5. Синтез оптимальних лінійних регуляторів

Нехай стан об'єкта керування моделюється системою

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}(t) + C(t)\overline{u}(t). \quad (5.1)$$

У (5.1) $A(n \times n), C(n \times m)$ – матриці, елементами яких є неперервні функції, $\overline{x}^T = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $\overline{u}^T = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$, обмеження на керування $\overline{u}$ відсутні.

Досліджується на екстремум квадратичний функціонал якості

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(\overline{x}^T S\overline{x} + \overline{u}^T Q\overline{u}\right) dt + \frac{1}{2}\overline{x}^T(t_1) P\overline{x}(t_1). \quad (5.2)$$

Тут S та P – невід'ємно означені симетричні матриці розміру $(n \times n)$, Q – додатно означена симетрична матриця розміру $(m \times m)$. Потрібно знайти оптимальне керування $\overline{u}^*(x,t)$ з повним зворотним зв'язком.

Поставлену задачу називають **задачею синтезу оптимального лінійного регулятора.** Її розв'язують методом динамічного програмування.

Введемо позначення:

$$\overline{f}(t, \overline{x}, \overline{u}) = A\overline{x} + C\overline{u}, \; f_0(t, \overline{x}, \overline{u}) = \frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x} + \overline{u}^T Q\overline{u}\right), \; g(\overline{x}) = \frac{1}{2}\overline{x}^T P\overline{x}.$$

Далі будемо використовувати наступні формули:

$$\frac{\partial\left(A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}=A^T; \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{x}^T A\overline{x}\right)}{\partial\overline{x}}=A\overline{x}+A^T\overline{x}; \tag{5.4}$$

$$\overline{x}^T A\overline{x}=0\Leftrightarrow A+A^T=\left[0\right]. \tag{5.5}$$

У останній формулі $\left[0\right]$ – нульова матриця.

Рівняння Беллмана для задачі синтезу оптимального лінійного регулятора набуває вигляду:

$$\max_{\overline{u}}\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)^T\left(A\overline{x}+C\overline{u}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x}+\overline{u}^T Q\overline{u}\right)\right)=0. \tag{5.6}$$

Тут $\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}=\left(\frac{\partial B}{\partial x_1},\frac{\partial B}{\partial x_2},...,\frac{\partial B}{\partial x_n}\right)$. Крайова умова для розв’язку рівняння (5.6):

$$B\left(t_1,\overline{x}\left(t_1\right)\right)=-\frac{1}{2}\overline{x}^T\left(t_1\right)P\overline{x}\left(t_1\right). \tag{5.7}$$

З рівняння (5.7) визначимо $\overline{u}^*$, що надає максимум виразу

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)^T\left(A\overline{x}+C\overline{u}\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x}+\overline{u}^T Q\overline{u}\right).$$

Продиференціюємо цей вираз по $\overline{u}$ і прирівняємо отриману похідну до нуля. Отримуємо:

$$C^T \frac{\partial B}{\partial \overline{x}} - \frac{1}{2}\left(Q + Q^T\right)\overline{u} = \overline{0} \Rightarrow \left(Q + Q^T\right)\overline{u} = 2C^T \left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}}\right).$$

З останньої рівності, враховуючи симетрію матриці Q, знаходимо:

$$\overline{u}^* = Q^{-1} C^T \frac{\partial B}{\partial \overline{x}}. \qquad (5.8)$$

Підставивши (5.8) у (5.6), отримаємо рівняння відносно невідомої функції Беллмана:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}}\right)^T \left(A\overline{x} + CQ^{-1}C^T \frac{\partial B}{\partial \overline{x}}\right) - \frac{1}{2}\overline{x}^T S \overline{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial \overline{x}}\right)^T CQ^{-1}QQ^{-1}C^T = 0.$$

Розв’язок цього рівняння шукаємо у вигляді:

$$B\left(t, \overline{x}\right) = \frac{1}{2}\overline{x}^T K\left(t\right)\overline{x}. \qquad (5.9)$$

Підставивши (5.9) у отримане рівняння, знайдемо рівняння відносно невідомої функціональної матриці K. Воно є **матричним рівнянням Ріккаті:**

$$\frac{dK}{dt} = -A^T K - KA - KCQ^{-1}C^T K + S, \qquad (5.10)$$

$$K\left(t_1\right) = -P. \qquad (5.11)$$

Розв’язавши матричне диференціальне рівняння (5.10) з крайовою умовою (5.11), знаходимо матрицю $K\left(t\right)$. Підставивши її у (5.9) і далі у (5.8), отримуємо явний вигляд оптимального керування $\overline{u}^*$ з повним зворотним зв’язком або **оптимального лінійного регулятора**

$$\overline{u}^*(t,\overline{x}) = Q^{-1}C^T K\overline{x}. \qquad (5.12)$$

<u>Приклад 5.1.</u> Для задачі оптимального керування $\dot{x} = -x + u$, $x(0) = x_0$, $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}x^2(1)$ знайти оптимальний лінійний регулятор $\overline{u}^*(t,\overline{x})$.

Розв'язання. Запишемо матричне рівняння Ріккаті. Оскільки у нашому випадку функції $x(t), u(t)$ є скалярними величинами, то рівняння Ріккаті є скалярним, а не векторним. Тут $A = -1, C = 1, Q = 1, S = 0, P = 1, t_0 = 0, t_1 = 1$.

Рівняння Ріккаті та відповідна крайова умова набувають вигляду:

$$\frac{dK}{dt} = K + K - K^2 = 2K - K^2,\ K(1) = -1.$$

Отримали диференціальне рівняння, у якому можна розділити змінні. З нього знаходимо:

$$dt = \frac{dK}{2K - K^2} \Rightarrow \ln\left|\frac{K-2}{K}\right| = C_1 - 2t \Rightarrow \frac{2}{K} = 1 - e^{C_1 - 2t} \Rightarrow K = \frac{2}{1 - e^{C_1 - 2t}}.$$

Для знаходження сталої інтегрування C_1 використаємо умову $K(1) = -1$. З отриманого рівняння $-1 = \frac{2}{1 - e^{C_1 - 2}}$ знаходимо, що $C_1 = 2 + \ln 3$. Отже, розв'язок рівняння Ріккаті має вигляд:

$$K(t) = \frac{2}{1 - 3e^{2-2t}}.$$

Оптимальне керування з повним зворотним зв'язком або оптимальний лінійний регулятор знаходимо за формулою (5.12):

$$u^*(t,x) = Q^{-1}C^T Kx = \frac{2x}{1-3e^{2-2t}}.$$

Знайдемо оптимальну фазову траєкторію та оптимальне програмне керування, що породжуються отриманим лінійним регулятором $u^*(t,x)$ для різних початкових станів $x(0) = x_0$.

Рівняння моделі об'єкта керування набуває вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{2x}{1-3e^{2-2t}}.$$

Після поділу змінних у отриманому рівнянні та подальшого інтегрування отримуємо його загальний розв'язок:

$$x(t) = \frac{D\left(3e^{2-2t}-1\right)}{e^{1-t}}.$$

З врахуванням початкової умови $x(0) = x_0$ знаходимо відповідне значення сталої D:

$$D = \frac{x_0 e}{3e^2 - 1}.$$

Отже, оптимальна фазова траєкторія $x^*(t)$ та відповідний лінійний регулятор $u^*(t)$ мають вигляд:

$$x^*(t)=\frac{3x_0D\left(3e^{2-2t}-1\right)}{\left(3e^2-1\right)e^{1-t}},\ u^*=\frac{2x^*(t)}{1-3e^{2(1-t)}}=-\frac{2x_0e^t}{3e^2-1}.$$

<u>Приклад 5.2.</u> Для задачі оптимального керування $\dot{x}_1=u$, $\dot{x}_2=x_1$, $I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2dt+\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right)\to\min$ побудувати матричне рівняння Ріккаті та записати його у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розв'язання. Матричне рівняння Ріккаті має вигляд:

$$\frac{dK}{dt}=-A^T\cdot K-K\cdot A-K\cdot C\cdot Q^{-1}\cdot C^T\cdot K+S,\ K(t_1)=-P.$$

Тут $\overline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{12}&k_{22}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $Q=1$, $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Підставивши ці матриці та вектори у матричне рівняння Ріккаті, отримуємо:

$$\frac{dK}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dk_{11}}{dt}&\frac{dk_{12}}{dt}\\\frac{dk_{12}}{dt}&\frac{dk_{22}}{dt}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{12}&k_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{12}&k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-$$
$$-\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{12}&k_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{12}&k_{22}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}k_{11}^2+2k_{12}&k_{12}k_{11}+k_{22}\\k_{22}+k_{12}k_{11}&k_{12}^2\end{pmatrix}.$$

Отримане матричне рівняння у скалярній формі набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dk_{11}}{dt} = -2k_{12} - k_{11}^2, \\ \dfrac{dk_{12}}{dt} = -k_{22} - k_{12}k_{11}, \\ \dfrac{dk_{22}}{dt} = -k_{12}^2. \end{cases}$$

При $t = 2$ маємо:

$$k_{11}(2) = k_{22}(2) = -1, k_{12}(2) = 0.$$

Для полегшення обчислювальної праці при розв'язанні матричного рівняння Ріккаті замість матриці K можна використовувати матрицю $R = -K$. Продиференціюємо по t рівність $R(t) \cdot R^{-1}(t) = E$. Отримаємо рівність:

$$\frac{dR}{dt} \cdot R^{-1} + R \cdot \frac{dR^{-1}}{dt} = [0].$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{dR^{-1}}{dt} = -R^{-1} \cdot \frac{dR}{dt} \cdot R^{-1}. \tag{5.13}$$

З матричного рівняння Ріккаті (5.10) маємо:

$$\frac{dR}{dt} = -\dot{K} = -A^T \cdot R - R \cdot A + R \cdot C \cdot Q^{-1} \cdot C^T \cdot R - S.$$

Підставляючи цей вираз у (5.13), з врахуванням умови (5.11) знаходимо:

$$\begin{cases} \dfrac{dR^{-1}}{dt} = R^{-1} \cdot A^T + A \cdot R^{-1} - C \cdot Q^{-1} \cdot C^T + R^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}, \\ R^{-1}(t_1) = P^{-1}. \end{cases} \tag{5.14}$$

Оптимальне керування має вигляд:

$$\overline{u}^*(t, \overline{x}) = -Q^{-1} \cdot C^T \cdot R \cdot \overline{x}, \tag{5.15}$$

мінімум функціонала якості:

$$\min I = \frac{1}{2} \overline{x}_0^T \cdot R(t_0) \cdot \overline{x}_0. \tag{5.16}$$

З (5.14) отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{G} = G \cdot A^T + A \cdot G - C \cdot Q^{-1} \cdot C^T + G \cdot S \cdot G, \\ G(t_1) = P^{-1}. \end{cases} \tag{5.17}$$

$G(t)$ є симетричною матрицею. Після її знаходження з (5.17) визначають матрицю $R(t) = G^{-1}(t)$, далі знаходять матрицю $F(t) = Q^{-1} \cdot C^T \cdot R$ та оптимальне керування з повним зворотним зв'язком $\overline{u}^*(t, \overline{x}) = -F(t) \cdot \overline{x}$.

Приклад 5.3. Об'єкт керування визначається моделлю: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$. Функціонал якості має вигляд: $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}\overline{x}^T(1) \cdot P \cdot \overline{x}(1) \to \min$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$. Знайти оптимальне керування $u^*(t, \overline{x})$ з повним зворотним зв'язком.

Розв’язання. Для даної задачі $\overline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q=1$.

Запишемо систему (5.17). $G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$. Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \dot{g}_{11} & \dot{g}_{12} \\ \dot{g}_{12} & \dot{g}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} g_{12} & 0 \\ g_{22} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_{12} & g_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2g_{12} & g_{22} \\ g_{22} & -1 \end{pmatrix}.$$

Додаткові умови при $t=1$:

$$G(1)=\begin{pmatrix} g_{11}(1) & g_{12}(1) \\ g_{12}(1) & g_{22}(1) \end{pmatrix}=P^{-1}=2\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{g}_{11}=2g_{12}, \\ \dot{g}_{12}=g_{22}, \\ \dot{g}_{22}=-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{22}=A_1-t, \\ g_{12}=A_1t-\dfrac{t^2}{2}+A_2, \\ g_{11}=A_1t^2-\dfrac{t^3}{3}+A_2t+A_3. \end{cases}$$

Значення сталих A_1, A_2, A_3 знаходимо з умов при $t=1$:

$$\begin{cases} g_{22}(1) = A_1 = 2, \\ g_{12}(1) = 2 - \dfrac{1}{2} + A_2 = 0, \\ g_{11}(1) = 2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} + A_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2, \\ A_2 = -\dfrac{3}{2}, \\ A_3 = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Отже, матриця $G(t)$ має вигляд:

$$G(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{t^3}{3} + 2t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{5}{6} & -\dfrac{t^2}{2} + 2t - \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{t^2}{2} + 2t - \dfrac{3}{2} & 2 - t \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця $G^{-1}(t) = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$

$$\Delta = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = \left(-\frac{t^3}{3} + 2t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{6}\right)(2 - t) - \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - \frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{t^4 - 8t^3 + 26t - 7}{12}.$$

$$R(t) = G^{-1}(t) = \frac{1}{t^4 - 8t^3 + 26t - 7}\begin{pmatrix} 12(2 - t) & 6(t^2 - 4t + 3) \\ 6(t^2 - 4t + 3) & 2(-2t^3 + 12t^2 - 9t + 5) \end{pmatrix}.$$

$$F(t) = Q^{-1} \cdot C^T \cdot R(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{t^4 - 8t^3 + 26t - 7} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 12(2 - t) & 6(t^2 - 4t + 3) \\ 6(t^2 - 4t + 3) & 2(-2t^3 + 12t^2 - 9t + 5) \end{pmatrix} = \frac{1}{t^4 - 8t^3 + 26t - 7} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 6(t^2 - 4t + 3) & 2(-2t^3 + 12t^2 - 9t + 5) \end{pmatrix}.$$

Оптимальне керування з повним зворотним зв’язком $u^*\left(t,\overline{x}\right)=-F\left(t\right)\cdot\overline{x}$ набуває вигляду:

$$u^*\left(t,x_1,x_2\right)=-\frac{6\left(t^2-4t+3\right)x_1+2\left(-2t^3+12t^2-9t+5\right)x_2}{t^4-8t^3+26t-7}.$$