Приклад 7.1. У деякій галузі 4 підприємства випускають 3 види продукції. У матриці $A(4\times3)$ задано обсяги виробництва продукції на кожному заводі у першому кварталі, у матриці $B(4\times3)$ – у другому кварталі. Знайти: а) обсяги виробництва продукції кожного виду за перше півріччя; б) приріст обсягів виробництва продукції у першому кварталі порівняно з другим кварталом, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&3&7\\1&2&2\\4&1&5\\2&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&4&1\\4&3&2\\5&2&4\end{pmatrix}.$$

(Відповідь. а) $A+B$; б) $B-A$.)

Приклад 7.2. Підприємство виробляє 3 види продукції. Його виробнича програма характеризується вектором $A=\begin{pmatrix}100&200&100\end{pmatrix}$. Ціна реалізації одиниці продукції i-го типу у j-му регіоні задана матрицею $B(3\times4)$, де b_{ij} – ціна реалізації продукції i-го типу у j-му регіоні. Знайти матрицю C виручки підприємства по регіонам, якщо

$$B=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}.$$

(Відповідь. $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}600&1300&700&1300\end{pmatrix}$).

Приклад 7.3. Підприємство виробляє 3 типи продукції, використовуючи 4 види ресурсів. Норми витрат i-го типу ресурсів на виробництво одиниці j-го виду продукції задані у матриці витрат $A(4\times3)$. Вектор X визначає обсяги виробництва продукції кожного типу. Визначити матрицю S повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}100&80&110\end{pmatrix}.$$

(Відповідь. $S = A \cdot X^T = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}$.)

Приклад 7.4. Для виробництва 4 видів продукції підприємство використовує 3 види ресурсів. Витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, запас ресурсів кожного виду та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені у таблиці. Побудувати економіко-математичну модель для розробки оптимального плану виробництва продукції.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції				Запас ресурсів
	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	
Сировина	3	5	2	4	60
Робочий час	22	14	18	30	400
Час роботи обладнання	10	14	8	16	128
Прибуток, у.г.о.	30	25	8	16	

Розв'язання. Нехай x_i – запланований обсяг виробництва i-го товару, $i = 1, 2, 3, 4$. Потрібно побудувати оптимальний план виробництва продукції, що максимізує прибуток підприємства. Цільова функція задачі має вигляд:

$$f = 30x_1 + 25x_2 + 8x_3 + 16x_4 \to \max .$$

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \le 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \le 128, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 7.5. На двох автоматичних лініях виготовляють вироби трьох типів, дані про які наведено у таблиці. Побудувати математичну модель завантаження автоматичних ліній, що мінімізує загальні витрати. План повинен бути виконаний не пізніше, ніж за 15 діб.

Виріб	Продуктивність лінії, од./добу		Витрати на роботу ліній, у.г.о./добу		План, од.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Розв'язання. Нехай x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} – відповідно кількість виробів A, B та C, що виготовляються на i-й лінії, $i=1,2$. Цільовою функцією задачі є мінімум витрат:

$$z = 400x_{11} + 300x_{12} + 100x_{21} + 200x_{22} + 700x_{31} + 400x_{32} \to \min .$$

Обмеження на змінні моделі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 50, \\ x_{21} + x_{22} = 40, \\ x_{31} + x_{32} = 50, \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{21}}{6} + \dfrac{x_{31}}{8} \le 15, \\ \dfrac{x_{12}}{3} + \dfrac{x_{22}}{5} + \dfrac{x_{32}}{2} \le 15, \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,3; j = 1,2. \end{cases}$$

Приклад 7.6. На обробку надійшла партія з 150 дошок, довжина кожної з яких дорівнює 7,5м, для виготовлення комплектів з 4 дошок. Кожний комплект складається з 1 дошки довжиною 3м, 2 дошок довжиною 2м та 1 дошки довжиною 1,5м. Скласти план розпилювання дошок, що максимізує кількість їх комплектів.

Розв'язання. Всі можливі спсоби розпилювання дошок представимо у вигляді матриці A, елементи якої a_{ij} дорівнюють кількості дошок j-го типу, отриманих внаслідок розпилювання i-м способом. При цьому вважаємо, що дошка довжиною 3м – це дошка 1-го типу, дошка довжиною 2м – дошка 2-го типу, довжиною 1,5м – 3-го типу. Транспонована матриця A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Нехай x_i – кількість дошок, розпиляних i-м способом, $i = 1,2,...,8$, b_k – кількість дошок k-го типу у комплекті, $\overline{x} = \left(x_1\ x_2\ ...\ x_8\right)$, $\overline{b} = \left(b_1\ b_2\ b_3\right) = \left(1\ \ 2\ \ 1\right)$, c – кількість комплектів. Обмеження моделі мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 150,\ \overline{x} \cdot A = c \cdot \overline{b} = \left(c \quad 2c \quad c\right).$$

Цільова функція $z = c \to \max$.

Приклад 7.7. Раціон для харчування корів на фермі складається з 2 видів кормів: A та B. Один кілограм корму A коштує 80 г.о. та містить 1 одиницю жирів, 3 одиниці білків, 1 одиницю вуглеводнів, 2 одиниці нітратів. Один кілограм корму B коштує 10 у.г.о. та містить 3 одиниці жирів, 1 одиницю білків, 8 одиниць вуглеводнів та 4 одиниці нітратів. Побудувати модель для визначення найдешевшого раціону, що містить не менше 6 одиниць жирів, 9 одиниць білків, 8 одиниць вуглеводнів та не більше 16 одиниць нітратів.

Розв'язання. Нехай x_1 – кількість кормів A у раціоні, x_2 – кількість кормів B. Цільова функція виражає вартість раціону:

$$z = 80x_1 + 10x_2 \to \min .$$

Обмеження на змінні моделі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 8x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$