.

Розглянемо економічну інтерпретацію параметрів $A$, $\alpha_1$ та $\alpha_2$ мультиплікативної виробничої функції (3.1). Коефіцієнт $A > 0$ нейтрального технічного прогресу залежить від рівня розвитку технологій у конкретній економічній системі. Коефіцієнт $\alpha_1$ еластичності виробництва за капіталом показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість виробничих фондів зросла на 1%, коефіцієнт $\alpha_2$ еластичності виробництва за працею показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість витрат на оплату праці зросла на 1%.

Для обчислення $\alpha_1$ та $\alpha_2$ можна використати формулу (8.2), згідно з якою маємо:

$$\alpha_1 = \frac{\partial\left(\ln X\right)}{\partial\left(\ln K\right)\right)} = \alpha_K,\ \alpha_2 = \frac{\partial\left(\ln X\right)}{\partial\left(\ln L\right)\right)} = \alpha_L.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то зростання виробництва є інтенсивним, при $\alpha_1 < \alpha_2$ спостерігається екстенсивне зростання.

Розглянемо темп зростання обсягу виробництва у період часу $t+1$ порівняно з періодом часу $t$:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}.$$

Якщо піднести обидві частини цієї рівності до степеня $\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}$, то будемо мати:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Ввівши позначення $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = 1-\alpha$, отримаємо:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}. \tag{8.4}$$

У правій частині рівності (3.4) маємо зважену середню геометричну темпів зростання витрат ресурсів, де ваговими коефіцієнтами $\alpha$ та $1-\alpha$ є відносні коефіцієнти еластичності факторів $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$ та $\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$.

При $\alpha_1+\alpha_2 > 1$ обсяг виробництва зростає швидше, ніж у середньому зростають фактори виробництва:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

тобто темп зростання виробництва більший, ніж середній темп зростання факторів. Отже, при $\alpha_1+\alpha_2 > 1$ виробнича функція характеризує зростаючу економічну систему.

*Ізоквантою* виробничої функції $X = F\left(K, L\right)$ називають лінію рівня цієї функції на координатній площині $OKL$. Отже, рівняння ізокванти має вигляд:

$$F\left(K, L\right) = X_0 = \text{const}.$$

Для мультиплікативної виробничої функції рівняння ізокванти має вигляд:

$$A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const}.$$

Звідси знаходимо:

$$K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A \cdot L^{\alpha_2}} = \frac{X_0}{A} L^{-\alpha_2} \Rightarrow K = \left(\frac{X_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} L^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = C \cdot L^{-\lambda},\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Отримали рівняння гіперболи, асимптотами якої є осі координат.

Для різних значень $K$ та $L$, розташованих на одній ізокванті, обсяг виробництва є сталим, тобто тут ресурси $K$ та $L$ заміняють один одного.

Оскільки на ізокванті $F\left(K, L\right) = X_0 = \text{const}$, то на цій кривій маємо:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0. \qquad (8.5)$$

Частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$, тому у рівності (8.5) диференціали $dK$ та $dL$ мають різні знаки. Якщо $dL < 0$, тобто скорочуються витрати праці, то для збереження виробництва на сталому рівні потрібно, щоб витрати капіталу $dK > 0$. Зменшення витрат праці на величину $\left|dL\right|$ повинно компенсуватися збільшенням інвестицій у виробничі фонди на величину $\left|dK\right|$.

Відношення модулів диференціалів факторів виробництва називають граничною нормою заміщення одного фактора іншим:

$s_K = \frac{\left|dK\right|}{\left|dL\right|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}$ – гранична норма заміщення праці капіталом;

$s_L = \frac{\left|dL\right|}{\left|dK\right|} = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}$ – гранична норма заміщення капіталу працею.

При цьому $s_K \cdot s_L = 1$.

Знайдемо граничні норми заміщення для мультиплікативної виробничої функції.

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2 - 1},\ \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}.$$

Тоді $s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{K}{L}$, $s_L = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L}{K}$.

Лінії найбільшого зростання виробничої функції називають її *ізокліналями*. Оскільки напрям найбільшого зростання функції збігається з напрямом її градієнта, а градієнт функції є ортогональним до її ліній рівня, то ізокліналі виробничої функції є ортогональними до її ізоквант.

Градієнт виробничої функції $\operatorname{grad} X = \left( \frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L} \right)$, то рівняння ізокліналі у диференціальній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}. \tag{8.6}$$

Знайдемо ізокліналі мультиплікативної виробничої функції. Підставивши вирази для частинних похідних

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2 - 1} = \alpha_2 \cdot \frac{X}{L},\ \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1 \cdot \frac{X}{K}$$

у (8.6), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{K \cdot dK}{\alpha_1} = \frac{L \cdot dL}{\alpha_2}.$$

Інтегруючи ліву частину рівняння за змінною $K$, а праву частину – за змінною $L$, отримуємо рівняння ізокліналей у вигляді:

$$\frac{K^2}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L^2}{2} + C \Leftrightarrow K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a},$$

де $a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$, $\left( K_0, L_0 \right)$ – координати точки, через яку проходить ізокліналь.

При $a = 0$ рівняння ізокліналі – це рівняння прямої $K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot L$.

Перейдемо у мультиплікативній виробничій функції до безрозмірних величин. Нехай $X_0$, $K_0$, $L_0$ – значення обсягу виробництва та витрат ресурсів (виробничих факторів) у базовому році. Тоді мультиплікативну виробничу функцію у відносних показниках можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{X}{X_0} = \left( \frac{K}{K_0} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{L}{L_0} \right)^{\alpha_2}. \tag{8.7}$$

Позначимо $\frac{X}{X_0} = \tilde{X}$, $\frac{K}{K_0} = \tilde{K}$, $\frac{L}{L_0} = \tilde{L}$. Тоді рівність (3.7) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2}. \tag{8.8}$$

Знайдемо ефективність економічної системи, діяльність якої описується виробничою функцією (8.8). Під *ефективністю* розуміють відношення результату до витрат, понесених на його отримання. У виробничій функції присутні два види витрат: витрати праці $\tilde{L}$ та витрати капіталу $\tilde{K}$. У відповідності з цим розрізняють два частинних показники ефективності: $\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ –

*фондовіддача*; $\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ *– продуктивність праці*.

Узагальненим показником економічної ефективності є зважена середня геометрична частинних показників, яку називають *коефіцієнтом економічної ефективності*:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \qquad (8.9)$$

де $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Вагові коефіцієнти $\alpha$ та $1-\alpha$ називають *відносними еластичностями*.

За допомогою коефіцієнта економічної ефективності виробничу функцію (8.8) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = E \cdot \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \qquad (8.10)$$

У (3.10) коефіцієнт $E$ не є сталою величиною: $E = E\left(\tilde{K}, \tilde{L}\right)$.

Під *масштабом виробництва* $M$ розуміють середню величину витрачених ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \qquad (8.11)$$

З (8.10) та (8.11) випливає, що обсяг виробництва $\tilde{X}$ дорівнює добутку коефіцієнта економічної ефективності на масштаб виробництва.

### 8.3 Однорідні виробничі функції.

Виробничу функцію $X = F\left(K, L\right)$ називають *однорідною виробничою функцією_степеня* $\gamma$, якщо

$$F\left(\lambda K, \lambda L\right) = \lambda^{\gamma} F\left(K, L\right). \qquad (8.12)$$

Наприклад, мультиплікативна виробнича функція є однорідною виробничою функцією степеня $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, оскільки

$$F\left(\lambda K, \lambda L\right) = A\lambda^{\alpha_1} K^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} F\left(K, L\right).$$

Отримаємо вираз для граничної норми $s_K$ заміщення праці капіталом для однорідної виробничої функції. У цьому випадку $F\left(K, L\right) = L^{\gamma} \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^{\gamma} f\left(k\right)$, де $k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність, $f\left(k\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial L}$ та $\frac{\partial F}{\partial K}$. Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, знаходимо:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma \cdot L^{\gamma-1} f(k) - L^{\gamma} f'(k) \cdot \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1}\big(\gamma f(k) - k \cdot f'(k)\big),$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\gamma} \cdot f'(k) \cdot \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k).$$

Отже, гранична норма заміщення праці капіталом має вигляд:

$$s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k. \qquad (8.13)$$

Таким чином, гранична норма $s_K$ заміщення праці капіталом є функцією лише фондоозброєності.

Для однорідних виробничих функцій вводиться поняття еластичності заміщення праці капіталом:

$$\sigma_K = \frac{dk / k}{ds_K / s_K}. \qquad (8.14)$$

Ця величина вказує, на скільки % потрібно змінити фондоозброєність, щоб досягти зміни граничної норми заміщення праці капіталом на 1%. Аналогічно вводиться поняття еластичності $\sigma_L$ заміщення капіталу працею. Можна показати, що $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$.

Покажемо, що для мультиплікативних виробничих функцій $\sigma = 1$. У цьому випадку обсяг виробництва

$$X = F(K,L) = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K},\ \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L},\ s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k,\ k = \frac{K}{L},\ \frac{ds_K}{dk} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\sigma_K = \frac{dk}{k} \cdot \frac{s_k}{ds_K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1.$$

Виробничі функції, для яких еластичність заміщення є сталою ($\sigma = \text{const}$), називають $CES$-функціями.

Оскільки у цьому випадку $\sigma = \frac{dk / k}{ds / s} = \text{const}$, то маємо: $\frac{ds}{s} = \frac{dk}{\sigma \cdot k} \Rightarrow \ln s = \frac{1}{\sigma} \ln k + \ln C$. З останньої рівності знаходимо, що гранична норма заміщення у даному випадку має вигляд: $s = C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}}$, де $C$ – стала.

Підставивши отриманий вираз для $s$ у (8.13), знайдемо вираз для $CES$-функції. Маємо: $C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k$. Звідси знаходимо, що $\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\sigma}} + k}$.

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, отримуємо ($C_1$ – стала інтегрування):

$$\ln f = \frac{\gamma\sigma}{\sigma - 1}\ln\left( C_1\left( C + k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)\right).$$

Звідси вираз для $f(k)$ має вигляд:

$$f(k) = C_1\left( k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, $f = \frac{X}{L^{\gamma}}$, знаходимо вираз для виробничої $CES$-функції у вигляді:

$$X = C_1\left( K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Ввівши позначення $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, $\frac{1}{C+1} = \alpha < 1$, $C_1(C+1)^{-\frac{1}{\rho}} = A$, отримуємо вираз для $CES$-функції через $K$ та $L$ у вигляді:

$$X = F(K,L) = A\cdot\left(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}}. \qquad (8.15)$$

При $\gamma = 1$ та $\sigma \to 1$ $CES$-функція прямує до виробничої функції Кобба-Дугласа.

Крім розглянутої мультиплікативної виробничої функції у економічних дослідженнях часто зустрічаються *лінійна виробнича функція* $X = A\cdot K + B\cdot L$, а також *виробнича функція типу «витрати-випуск»* $X = \min\left\{\frac{K}{A}, \frac{L}{B}\right\}$, де $A$ та $B$ – відомі константи.

Увівши у мультиплікативну виробничу функцію множник $e^{\lambda t}$, де $\lambda$ – темп зростання функції за рахунок інтенсивних факторів (вдосконалення технології, підвищення кваліфікації працівників тощо), отримуємо *виробничу функцію_Тінбергена*: $X = A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}\cdot e^{\lambda t}$. При дослідженнях впливу факторів виробництва на його обсяг зустрічаються також інші типи виробничих функцій.

Використавши апарат виробничих функцій, можна оцінити ефективність виробництва та вдосконалити процес планування виробничої діяльності.