Лекція 1.

Предмет нарисної геометрії.

Нарисна геометрія –розділ геометрії, в якому просторові фігури вивчають за допомогою їх зображень на площині.

Основи нарисної геометрії і метод прямокутного проектування розробив в 1798 році відомий французький вчений Гаспар Монж, виконуючи проектну документацію для побудови фортифікаційних споруд у Парижі.

Геометричні фігури.

Будь-яка непорожня множина точок називається геометричною фігурою.

Елементарними геометричними фігурами є точка, пряма і площина.

1.1. Метод проекціювання. Центральне та паралельне проекціювання. Комплексний рисунок Монжа.

Основою нарисної геометрії є метод проекціювання, який дає змогу отримувати зображення просторових фігур на площині. Основна мета полягає у тому, що в просторі вибирається площина П, яка називається площиною проекцій та точка S, яка не лежить в цій площині і називається – центром проекціювання. Площина та точка утворюють апарат проекціювання, який дозволяє отримувати на площині проекцію будь-якої геометричної фігури.

Нехай є площина П' і точка S, яка не належить П'. Візьмемо в просторі довільну точку А. Необхідно побудувати центральну проекцію точки А. Для цього через задані точки S і А проведемо промінь [SA). **Центральною проекцією** точки А буде точка перетину променя [SA) із площиною П' [SA) ∩ П' = A'. Площину П' називають площиною проекцій, точку S – центром проекціювання, отриману точку A' – центральною проекцією точки А на площину П', [SA') – проекціюючим променем.

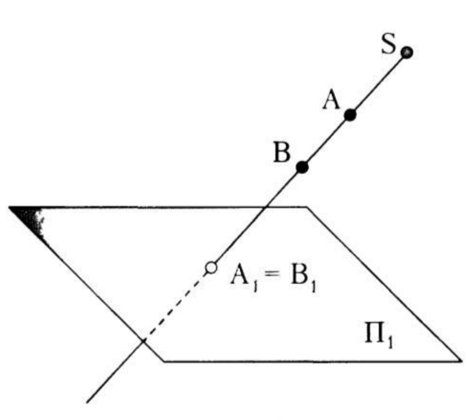


Рис.1.1

Апарат центрального проекціювання заданий, якщо задано положення площини проекцій П' і центра проекцій S. Якщо апарат проеціювання заданий, то завжди можна визначити положення центральної проекції будь-якої точки простору на площині проекцій.

Паралельне проекціювання є окремим випадком центрального проекціювання, коли центр проекцій лежить у невласній точці S, тому всі проекціюючі промені паралельні (рис. 1.2). а) б). Апарат паралельного проекціювання заданий, якщо задано положення площини проекцій П' і напрямок проекціювання S. Паралельне проекціювання поділяється на: косокутне - $\gamma \neq 90^0$ і прямокутне - $\gamma = 90^0$ γ - кут нахилу проекціюючого променя до площини проекцій.

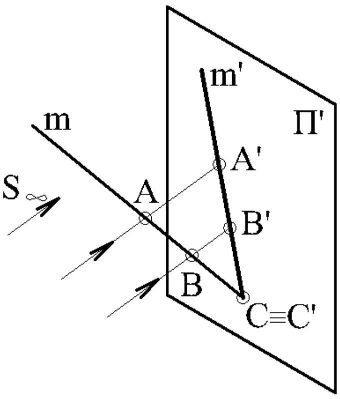


Рис.1.2,а

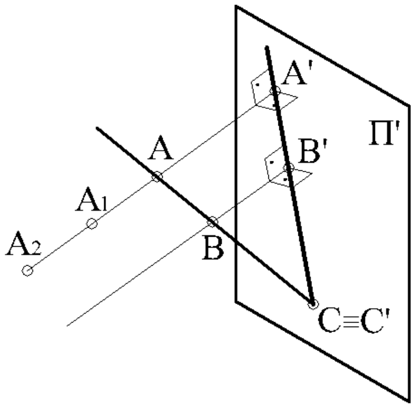


Рис.1.2,б

Прямокутне (ортогональне) проекціювання, принаймні, на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій є основним методом побудови технічного креслення (метод Монжа) (рис.1.3).

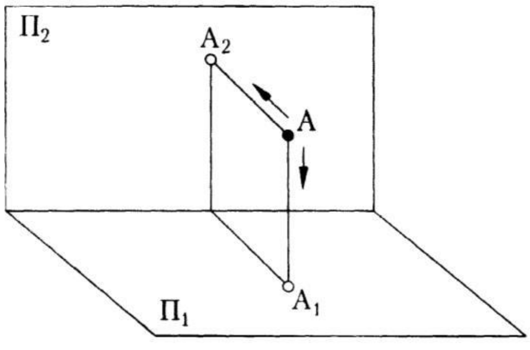


Рис.1.3

Одне зображення, яке побудовано проекційним методом, на жаль, не дозволяє за проекцією відновити форму і положення об’єкта у просторі.

Розв'язати цю проблему знову допомагає проекціювання з двох центрів (рис.1.4). Маємо дві площини проекцій $П_1$ і $П_2$, два центри проекціювання S і T і об'єкт проекціювання A. Якщо задано апарат проекціювання, то за проекціями A_1 і A_2 завжди можна відновити точку A у просторі, як точку перетину променів SA_1 і TA_2.

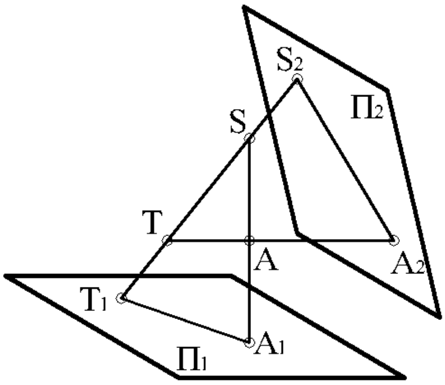
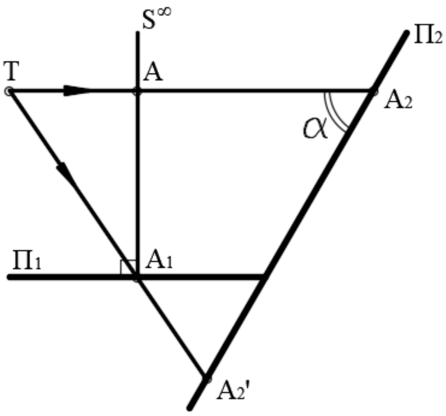
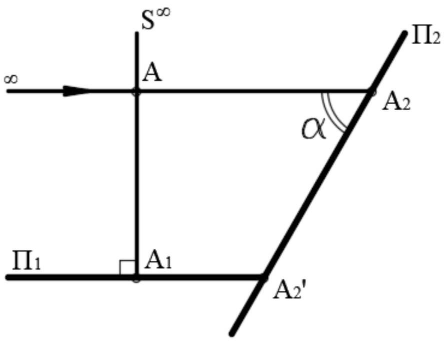


Рис.1.4

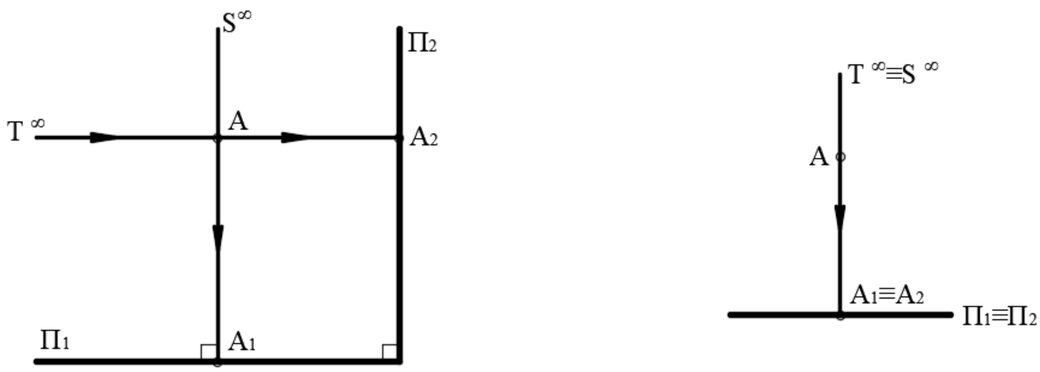
Система двох проекцій, побудованих з двох центрів S і T, називається проекційно-зображальною системою. В залежності від положення площин проекцій і центрів проекціювання існують різні проекційно-зображальні системи: перспектива (рис. 1.5. *а*), аксонометрія (рис. 1.5. *б*), система прямокутних проекцій (рис. 1.5. *в*), проекції з числовими позначками (рис. 1.5. *г*).



а)



б)



в) *г)*

Рис. 1.5

1.2 Аксонометрія

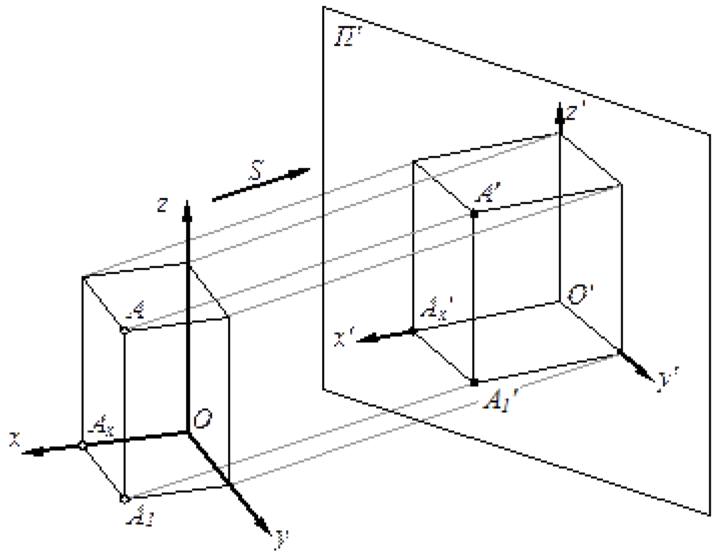


Рис.1.6

Для отримання наочного зображення використовують паралельну проекцію Φ' предмета Φ на довільну площину Π' за довільним напрямом проекціювання *s.* Для повноти зображення разом із предметом Φ на площину Π' проекціюється система координат *Oxyz,* до якої предмет віднесено, та одна із його вторинних проекцій, наприклад Φ_1 (на *Oxy*) (рис.1.6).

Паралельна проекція предмета на площині Π', побудована разом із проекцією координатної системи *Oxyz*, до якої предмет віднесено, називають його ***аксонометричною проекцією*** (або ***аксонометрією).***

Отже, маємо: Π' – ***площина аксонометричних проекцій;*** Φ' – аксонометрична проекція предмета Φ; $O'x'y'z'$ – аксонометрична проекція системи координат *Oxyz.* Прямі x', y', z' – ***аксонометричні осі.***

В загальному випадку осі x', y', z' не паралельні осям *x, y, z.* (рис.1.7). Тому довільні відрізки *OH, OG, OF* не дорівнють їх аксонометричним зображенням $O'H'$,

$O'G'$, $O'F'$. У зв'язку з цим виникає питання про спотворення розмірів вздовж кожної з осей. Відношення $O'H':OH=u$, $O'G':OG=v$, $O'F':OF=w$ називають ***коефіцієнтами (показниками) спотворення*** по осях x', y', z' відповідно. Якщо вздовж кожної з них відкласти від точки O відрізки певної довжини величиною e_x, e_y, e_z, то внаслідок проекціювання на площину $П'$ дістанемо відрізки e'_x, e'_y, e'_z, – аксонометричні одиниці виміру на відповідних осях (рис. 9.2). В такому разі записані вище співвідношення матимуть вигляд: $e'_x : e_x = \boldsymbol{u}$; $e'_y : e_y = \boldsymbol{v}$; $e'_z : e_z = \boldsymbol{w}$. При $e_x = e_y = e_z = 1$ маємо: $e'_x = u$; $e'_y = v$; $e'_z = w$. Тобто величини u, v, w – будуть показниками спотворення вздовж відповідних аксонометричних осей. В залежності від положення площини $П'$ відносно координатних осей x, y z та напряму проекціювання s показники спотворення можуть бути:

1. $u \neq v \neq w$ - ***триметрія.***
2. $u = v \neq w$, або $u = w \neq v$, або $v = w \neq u$). – ***диметрія***
3. $u = v = w$ –***ізометрія.***

Основоположною в теорії аксонометрії є ***теорема Польке***, яка стверджує: три довільні відрізки $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ на площині зображень $П'$, які виходять із однієї точки O', можуть бути прийняті за паралельні проекції трьох рівних за довжиною відрізків OA, OB, OC, що утворюють у просторі систему прямокутних координатних осей (рис. 1.7). Це означає, що напрям аксонометричних осей на площині аксонометричних проекцій, а також відношення показників спотворення можна задавати абсолютно довільно. При цьому показники спотворення будуть пропорційними аксонометричним одиницям виміру на кожній з осей:

$$u : v : w = e'_x : e'_y : e'_z$$

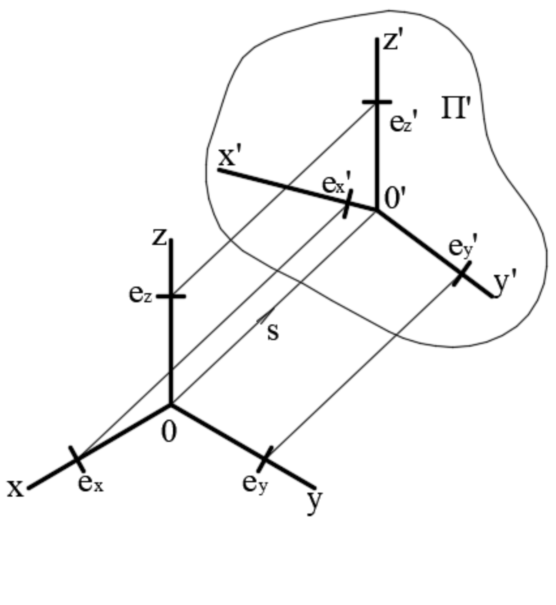


Рис. 1.7

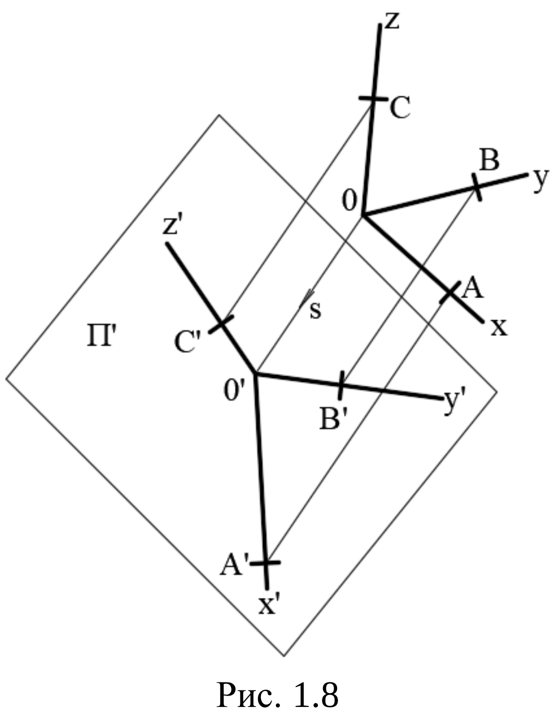


Рис. 1.8

Між показниками спотворення і кутом φ існує залежність, яка в загальному випадку має вигляд:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + ctg^2\,\varphi$$

Графічне представлення такої залежності показано на рис. 9.4, де представлено систему координат *Oxyz,* площину загального положення Π' та напрям проекціювання s так, щоб $\varphi \neq 90^\circ$. Якщо площину Π' продовжити до перетину з осями *Ox, Oy, Oz,* отримаємо аксонометричний трикутник слідів $A'B'C'$. Прямі $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ - сліди координатних площин *Oxy, Oxz, Oyz* на Π'. Прямі, які з′єднують точку O' з точками A', B', C', визначають систему аксонометричних осей $O'x'y'z'$.

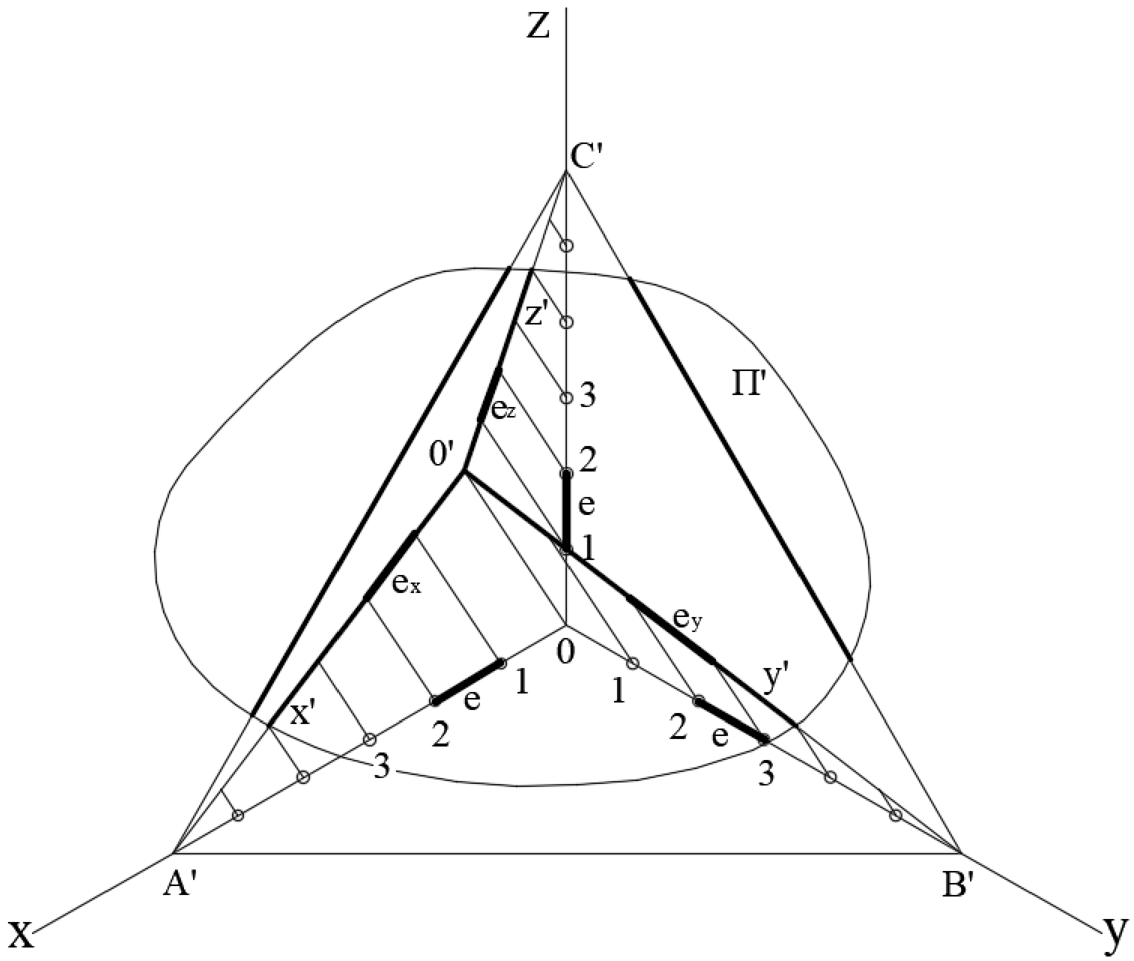
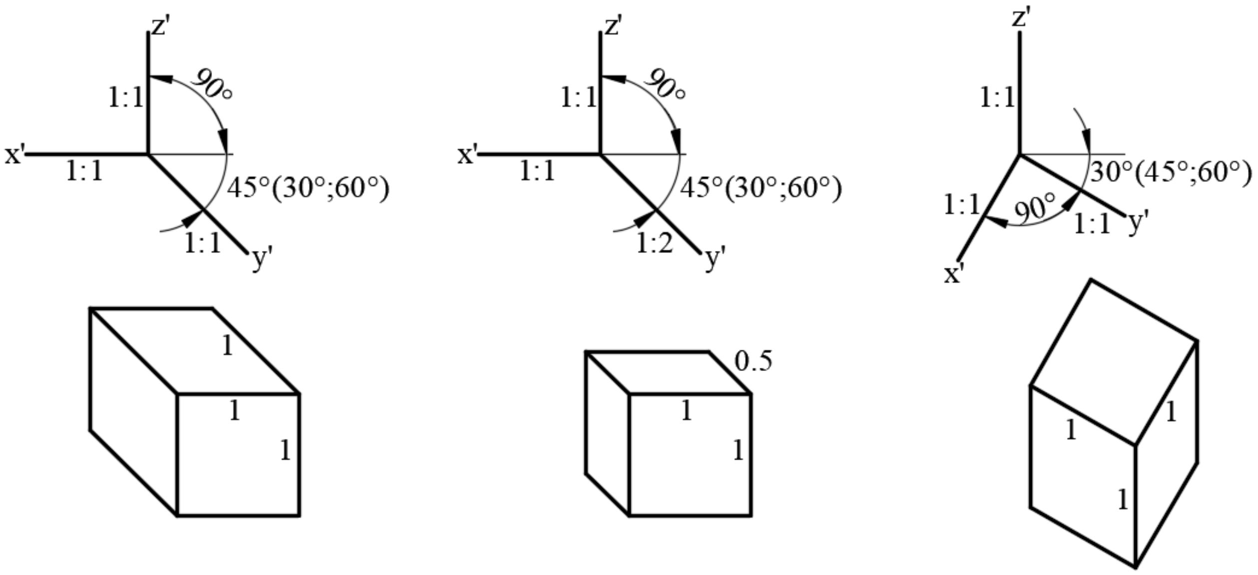


Рис. 1.9

Якщо на осях *Ox, Oy, Oz* задати однакові відрізки *e,* то на осях $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ отримаємо їх проекції e'_x, e'_y, e_z', які в загальному випадку мають не однакову довжину. Це відповідає ***триметричній косокутній проекції.*** ($u \neq v \neq w$). Наведемо деякі приклади косокутних аксонометрій.

Якщо площину Π' розмістити паралельно двом осям координат, наприклад *Ox* і *Oz,* то за будь-якого напряму s (крім $s \parallel \Pi'$) відрізки на осях *Ox* і *Oz* проекціюються на $П'$ без спотворення, тобто $u = w = 1$ (рис. 1.10, *а*). Напрям проекціювання s і показник спотворення v по осі Oy можуть змінюватись в залежності від кута φ. При $\varphi = 45^\circ$ і $v = 1$ маємо ***косокутну фронтальну ізометрію*** (рис. 1.10, *а*).

Не змінюючи напряму осі Oy, зміною тільки напряму s можна досягти значення $v = 0{,}5$. Отримане зображення має назву ***косокутної фронтальної диметрії*** (рис. 1.10, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 9.5

Аналогічно можна отримати ***косокутну горизонтальну ізометрію***, якщо $П'$ паралельна осям Ox і Oy (рис. 1.10, *в*). Для випадків, розглянутих на рис. 1.10 ,*а* та 1.10, *в*, можемо записати співвідношення:

$$u : w : v = 1 : 1 : 1.$$

Окремо розглянемо прямокутні аксонометричні проекції**.** Як уже зазначалось, напрям проекціювання s має бути перпендикулярним до площини $П'$ ($\varphi = 90^o$). На рис. 1.11, *а* показано проекціювальний промінь s (відрізок OO'). Аксонометричні осі $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ є висотами трикутника слідів $A'B'C'$, а початок координат O' збігається з ортоцентром цього трикутника. В цьому випадку трикутник слідів однозначно визначає напрям аксонометричних осей. Формула, що пов'язує величини u, v, w та кут φ ($\varphi = 90^\circ$) має вигляд:

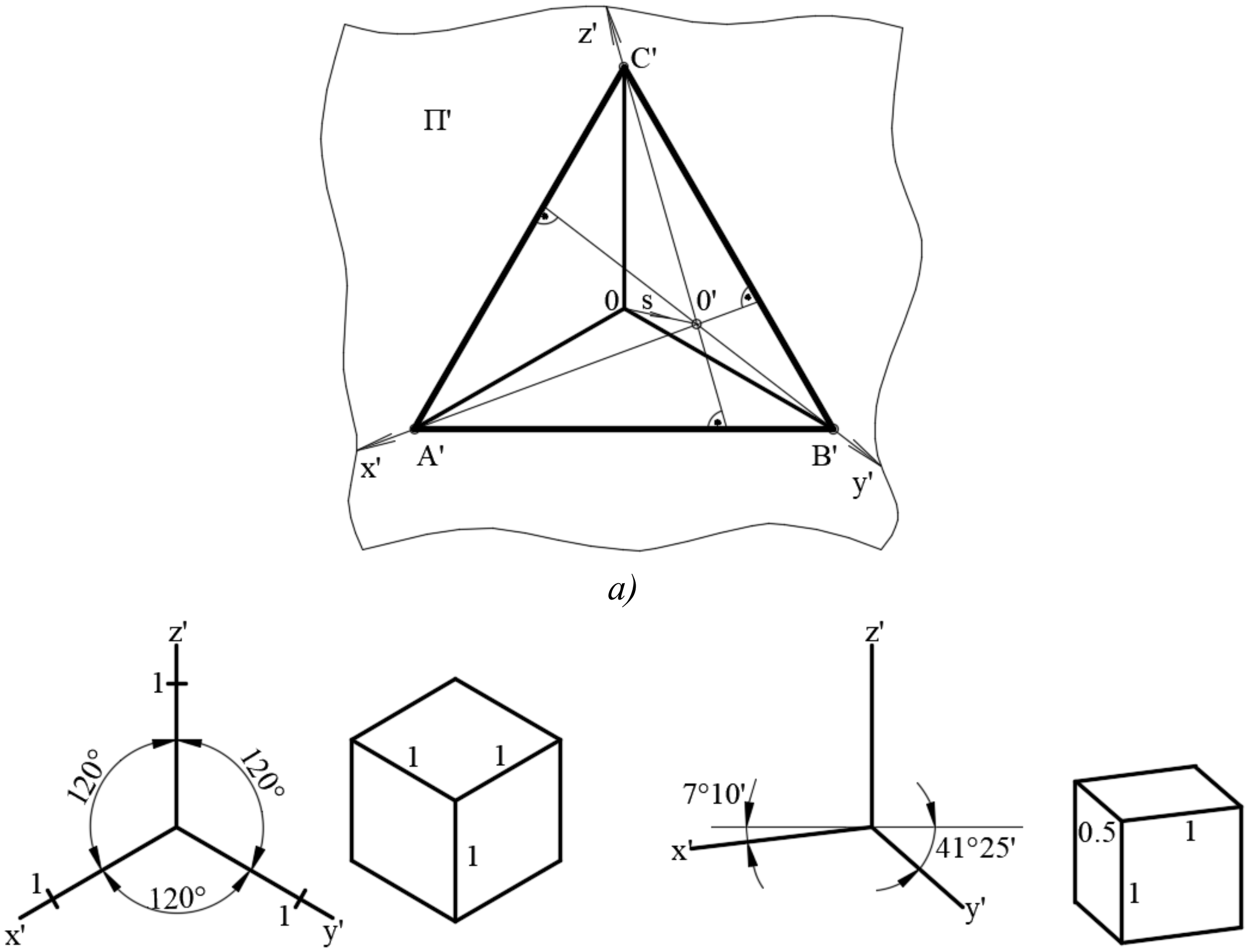
$$u^2 + v^2 + w^2 = 2, \text{ оскільки } ctg\ 90^\circ = 0$$

Якщо $u = v = w$, то $3u^2 = 2$, звідки $u = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82$. Таку аксонометрію називають ***прямокутною ізометрією*** (рис.1.11, *б*).

Якщо $u = w$, а $v = 0{,}5u$, це означає, що скорочення по осі $O'y'$ вдвічі більше, ніж по осях $O'x'$ і $O'z'$, а наведена вище формула матиме вигляд:

$$2u^2 + (u/2)^2 = 2, \text{ звідки } u = w = \sqrt{8/9} = 0{,}94;\ v = 0{,}47,$$

а зображення називають ***прямокутною диметрією*** (рис. 1.11, *в*).



u:v:w=1:1:1 u:v:w=1:0,5:1

б) *в)*

Рис. 1.11