3.1 Алгоритм застосування принципу максимуму

Алгоритм застосування принципу максимуму для задачі оптимального програмного керування складається з наступних етапів:

1. Скласти функцію Гамільтона

$$H\left(t,\bar{\psi},\bar{x},\bar{u}\right)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j f_j\left(t,\bar{x},\bar{u}\right)-f_0\left(t,\bar{x},\bar{u}\right). \tag{3.1}$$

2. З умови максимуму функції Гамільтона по всім допустимим керуванням знайти оптимальне програмне керування $\bar{u}^*\left(t\right)$.

3. Скласти систему канонічних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_i\left(t\right)=\dfrac{\partial H}{\partial \psi_i}=f_i\left(t,\bar{x}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right), \\ \dot{\psi}_i\left(t\right)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i=1,2,...,n. \end{cases} \tag{3.2}$$

4. З умови трансверсальності (2.28) отримуємо відсутні крайові умови для рівнянь (3.2). При цьому варіації $\delta t_0, \delta t_1, \delta x_{j0}, \delta x_{j1},\ j=1,2,...,n$, повинні задовольняти систему (2.29). Варіації δg та δh_j визначаються за формулами:

$$\delta g_1=\frac{\partial g}{\partial t_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\delta x_{i1},\ \delta g_0=\frac{\partial g}{\partial t_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\delta x_{i0}, \tag{3.3}$$

$$\delta h_j=\frac{\partial h_j}{\partial t_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_j}{\partial x_{i0}}\delta x_{i0}+\frac{\partial h_j}{\partial t_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_j}{\partial x_{i1}}\delta x_{i1}. \tag{3.4}$$

5. Розв'язати отриману крайову задачу для системи канонічних рівнянь (3.2), визначити $\overline{u}^*(t)$, $\overline{x}^*(t)$, за необхідності t_0^*, t_1^*.

Приклад 2.1. Задано модель об'єкта керування $\dot{x} = u(t)$, $x(0) = 0$, $x(1) = \frac{1}{2}$ з функціоналом якості $I = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right)dt \to \min$. Знайти оптимальне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$, на яких досягається мінімум функціонала якості.

Розв'язання. Запишемо функцію Гамільтона. $f_0 = x^2 + u^2$, $f_1 = u$, $g_1 = g_0 = 0$. $H = \psi_1 f_1 - f_0 = \psi_1 u - x^2 - u^2$. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню u, якщо обмеження на керування відсутні.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - 2u = 0 \Rightarrow u^* = \frac{\psi_1}{2}.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$, то u^* надає максимум по керуванню функції Гамільтона. Запишемо систему канонічних рівнянь (3.2).

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1 = u, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\psi_1}{2}, \\ \dot{\psi}_1 = 2x. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її, звівши до одного рівняння. Диференціюючи перше з рівнянь системи по t, отримуємо:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1 = x.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 1$. Розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = C_1 \mathrm{ch}t + C_2 \mathrm{sh}t$. З заданих крайових умов знаходимо:

$$x(0) = C_1 = 0,\ x(1) = C_2 \mathrm{sh}1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2\mathrm{sh}1}.$$

Отже, $x = x^* = \dfrac{\mathrm{sh}t}{2\mathrm{sh}1}$, $u = u^* = \dot{x}^* = \dfrac{\mathrm{ch}t}{2\mathrm{sh}1}$. Оскільки поведінка об'єкта керування моделювалася лінійним диференціальним рівнянням, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимальності. Тому знайдені фазова траєкторія та керування є оптимальними.

Відповідь: $x^* = \dfrac{\mathrm{sh}t}{2\mathrm{sh}1}$, $u^* = \dfrac{\mathrm{ch}t}{2\mathrm{sh}1}$.

<u>Приклад 2.2.</u> Модель об'єкта керування має вигляд: $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(t_1) = t_1 - 1$, $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{t_1} u^2 dt + 4x(t_1) \to \min$. Знайти оптимальне керування та оптимальну фазову траєкторію.

Розв'язання. Оскільки функціонал якості містить інтегральний та термінальний члени, то маємо задачу Больца. Функція Гамільтона для задачі має вигляд:

$$H = \psi_1 f_1 - f_0 = \psi_1 u - \frac{u^2}{2}.$$

Знайдемо максимум цієї функції по керуванню u.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - u = 0 \Rightarrow u^* = \psi_1,\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1 < 0\,.$$

У точці $u^* = \psi_1$ досягається максимум. Канонічні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = u = \psi_1, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = C \\ \dot{x} = C \end{cases} \Rightarrow x(t) = Ct + A.$$

З крайової умови $x(0) = 1$ знаходимо:

$$x(0) = A = 1 \Rightarrow x(t) = Ct + 1.$$

Запишемо для даної задачі умову трансверсальності (2.28). Вона має наступний вигляд:

$$\delta g_1(t_1) - H(t_1)\delta t_1 + \psi_1 \delta x_1 = 0\,.$$

Тут функція Гамільтона $H(t_1) = \left.\left(\psi_1 u - \dfrac{u^2}{2}\right)\right|_{t=t_1} = C^2 - \dfrac{C^2}{2} = \dfrac{C^2}{2}$. За формулами (3.3) $\delta g_1(t_1) = 4\delta x_1$. Тоді умова трансверсальності набуває вигляду:

$$4\delta x_1 - \frac{C^2}{2}\delta t_1 + C\delta x_1 = 0 \Rightarrow (4 + C)\delta x_1 - \frac{C^2}{2}\delta t_1 = 0\,.$$

Зв'язок між величинами δx_1 та δt_1 знаходимо, використовуючи умови на рухомій межі $t = t_1$:

$$x_1 - t_1 + 1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 - \delta t_1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 = \delta t_1.$$

Отже, з умови трансверсальності отримуємо:

$$\left(4 + C - \frac{C^2}{2}\right)\delta t_1 = 0 \Rightarrow 4 + C - \frac{C^2}{2} = 0 \Rightarrow C^2 - 2C - 8 = 0.$$

Коренями останнього квадратного рівняння є значення $C_1 = -4$, $C_2 = -2$. Нехай $C = -2$. Тоді $x(t) = x^*(t) = 1 - 2t, u = u^* = -2$. Значення t_1^* знаходимо з умови перетину кривої $x(t_1) = t_1 - 1$, по якій рухається гранична точка, та фазової траєкторії у точці $t = t_1$:

$$t_1 - 1 = 1 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = \frac{2}{3}.$$

Розглянемо випадок, коли $C = 4$. Отримуємо:

$$x(t) = x^*(t_1) = 4t + 1, u(t) = u^*(t) = \dot{x}^* = 4,$$

$$t_1 - 1 = 4t_1 + 1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = -\frac{2}{3} < 0.$$

Оскільки $t_1 > 0$, то при $C = 4$ задача не має розв’язку.

Відповідь: $x^*(t) = 1 - 2t, u^* = -2$, $t \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

3.2 Оптимальне керування лінійними системами

Розглянемо об'єкт керування, модель якого подається у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t) \cdot \overline{x}(t) + B(t) \cdot \overline{u}(t), \tag{3.5}$$

де $\overline{x}^T = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$, $\overline{u}^T = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\right)$, $A(t), B(t)$ – матриці, порядок яких відповідно дорівнює $n \times n$ та $m \times m$, їх елементи є неперервними на $\left[t_0, t_1\right]$ функціями, моменти t_0 та t_1 початку та завершення процесу керування відомі, обмеження на керування $\overline{u}(t)$ відсутні, права межа $\overline{x}(t_1)$ фазової траєкторії вільна. Початкова умова $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 = \left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\right)$ задана та визначає початковий стан системи.

Функціонал якості є квадратичним:

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\overline{x}^T(t) S(t) \overline{x}(t) + \overline{u}^T Q(t) \overline{u}(t)\right) dt + \frac{1}{2}\left[\overline{x}^T(t_1) P \overline{x}(t_1)\right], \tag{3.6}$$

де S та P – невід'ємно визначені симетричні матриці порядку $n \times n$, $Q(t)$ – додатно визначена симетрична матриця порядку $m \times m$.

Потрібно знайти оптимальне керування $\overline{u}^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $\overline{x}^*(t)$, на яких функціонал (3.6) досягає мінімуму.

Порівнюючи сформульовану задачу з загальною постановкою задачі оптимального керування, маємо:

$$\overline{f} = A(t) \cdot \overline{x}(t) + B(t) \cdot \overline{u}(t), \;\; f_0 = \overline{x}^T(t) S(t) \overline{x}(t) + \overline{u}^T Q(t) \overline{u}(t),$$

$$g_1\left(\overline{x}(t_1)\right) = g\left(\overline{x}(t_1)\right) = \frac{1}{2}\left[\overline{x}^T(t_1) P \overline{x}(t_1)\right].$$

Застосуємо до сформульованої задачі оптимального керування лінійними системами (3.5), (3.6) принцип максимуму. При цьому використаємо відомі формули матричного числення:

1) $\frac{\partial\left(A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}=A^T$; 2) $\frac{\partial\left(\overline{x}^T A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}=A\overline{x}+A^T\overline{x}$; 3) $\left(AB\right)^T=B^T A^T$.

Згідно з алгоритмом принципу максимуму виконуємо наступні кроки.

1. Складемо функцію Гамільтона:

$$H\left(t,\overline{\psi},\overline{x},\overline{u}\right)=\overline{\psi}^T\left(A\overline{x}+B\overline{u}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x}+\overline{u}^T Q\overline{u}\right).$$

2. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню. Оскільки обмеження на керування відсутні, то застосуємо необхідну умову безумовного екстремуму:

$$\frac{\partial H}{\partial\overline{u}}=B^T\overline{\psi}-\frac{1}{2}Q\overline{u}-\frac{1}{2}Q^T\overline{u}=0.$$

Враховуючи, що матриця Q є симетричною і $Q=Q^T$, з останньої рівності отримуємо:

$$B^T\overline{\psi}-Q\overline{u}=0\Rightarrow\overline{u}=\overline{u}^*=Q^{-1}B^T\overline{\psi}. \qquad (3.7)$$

Знайдене керування забезпечує максимум функції Гамільтона по керуванню $\overline{u}$, оскільки $\frac{\partial^2 H}{\partial\overline{u}^2}=-Q$ – від’ємно визначена матриця (матриця Q визначена додатно).

3. Запишемо умову трансверсальності. Оскільки час t_1 заданий, а фазовий вектор $\overline{x}(t_1)$ є вільним, то $\delta t_1 = 0$, $\delta \overline{x}(t_1)$ може набувати довільних значень. Отримуємо:

$$g(\overline{x}) = \frac{1}{2}\overline{x}^T P \overline{x}, \delta g = \left[\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}\right]^T \delta \overline{x} = \overline{x}^T P \delta \overline{x} .$$

Умова трансверсальності набуває вигляду:

$$\left[\overline{x}^T P + \overline{\psi}^T\right]\Big|_{t=t_1} \cdot \delta \overline{x}(t_1) = 0 .$$

Оскільки $\delta \overline{x}(t_1)$ є довільним і $(AB)^T = B^T A^T$, то отримуємо рівність:

$$\overline{\psi}(t_1) = -P\overline{x}(t_1). \tag{3.8}$$

4. Запишемо систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + B\overline{u}, \\ \dfrac{d\overline{\psi}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \overline{x}} = -A\overline{\psi} + S\overline{x}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Фазовий вектор $\overline{x}$ повинен у початковий момент часу задовольняти умову:

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 . \tag{3.10}$$

Отже, використовуючи принцип максимуму, отримали крайову задачу у вигляді системи (3.9) та крайових умов (3. 8), (3.10).

<u>Приклад 2.3</u> Записати крайову задачу для задачі оптимального керування лінійною системою:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_3 - u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + 3u_{2,} \end{cases} \qquad \bar{x}(0) = (0,1,2),$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 \right) dt +$$

$$+2x_1^2(2) + x_2^2(2) + 3x_3^2(2) + 2x_1(2)x_2(2) + 4x_1(2)x_3(2) \to \min.$$

Розв'язання. Запишемо матриці A, B, S, Q, P для рівнянь (3.8) – (3.10).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Підставивши ці матриці у канонічну систему рівнянь (3.9), отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\psi_1}{dt} \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} \\ \dfrac{d\psi_3}{dt} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

При $t=0$ маємо $\left(x_1(0), x_2(0), x_3(0)\right)=(0,1,2)$, умови трансверсальності на рухомій межі $t=2$ мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(2) \\ \psi_2(2) \\ \psi_3(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{pmatrix}.$$