6. 1. Задача оптимальної стабілізації

Нехай диференціальна модель об'єкта керування має вигляд:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{F}\left(t, \overline{x}, \overline{u}\right) \tag{6.1}$$

при заданому керуванні $\overline{u} = \overline{u}\left(t\right)$ та заданій початковій умові $\overline{x}\left(t_0\right) = \overline{x}_0$, а відповідна фазова траєкторія записана у формі: $\overline{x} = \overline{\xi}\left(t\right)$. Цей рух об'єкта керування будемо називати **незбуреним рухом**.

Задача стабілізації незбуреного руху $\overline{x} = \overline{\xi}\left(t\right)$ полягає у виборі такого відхилення (поправки) керування $\Delta\overline{u}\left(t\right) = \overline{v}\left(t\right) - \overline{u}\left(t\right)$, для якого рух $\eta\left(t\right)$, що відповідає керуванню $\overline{v}\left(t\right) = \overline{u}\left(t\right) + \Delta\overline{u}\left(t\right)$, є асимптотично стійким.

Нехай $\overline{x}\left(t\right) = \overline{\eta}\left(t\right) - \overline{\xi}\left(t\right)$. Рівняння руху (6.1) набуває вигляду:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \frac{d\overline{\eta}}{dt} - \frac{d\overline{\xi}}{dt} = \overline{F}\left(t, \overline{\xi} + \overline{x}, \overline{u} + \Delta\overline{u}\right) - \overline{F}\left(t, \overline{\xi}, \overline{\eta}\right).$$

Вважаючи траєкторію $\overline{\xi}\left(t\right)$ та керування $\overline{u}\left(t\right)$ фіксованими, отримаємо рівняння:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}\left(t, \overline{x}, \Delta\overline{u}\right). \tag{6.2}$$

Рівняння (6.2) називають рівнянням **збуреного руху**.

Нехай виконуються наступні умови:

1) всі компоненти фазового вектора $\overline{x}\left(t\right)$ у будь-який момент часу відомі;

2) за траєкторією $\overline{x}\left(t\right)$ можна відновити вектор керування $\Delta\overline{u}\left(t, \overline{x}\right)$;

3) керування $\Delta\bar{u}\left(t,\bar{x}\right)$ повинне забезпечувати асимптотичну стійкість незбуреного руху $\bar{x}\left(t\right)\equiv 0$;

4) $\Delta\bar{u}\left(t,\bar{0}\right)\equiv\bar{0}$;

5) вектор-функція $\bar{u}\left(t,\bar{x}\right)$ визначена та неперервна у області $D: t\ge 0, \left|\bar{x}\right|\le L=\text{const}$;

6) праві частини рівнянь системи (3.33) задовольняють умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь при довільних початкових умовах у області D (розв'язок системи (6.2) існує і єдиний, якщо компоненти вектор-функції $\bar{f}$ – функції f_i є неперервними у області D за всіма своїми аргументами і ці функції задовольняють умову Ліпшиця по змінним $x_1, x_2,..., x_n$:

$$\left|f_i\left(t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)-f_i\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right)\right|\le K\sum_{j=1}^{n}\left|\tilde{x}_j-x_j\right|, K=\text{const}\ge 0,$$
$$i=1,2,...,n.$$

7) на вектор керування $\Delta\bar{u}$ обмеження відсутні.

Нехай вибрано критерій якості стабілізації, що відображає вимоги до процесу стабілізації, наприклад, мінімізацію обсягів використаних ресурсів. Цей критерій відображається функціоналом якості виду:

$$I\left(\bar{x},\Delta\bar{u}\right)=\int_{t_0}^{+\infty} f_0\left(t,\bar{x},\Delta\bar{u}\right)dt\rightarrow\min. \qquad (6.3)$$

Потрібно визначити керування $\Delta\bar{u}=\bar{u}^*\left(t,\bar{x}\right)$, що забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного руху $\bar{x}\left(t\right)\equiv\bar{0}$ згідно з рівнянням (6.2), і яке серед усіх керувань, що забезпечують асимптотичну стійкість незбуреного руху, надає функціоналу (6.3) мінімальне значення.

Початкові умови $\overline{x}(t_0)=\overline{x}_0$ відображають початкове збурення. Асимптотична стійкість означає, що початкове збурення при русі компенсується за рахунок керування. Сформульовану задачу називають **задачею оптимальної стабілізації**.

Приймемо $t_0=0$. Задача оптимальної стабілізації – це задача оптимального керування для системи з законом руху (3.33), функціоналом якості (3.34), початок процесу керування $t_0=0$, завершення – $t_1=+\infty$, $\overline{x}(0)=\overline{x}_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\overline{x}(t)=\overline{x}(+\infty)=\overline{0}$.

Цю задачу можна повністю розв'язати, якщо керування є скалярною величиною ($\Delta u\in\mathbb{R}$), рівняння (6.3) мають вигляд:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=A\cdot\overline{x}+\overline{c}\Delta u, \tag{6.4}$$

матриця A та вектор $\overline{c}$ є сталими, $f_0(t,\overline{x},\Delta u)=\frac{1}{2}\left(\overline{x}^T S\overline{x}+Q(\Delta u)^2\right)$ є квадратичною формою зі сталою додатно визначеною матрицею S та константою $Q>0$. Замінивши Δu на u, отримаємо задачу синтезу оптимального лінійного регулятора, розглянуту у п. 5.3.

6.2 Розв’язання задачі оптимальної стабілізації

Розв’язання задачі оптимальної стабілізації є аналогічним до розв’язання задачі синтезу оптимального лінійного регулятора $u^*(t,\overline{x})$ для задачі оптимального керування:

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}}{dt}=A\overline{x}+\overline{c}u,\\ \overline{x}(0)=\overline{x}_0,\ \overline{x}(+\infty)=\overline{0},\end{cases} \tag{6.5}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\left(\overline{x}^T S\overline{x} + Q(u)^2\right)dt \to \min, \tag{6.6}$$

де $\overline{x}^T = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$, A – стала матриця, $\overline{c}$ – сталий вектор, u – скалярна величина. S – стала додатно визначена симетрична матриця, константа $Q > 0$.

Задачу (6.5), (6.6) називають **задачею Лєтова-Кальмана аналітичного конструювання оптимальних регуляторів.** Для цієї задачі оптимальне керування $u = u^*(\overline{x})$ не залежить явно від t та визначається за формулою:

$$u^*(\overline{x}) = -\frac{1}{Q}\cdot\overline{c}^T\cdot K\cdot\overline{x}, \tag{6.7}$$

де K – додатно визначена симетрична матриця, що визначається з **алгебраїчного рівняння Ріккаті**

$$-A^T\cdot K - K\cdot A + K\cdot\overline{c}\cdot\frac{1}{Q}\cdot\overline{c}^T\cdot K - S = [0]. \tag{6.8}$$

Розв'язок цього рівняння, що задовольняє критерій Сильвестра (всі головні мінори матриці повинні бути додатними), є єдиним.

<u>Приклад 6.1</u>. Для диференціальної моделі об'єкта керування $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ з функціоналом якості $I = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\left(x_1^2 + 2x_2^2 + u^2\right)dt \to \min$ знайти оптимальне керування $u^*(x_1, x_2)$ з повним зворотним зв'язком.

Розв'язання. Запишемо матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті відносно невідомої матриці K:

$$-A^T \cdot K - K \cdot A + K \cdot \bar{c} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \bar{c}^T \cdot K - S = [0].$$

Тут $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = 1,\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}.$

Підставивши ці матриці та вектори у алгебраїчне рівняння Ріккаті, після перетворень отримуємо:

$$\begin{pmatrix} k_{12}^2 - 1 & -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ -k_{11} + k_{12}k_{22} & -2k_{12} + k_{22}^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримали систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} k_{12}^2 - 1 = 0, \\ -k_{11} + k_{12}k_{22} = 0, \\ -2k_{12} + k_{22}^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Можливі наступні випадки:

а) $k_{12} = 1, k_{11} = k_{22} = \pm 2$.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ або } K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

б) $k_{12} = -1, k_{11} = 0 = k_{22}$.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Додатно визначеною є лише матриця $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. За формулою (6.7) оптимальне керування $u^*\left(x_1, x_2\right)$ з повним зворотним зв'язком має вигляд:

$$u^*\left(x_1, x_2\right) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1 - 2x_2.$$