8.1 Задача про оптимальне інвестування підприємств

Дискретне динамічне програмування широко застосовують при плануванні оптимального розподілу ресурсів. Так, однією з найважливіших практичних задач, що виникають у економічній діяльності, є задача про оптимальне інвестування підприємств. Розглянемо розв'язання цієї задачі методом дискретного динамічного програмування.

Нехай потрібно інвестувати кошти обсягом a грошових одиниць у n підприємств, прибуток від яких, у залежності від величини u інвестованих коштів наведено у таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 Розподіл прибутку від підприємств у залежності від обсягів інвестованих у них коштів.

u	g_1	g_2	...	g_n
u_1	$g_1(u_1)$	$g_2(u_1)$	...	$g_n(u_1)$
u_2	$g_1(u_2)$	$g_2(u_2)$	...	$g_n(u_2)$
...	...	...	...	...
u_n	$g_1(u_n)$	$g_2(u_n)$	...	$g_n(u_2)$

Тут $g_i(u_j)$ – прибуток -го підприємства при інвестуванні у нього u_j грошових одиниць. Потрібно розподілити інвестиції таким чином, щоб загальний прибуток від діяльності всіх підприємств був максимальним.

Розіб'ємо процес оптимізації на n кроків. На k-му кроці оптимізуємо інвестиції з k-го по n-е підприємство, для чого є кошти $0 \le a \le x_k$, x_k – змінна стану. Змінна керування u_k – це обсяг коштів, що інвестуються у k-е підприємство. Функція Беллмана $B_k(x_k)$ – максимальний прибуток від інвестування підприємств з k-го по n-е суми x_k грошових одиниць (г. о.).

При інвестуванні у k-е підприємство u_k г. о. отримуємо прибуток $g_k(u_k)$. При цьому об'єкт керування до $(k+1)$-го кроку перейде у стан $x_{k+1} = x_k - u_k$, x_{k+1} г. о. залишається на інвестування з $(k+1)$-го по n-е підприємства.

На першому кроці умовної оптимізації $(k = n)$ значення функції Беллмана дорівнює прибутку лише з n-го підприємства, x_n – кошти, які можна використати для його інвестування. Щоб отримати максимум прибутку від цього підприємства, у нього потрібно інвестувати всі кошти, тобто $B_n(x_n) = g_n(x_n), u_n^* = x_n$.

На кожному з наступних кроків для обчислення функції Беллмана використаємо результати попереднього кроку. Нехай на k-му кроці для інвестування підприємств з k-го по n-е залишилось x_k г. о. Від інвестування у k-е підприємство u_k г. о. прибуток складе $g_k(u_k)$, на інвестування решти підприємств залишиться $x_{k+1} = x_k - u_k$ г. о. Максимальний прибуток, який можна отримати з k-го по n-е підприємства:

$$B_k(x_k) = \max_{u_k} \left\{ g_k(u_k) + B_{k+1}(x_k - u_k) \right\}.$$

Максимум досягається при $u_k = u_k^*$ – оптимальному керуванні на k-му кроці для стану x_k. Таким чином знаходять значення функції Беллмана та оптимальні керування до кроку $k = 1$ включно. Функція Беллмана $B_1(a)$ дорівнює максимальному прибутку, який можна отримати з усіх n підприємств, u_1^* – оптимальний обсяг інвестицій у перше підприємство. Для всіх наступних кроків обчислюємо $x_k = x_{k-1} - u_{k-1}$, оптимальне керування u_k^* повинне надавати максимум прибутку для стану об'єкта x_k.

<u>Приклад 8.1.</u> Розподілити $a = 80$ г. о. по трьом підприємствам з метою отримання максимального загального прибутку. Обсяги прибутку при інвестуванні u г. о. наведені у таблиці 8.2.

Таблиця 8.2. Залежність величини прибутку g_i г. о. від величини інвестицій u_j г. о.

u	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
20	34	21	33
40	47	23	40
60	67	34	50
80	70	90	80

Розв'язання. Перший етап розв'язання задачі – умовна оптимізація.

1) $k = n = 3$. $B_3(x_3) = g_3(x_3)$. Будуємо таблицю:

Таблиця 8.3. Перший крок умовної оптимізації, $k = 3$.

u_3 / x_3	0	20	40	60	80	$B_3(x_3)$	u_3^*
0	0	–	–	–		0	0
20	–	33	–	–	–	33	20
40	–	–	40	–	–	40	40
60	–	–	–	50	–	50	60
80	–	–	–	–	80	80	80

2) $k = 2$, $B_2(x_2) = \max\limits_{u_2 \le x_2} \left\{ g_2(u_2) + B_3(x_2 - u_2) \right\}$.

Таблиця 8.4. Другий крок умовної оптимізації, $k = 2$.

u_2 / x_2	0	20	40	60	80	$B_2(x_2)$	u_2^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	21+0	–	–	–	33	0
40	0+40	21+33	23+0	–	–	54	20
60	0+50	21+40	23+33	34+0	–	61	20
80	0+80	21+50	23+40	34+33	80+0	90	80

3) $k = 1,\ B_1(x_1) = \max\limits_{u_1 \le x_1} \left\{ g_1(u_1) + B_2(x_1 - u_1) \right\}$.

Таблиця 8.5. Третій крок умовної оптимізації, $k = 1$.

u_1 / x_1	0	20	40	60	80	$B_1(x_1)$	u_1^*
0	0+0	–	–	–		0	0
20	0+33	34+0	–	–	–	34	20
40	0+54	34+33	47+0	–	–	67	20
60	0+61	34+54	47+33	67+0	–	88	20
80	0+90	34+61	47+54	67+33	70+0	101	40

Другий етап розв'язання задачі – безумовна оптимізація.

1) $x_1 = a = 80,\ B_1(x_1) = 101,\ u_1^* = 40$.

2) $x_2 = x_1 - u_1^* = 80 - 40 = 40,\ B_2(x_2) = 54,\ u_2^* = 20$.

3) $x_3 = x_2 - u_2^* = 40 - 20 = 20,\ B_3(x_3) = 33,\ u_3^* = 20$.

Оптимальний план інвестування $\left(u_1^*, u_2^*, u_3^*\right) = (40, 20, 20)$. Максимальний прибуток при цьому складає $B_1(x_1) = B_1(80) = 101$ г. о.

8.2 Задача про заміну обладнання

Планується експлуатація обладнання на протязі n років. Зі зносом обладнання його продуктивність зменшується і відповідно зменшується річний прибуток від його експлуатації $r(t)$, де t – вік обладнання.

На початку кожного року є можливість продати застаріле обладнання за ціну $s(t)$ та придбати нове обладнання за ціну p. Потрібно визначити оптимальний план заміни обладнання так, щоб загальний прибуток підприємства від його експлуатації за всі n років був максимальним, враховуючи, що до початку експлуатації вік обладнання становив t_0 років.

Вихідними даними до задачі є прибуток $r(t)$ від експлуатації обладнання протягом року, залишкова вартість обладнання $s(t)$, його вік t_0 до початку експлуатації та вартість p придбання нового обладнання.

На k-му кроці оптимізуємо план заміни обладнання з k-го по n-ий роки. Величина максимального прибутку залежить від графіка заміни обладнання та його віку. Вік обладнання t є змінною стану. Вона набуває значень $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., t_0 + n$. Змінною керування є логічна змінна, що приймає значення $u = u_1$ – зберегти обладнання або $u = u_2$ – замінити його.

Функція Беллмана $B_k(t)$ – це максимальний прибуток від експлуатації обладнання з k-го по n-ий рік, якщо до початку k-го року вік обладнання складав t років.

Застосувавши вибране керування, переводимо систему у новий стан: якщо на початку k-го року обладнання зберегти, то на початок $(k+1)$-го року змінна стану $t' = t+1$. Якщо вибрана заміна обладнання, то на початок $(k+1)$-го року $t' = 1$.

Для кожного варіанту керування прибуток визначають як суму двох величин – безпосереднього результату керування та його наслідків. Якщо на початку k-го року зберігаємо обладнання віком t років, то за k-й рік воно дасть прибуток $r(t)$. На початок $(k+1)$-го року його вік досягне $t+1$ років, а максимальний прибуток за решту років, з k-го по n-ий рік, складе $B_{k+1}(t+1)$.

Якщо на початку k-го року міняють обладнання, то спочатку продають старе обладнання віком t років за $s(t)$ г. о., купляють нове обладнання за p г. о. Воно експлуатується на протязі k-го року з прибутком $r(0)$ г. о. На початок наступного року його вік складе 1 рік і з k-го по n-ий роки максимальний прибуток складе $B_{k+1}(1)$ г. о. З двох можливих варіантів керування вибираємо той, що максимізує прибуток і таким чином знаходимо функцію $B_k(t)$:

$$B_k(t) = \max \begin{cases} r(t) + B_{k+1}(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_{k+1}(1) - u = u_2. \end{cases}$$

На кожному кроці потрібно обчислити цю функцію для всіх $t_0 \le t \le t_0 + k - 1$. Керування, на якому досягається максимум прибутку, є оптимальним.

Функція Беллмана для першого кроку $(k = n)$ має вигляд:

$$B_n(t) = \max \begin{cases} r(t) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) - u = u_2. \end{cases}$$

Знаючи цю функцію, знаходимо $B_{n-1}(t), B_{n-2}(t), ..., B_1(t)$. $B_1(t_0)$ дорівнює максимальному прибутку з 1-го по n-й роки. Цей максимум досягається при деякому керуванні, застосувавши яке на 1-му році, ми визначаємо вік обладнання до початку 2-го року ($t=1$ або $t=t_0+1$). Для цього віку обладнання за результатами, отриманими на етапі умовної оптимізації, вибираємо керування, при якому досягається максимум прибутку за період з 2-го по n-й роки і т. д. На етапі безумовної оптимізації визначають роки, на початку яких потрібно замінити обладнання.

Приклад 8.2. Визначити оптимальний термін заміни обладнання на протязі наступних 6 років, якщо річний прибуток $r(t)$ та залишкова вартість $s(t)$ наведені у таблиці. Вартість нового обладнання 13 г. о. Вік обладнання на початок планового періоду $t_0 = 1$ рік.

Таблиця 8.6. Річний прибуток $r(t)$ від експлуатації обладнання та його залишкова вартість $s(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	12	11	11	10	8	6	3
$s(t)$	13	10	8	7	5	3	1

Розв'язання. Першим етапом розв'язання задачі є умовна оптимізація.

1) $k=n=6,\ 1\le t\le 6.\ B_6(t)=\max\begin{cases} r(t)-u=u_1, \\ s(t)-p+r(0)-u=u_2. \end{cases}$

$B_6(1)=\max\begin{cases} 11, \\ 10-13+12. \end{cases}=11, u=u_1,\ B_6(2)=\max\begin{cases} 11, \\ 8-13+12. \end{cases}=11, u=u_1,$

$B_6(3)=\max\begin{cases} 10, \\ 7-13+12. \end{cases}=10, u=u_1,\ B_6(4)=\max\begin{cases} 8, \\ 5-13+12. \end{cases}=8, u=u_1,$

$$B_6(5) = \max\begin{cases} 6, \\ 3-13+12. \end{cases} = 6, u = u_1, \quad B_6(6) = \max\begin{cases} 3, \\ 1-13+12. \end{cases} = 3, u = u_1.$$

2) $k = 5$, $1 \le t \le 5$, $B_5(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_6(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_6(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_5(1) = \max\begin{cases} 11+11 = 22, \\ 10-13+12+11 = 20. \end{cases} = 22, u = u_1,$$

$$B_5(2) = \max\begin{cases} 11+10 = 21, \\ 8-13+12+11 = 19. \end{cases} = 21, u = u_1,$$

$$B_5(3) = \max\begin{cases} 10+8 = 18, \\ 7-13+12+11 = 17. \end{cases} = 18, u = u_1,$$

$$B_5(4) = \max\begin{cases} 6+6 = 12, \\ 5-13+12+11 = 15. \end{cases} = 15, u = u_2,$$

$$B_5(5) = \max\begin{cases} 6+3 = 9, \\ 3-13+12+11 = 13 \end{cases} = 13, u = u_2.$$

3) $k = 4$, $1 \le t \le 4$, $B_4(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_5(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_5(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_4(1) = \max\begin{cases} 11+21 = 32, \\ 10-13+12+22 = 31. \end{cases} = 32, u = u_1,$$

$$B_4(2) = \max\begin{cases} 11+18 = 29, \\ 8-13+12+22 = 29. \end{cases} = 29, u = u_1,$$

$$B_4(3) = \max\begin{cases} 10+15 = 25, \\ 7-13+12+22 = 28. \end{cases} = 28, u = u_2,$$

$$B_4(4) = \max\begin{cases} 8+13 = 21, \\ 5-13+12+22 = 26. \end{cases} = 26, u = u_2.$$

4) $k = 3$, $1 \le t \le 3$, $B_3(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_4(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_4(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_3(1) = \max\begin{cases} 11 + 29 = 40, \\ 10 - 13 + 12 + 32 = 41. \end{cases} = 41, u = u_2,$$

$$B_3(2) = \max\begin{cases} 11 + 28 = 39, \\ 8 - 13 + 12 + 32 = 39. \end{cases} = 39, u = u_1,$$

$$B_3(3) = \max\begin{cases} 10 + 26 = 36, \\ 7 - 19 + 12 + 32 = 38. \end{cases} = 38, u = u_2.$$

5) $k = 2$, $1 \le t \le 2$, $B_2(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_3(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_3(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_2(1) = \max\begin{cases} 11 + 39 = 50, \\ 10 - 13 + 12 + 41 = 50. \end{cases} = 50, u = u_1,$$

$$B_2(2) = \max\begin{cases} 11 + 38 = 49, \\ 8 - 13 + 12 + 41 = 48. \end{cases} = 49, u = u_1.$$

6) $k = 1$, $t = 1$, $B_1(t) = \max\begin{cases} r(t) + B_2(t+1) - u = u_1, \\ s(t) - p + r(0) + B_2(1) - u = u_2. \end{cases}$

$$B_1(1) = \max\begin{cases} 11 + 49 = 60, \\ 10 - 13 + 12 + 50 = 59. \end{cases} = 60, u = u_2.$$

Другим етапом розв'язання задачі є безумовна оптимізація. Результати обчислень подамо у вигляді таблиці 4.7 (k – рік експлуатації, t – вік обладнання). Елементами таблиці є значення функції Беллмана $B_k(t)$.

Таблиця 8.7. Значення функції Беллмана $B_k(t)$.

t / k	1	2	3	4	5	6
1	60	–	–	–	–	–
2	50	49	–	–	–	–

3	41	39	38	–	–	–
4	32	29	28	26	–	–
5	22	21	18	15	13	–
6	11	11	10	8	6	3

Максимальний прибуток за 6 років експлуатації обладнання становить $B_1(1) = 60$ г. о. Він досягається, якщо на 1-му році не міняти обладнання. Тоді до початку 2-го року вік обладнання складе 2 роки. У цьому випадку максимальний прибуток з 2-го по 6-й роки досягається за умови збереження обладнання.

До початку 3-го року $t = 3$, $B_3(3) = 38$, $u = u_2$. Для отримання максимуму прибутку з 3-го по 6-й роки обладнання потрібно замінити. Далі $B_4(1) = 32$, $u = u_1$; $B_5(2) = 21$, $u = u_1$; $B_6(3) = 10$, $u = u_1$. Отже, замінити обладнання потрібно на початку 3-го року його експлуатації.