Лекція 3.

ПОЗИЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ ПАР ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Між геометричними фігурами у тривимірному точковому просторі існують позиційні відносини: перетин, належність, паралельність тощо.

З точки зору багатовимірної геометрії позиційні відносини розглядаються як перетин точкових множин. За теоремою Грассмана перетином двох підпросторів, що мають вимірність l і m, у просторі вимірності n у загальному випадку є підпростір, вимірність r якого визначається за формулою:

$$r = l + m - n.$$

Якщо величина r є від'ємною, то підмножини l і m не перетинаються у просторі n. Наприклад, у тривимірному точковому просторі (n = 3) пряма (l = 1) і площина (m = 2) у загальному випадку перетинаються у власній, або невласній точці (r = 0). Тоді за теоремою Грасмана

$$r = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Позиційні властивості проекцій пар геометричних фігур відповідають на запитання: "Як за проекціями двох фігур визначити їх взаємне положення у просторі?".

3.1. Дві точки

Дві точки у тривимірному просторі можуть збігатись або не збігатись (рис. 3.1).

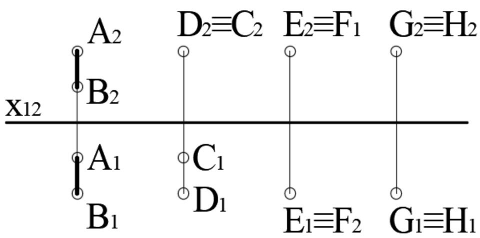


Рис. 3.1

Властивість 3.1. Дві точки у просторі збігаються, якщо збігаються їх однойменні проекції. За цією властивістю з чотирьох пар точок, що показано на рис. 3.1 збігаються тільки точки G і H . Без пояснень зрозуміло, що пари точок A і B, C і D не збігаються. Точки E і F не збігаються, що стане зрозумілим, якщо їх уявити у просторі, як показано на рис. 3.2. Дві точки (C і D), які належать одній проекціювальній прямій, називаються ***конкуруючими*** (рис. 3.1).

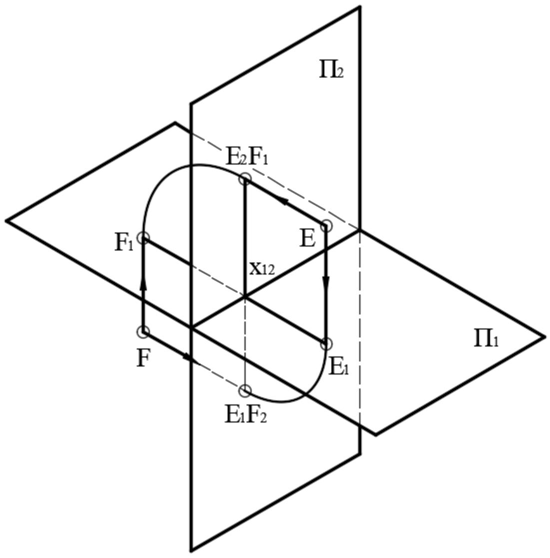


Рис. 3.2

3.2. Точка і пряма

Точка може належати прямій або не належати їй.

Властивість 3.2. Точка належить прямій, якщо її проекції належать однойменним проекціям прямої. З усіх точок, що показано на рис. 3.3 тільки точка *A* належить прямій *l*. Точки *B* і *C* не належать прямій *l*, оскільки тільки одна проекція кожної з цих точок належить однойменній проекції прямої: точка *D* не належить прямій *l*, оскільки горизонтальна проекція точки *D* належить не горизонтальній, а фронтальній проекції прямої *l*, а фронтальна проекція точки *D* належить горизонтальній проекції прямої. Точка *E* не належить прямій, оскільки горизонтальна проекція точки *E* не належить горизонтальній проекції прямої *l*.

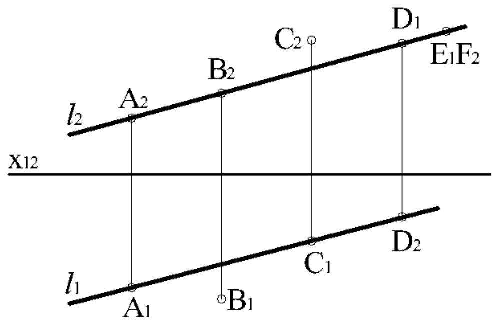
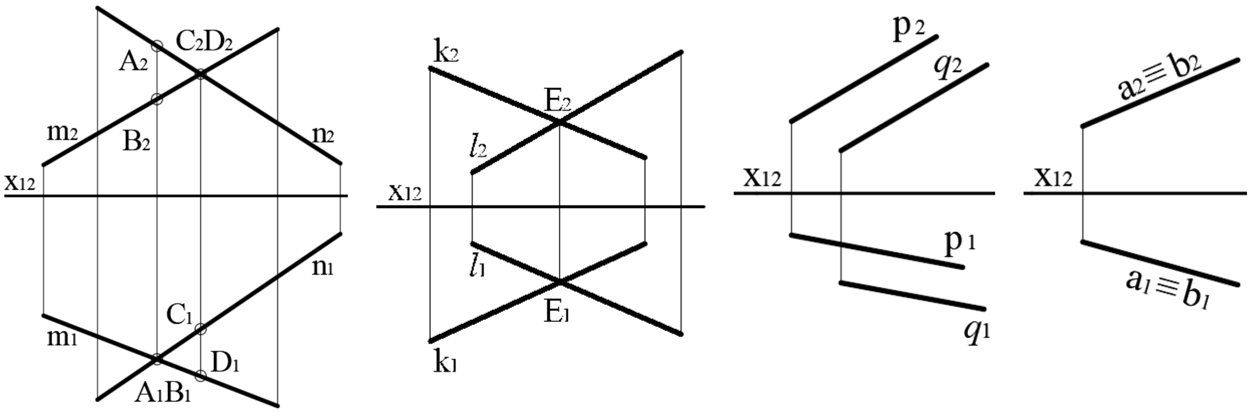


Рис. 3.3

3.3. Дві прямі

В загальному випадку, згідно з теоремою Грассмана, дві прямі не мають спільної точки і називаються мимобіжними (рис. 3.4, *а*). В окремих випадках вони можуть перетинатись у власній (рис. 3.4, *б*), або у невласній точці (рис. 3.4, *в*) і збігатись (рис. 3.4, *г*).

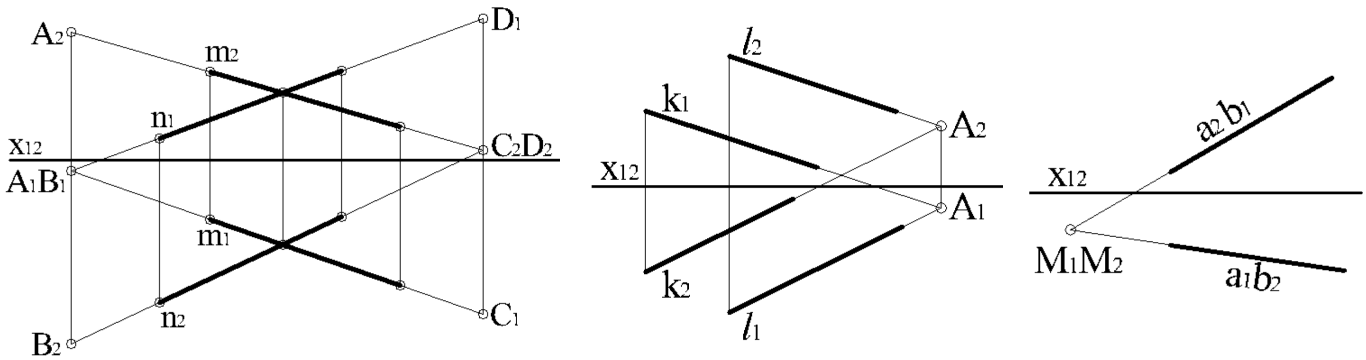


а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 3.4

<u>Властивість 3.3.</u> Якщо точки перетину однойменних проекцій прямих належать одній лінії відповідності, то прямі перетинаються (рис. 3.4, *б*); якщо однойменні проекції прямих паралельні між собою (мають невласні точки перетину), то прямі паралельні (рис. 3.4, *в*); якщо точки перетину однойменних проекцій прямих не належать одній лінії відповідності, то прямі мимобіжні (рис. 3.4, *а*); якщо однойменні проекції прямих збігаються, то і самі прямі збігаються (рис. 3.4, *г*).

Більш детально розглянемо випадки, які показано на рис. 3.5.



а) *б)* *в)*

Рис. 3.5

Дві прямі *m* і *n* на рис. 3.5, *а* не перетинаються, а є мимобіжними, оскільки проекції точок $A_1(B_1)$ перетину горизонтальних проекцій прямих і проекції точок $C_2(D_2)$ перетину фронтальних проекцій прямих не належать одній лінії відповідності. Дві прямі *l* і *k* на рис. 3.5, *б* не паралельні, а перетинаються, оскільки проекції точок A_1 і A_2 перетину однойменних проекцій належать одній лінії зв'язку і є двома проекціями власної точки *A* перетину прямих. Прямі a і b (рис. 3.5, *в*) не збігаються, а перетинаються у власній точці *M*.

3.4. Точка і площина. Пряма і площина

За теоремою Грасмана у загальному випадку точка не належить площині:

$r = l + m - n = 0 + 1 - 3 = -2$. В окремому випадку точка може належати площині.

<u>Властивість 3.4.</u> Точка належить площині, якщо вона належить будь-якій прямій у цій площині.

На рис. 3.6 площину задано трикутним відсіком *ABC*. Точка *E* належить площині *ABC*, оскільки належить прямій *AB* у цій площині, а точка *D* не належить площині *ABC* (див. точку *D* на рис. 3.3).

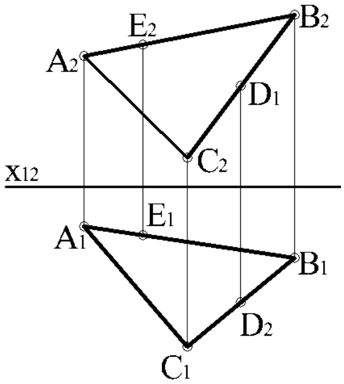


Рис. 3.6

Пряма у загальному випадку за теоремою Грассмана перетинає площину у власній або невласній точці: $r = l + m - n = 1 + 2 - 3 = 0$. Якщо пряма перетинається з площиною у невласній точці, то пряма і площина є паралельними.

В окремому випадку пряма належить площині (рис. 3.7, *б*).

<u>Властивість 3.5.</u> Пряма належить площині якщо вона має хоча б дві спільні точки з площиною. На рис. 3.7, *а* задано фронтальну проекцію прямої m, що належить площині *ABC*.

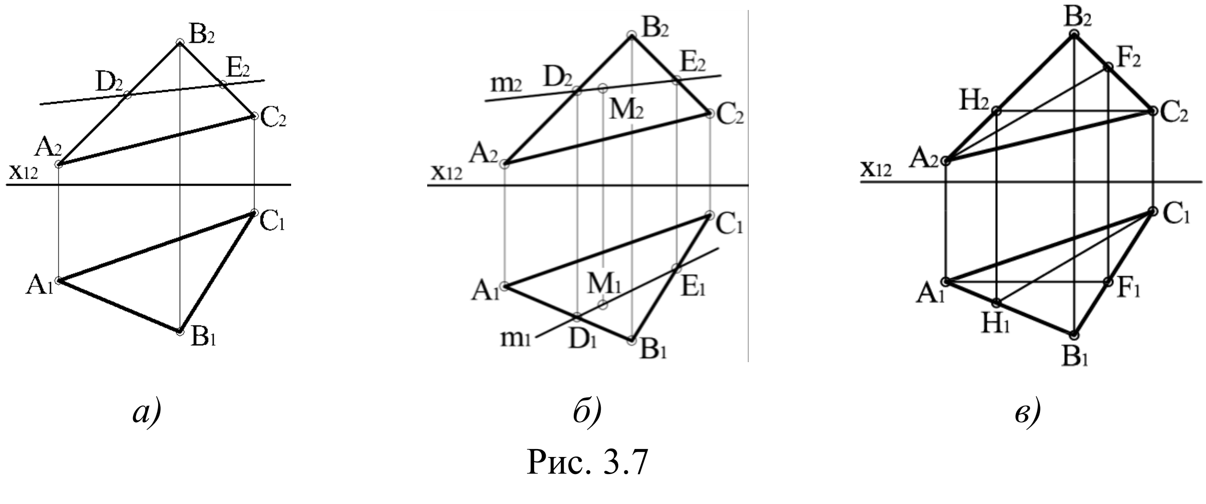


Рис. 3.7

Потрібно побудувати другу (горизонтальну) проекцію прямої *m*. Якщо пряма *m* належить площині, то дві її точки *D* і *E* також належать площині. Тоді точка *D* належить стороні *AB* трикутника, а точка *E* – стороні *BC*. За відповідністю потрібно побудувати горизонтальні проекції D_1 і E_1 точок *D* і *E* відповідно на горизонтальних проекціях прямих *AB* і *BC*. Точки D_1 і E_1 визначають горизонтальну проекцію m_1 прямої *m* (рис. 3.7, *б*).

Пряма (*CH*), що належить площині і паралельна $П_1$, називається ***горизонталлю***, а пряма (*AF*), що належить площині і паралельна $П_2$ – ***фронталлю*** (рис. 3.7 в). Горизонталь і фронталь ще називають лініями рівня площини. Сліди площини на площинах проекцій також є лініями рівня (рис. 2.10).

Для того, щоб побудувати проекції довільної точки, що належить заданій площині, необхідно спочатку побудувати проекції прямої у площині, а тоді на прямій будувати проекції точки. На рис. 3.7, *б* задано фронтальну проекцію M_2 точки *M*, що належить площині *ABC*. Для того, щоб побудувати горизонтальну проекцію M_1 точки *M* спочатку через M_2 проведемо у площині *ABC* довільну пряму *DE*, визначимо горизонтальну проекцію D_1E_1 прямої *DE*, а тоді за відповідністю на D_1E_1 визначимо горизонтальну проекцію M_1 точки *M*, що належить площині *ABC*.

Для того, щоб визначити точку *K* перетину прямої *m* загального положення з площиною *ABC* загального положення (рис. 3.8), через пряму *m* необхідно провести проекціювальну площину, наприклад *Σ*, яка перетинає площину *ABC* по прямій *DE* і побудувати горизонтальну проекцію D_1E_1 цієї прямої.

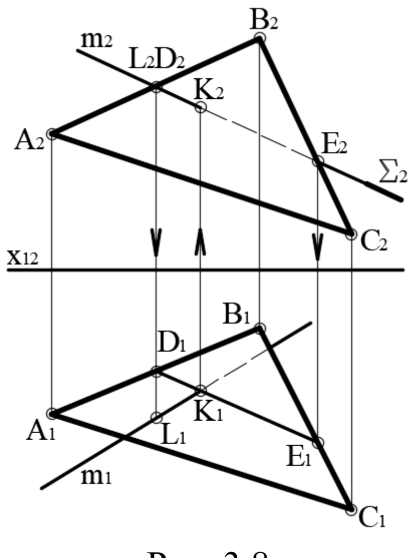


Рис. 3.8

У площині *Σ* тепер є дві прямі *m* і *DE*, фронтальні проекції m_2 і D_2E_2, яких збігаються, оскільки площина *Σ* є проекціювальною, але якщо побудувати горизонтальну проекцію D_1E_1 прямої *DE*, то побачимо, що ці дві прямі перетинаються у точці *K*, яка і є точкою перетину прямої *m* з площиною *ABC*. Друга проекція точки K визначається за відповідністю. Для наочності на рисунку показують, де на проекціях відтин ABC площини закриває від глядача частину прямої m. Формально видимість прямої відносно площини можна визначити за допомогою конкуруючих точок (наприклад D і L). Одна з цих точок (D) належить площині ABC, а друга (L) – прямій m. Для того, щоб побачити, яка з точок (D або L) на фронтальній проекції знаходиться ближче до глядача, потрібно звернутись до горизонтальної проекції, де видно, що точка L знаходиться ближче точки D. Тому на фронтальній проекції в околі цих точок пряму m, а саме, її відрізок DK буде видно, оскільки його не закриває від глядача площина ABC. Тоді відрізок KE прямої m на фронтальній проекції не буде видно. Аналогічно визначається видимість прямої на горизонтальній проекції.

Властивість 3.6. Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна якійсь прямій у цій площині. На рис. 3.9 задано фронтальну проекцію m_2 прямої m, яка проходить через задану точку M паралельно площині ABC.

Для побудови горизонтальної проекції прямої m переріжемо площину фронтально проекціювальною площиною Σ по прямій DE. Площина Σ містить дві прямі m і DE. Побудувавши за відповідністю горизонтальну проекцію D_1E_1 прямої DE, що належить площині ABC, через точку M проведемо другу проекцію m_1 прямої m паралельно D_1E_1.

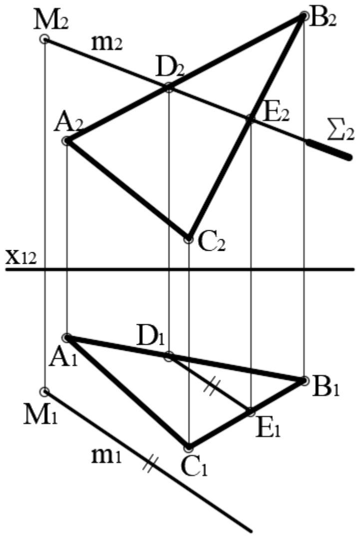


Рис. 3.9

3.5. Дві площини

За теоремою Грассмана у загальному випадку дві площини перетинаються по прямій лінії: $r = l + m - n = 2 + 2 - 3 = 1$. В окремих випадках лінія перетину площин може бути невласною і тоді площини є паралельними одна одній, або дві площини можуть збігатись.

Властивість 3.7. Дві площини є паралельними, якщо дві непаралельні між собою прямі однієї площини паралельні двом прямим другої площини. На рис. 3.10 задано слідами f і h площину Γ і точку M, що не належить цій площині. Для того, щоб через точку M провести площину Δ, яка паралельна заданій площині Γ, через цю точку проведемо дві прямі k і l, які паралельні відповідно слідам f і h.

У загальному випадку відносного розміщення двох площин виникає задача побудови лінії їх взаємного перетину. На рис. 3.11 одну площину (Σ) задано слідами f і h, а другу (Ω) – паралельними прямими m і n. Для побудови лінії (KL) перетину площин Σ і Ω площину Ω розглянемо як дві прямі m і n, для кожної з яких визначаємо точку перетину з площиною Σ так, як було показано на рис. 3.8. Наприклад, через пряму n проведено горизонтально проекціювальну площину Λ, яка перетинає площину Σ по прямій DE. Побудувавши фронтальну проекцію D_2E_2 прямої DE, визначаємо точку K перетину прямих DE і n. Аналогічно визначається точка L перетину прямої m з площиною Σ. Відрізок KL є лінією перетину площин Σ і Ω в межах прямих m і n. Видимість прямих f, h, m і n відносно відсіків площин Σ і Ω визначається за допомогою конкуруючих точок так, як було показано на рис. 3.8.

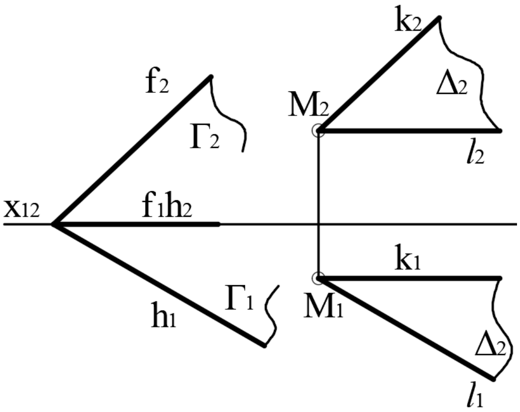


Рис. 3.10

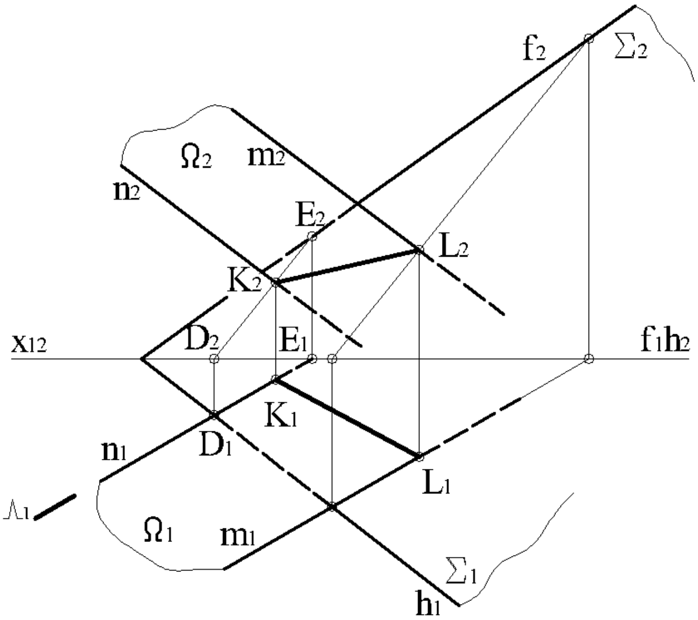


Рис. 3.11

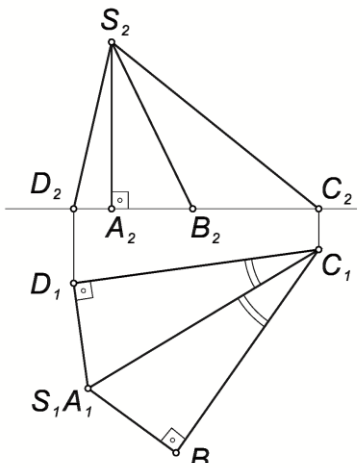
3.5 Побудова дахів

Більшість дахів будівель та споруд є гранними поверхнями, що утворюються в результаті перетину схилів. Найчастіше схили дахів мають однакові кути нахилу до горизонтальної площини.

Для побудови проекцій даху з рівно нахиленими схилами розглянемо наступну властивість.

Властивість 3.8.

Горизонтальною проекцією лінії перетину двох площин, рівно нахилених до горизонтальної площини проекцій, є бісектриса кута між горизонтальними слідами площин.



Розглянемо чотирикутну піраміду *SABCD* (рис. 3.12), у якої ребро *SA* є висотою, а в основі піраміди $AD \perp DC$ і $AB \perp BC$. Кути нахилу площин *SBC* та *SCD* до $П_1$ вимірюються відповідно плоскими кутами *SBA* і *SDA*. Площина *SAC* є площиною симетрії піраміди, тому $\angle DCA = \angle BCA$.

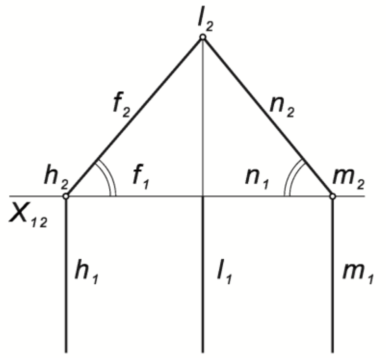


Рис. 3.13

В окремому випадку (рис. 3.13), коли горизонтальні сліди (*h* і *m*) рівнонахилених площин паралельні між собою, горизонтальна проекція l_1 лінії перетину площин проходить посередині між проекціями h_1 і *m* – горизонтальних слідів *h* і *m*.

Ця властивість використовується для побудови проекції даху на заданому плані.

Для побудови проекцій даху на заданому плані спочатку у плані проводять бісектриси всіх кутів плану та фіксують найближчі до контуру точки (*1* і *2*) перетину пар бісектрис (рис. 3.14, *а*). Далі аналізують лінії перетину яких схилів повинні пройти через побудовані точки, маючи на увазі, що в загальному випадку у кожній точці повинні зійтись три лінії перетину схилів. Так, наприклад, через точку *1* буде проходити лінія *13* перетину схилів *AB* і *CD*, а через точку *2* – лінія *24* перетину схилів *DE* і *AF* (рис. 3.14, *б*). Залишилось побудувати лінію перетину схилів *AF* і *CD*, яка є бісектрисою кута між зрізами CD і AF (рис. 3.14, *в*). Фронтальну проекцію даху будують за

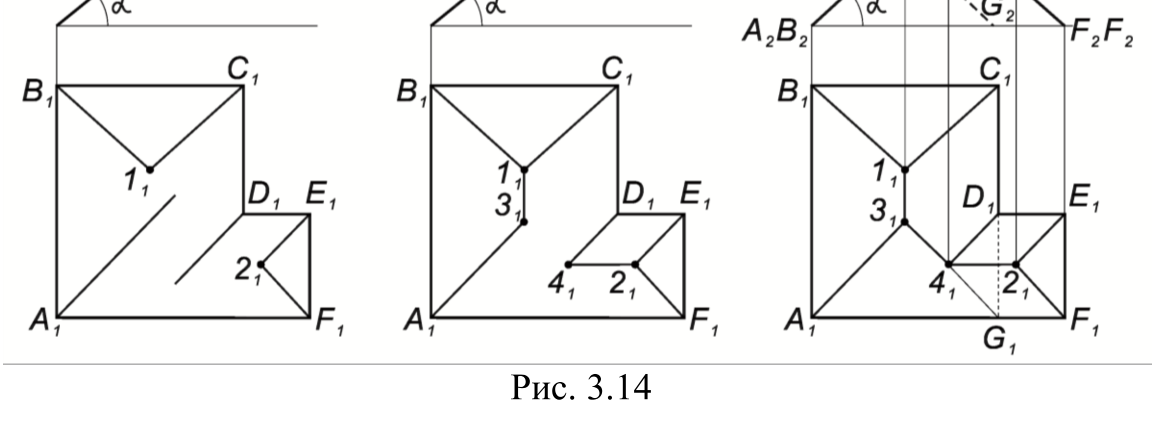


Рис. 3.14

відповідністю із врахуванням кута α нахилу схилів.

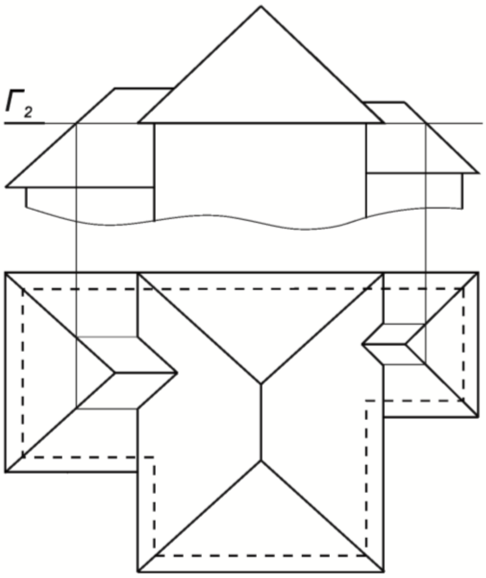
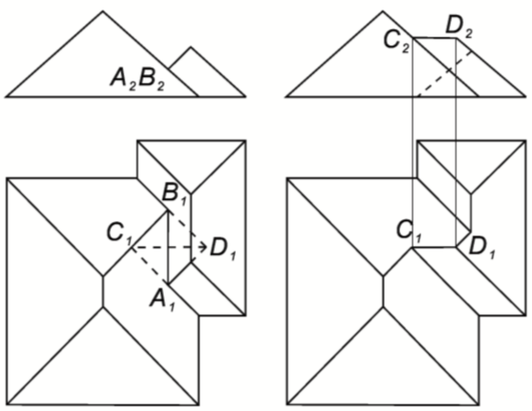


Рис. 3.15

На рис. 3.15. наведено випадок, коли дах перекриває об'єми різної висоти. Побудову такого даху зводять до попереднього випадку, перерізаючи схили горизонтальною площиною ***Г***, що проходить через найвищу лінію зрізу. За новим контуром плану в площині ***Г*** будують горизонтальну проекцію даху.

В окремих випадках перетин двох схилів даху може утворювати такі місця, де під час дощу не забезпечується швидке відведення води. Наприклад, на рис. 3.16, *а* показано таке місце в околі відрізка *AB* і в межах квадрату *ADBC*, схили *ABC* і *ABD* потрібно замінити схилами *BCD* і *ACD*, які утворюють гребінь даху, як показано на рис. 3.16, *б*.

Схожі випадки зустрічаються, коли прибудова примикає до стіни вищої споруди (рис. 3.17). У такому разі, в місці примикання дах не повинен мати схилу у бік стіни.



б

6

За такими самими правилами будують дахи на плані у вигляді довільного багатокутника (рис. 3.18). У таблиці 3.1 показано, бісектрисами яких кутів є горизонтальні проекції ліній перетину схилів даху.

Для побудови фронтальної проекції даху потрібно задати перевищення будь якої вершини над горизонтальною площиною зрізу даху (наприклад, вершина *9*). Фронтальна проекція першого гребня (наприклад, *gH*) будується за двома точками, перша з яких є відома вершина (*g*) даху, а друга (*M*) – точка перетину зрізів (*FE* і *AB*). Побудована точка H_2 разом з точкою N_2 визначає наступний гребінь *HK* і т.д.

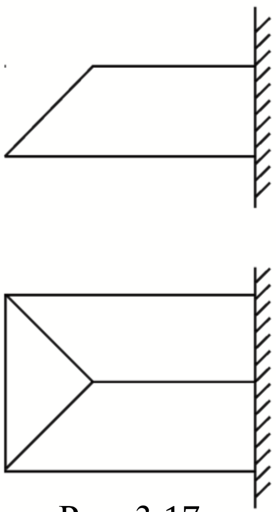


Рис. 3.17

Таблиця 3.1

№ п/п	Лінія перетину схилів	Лінія зрізу схилів
1	*AG*	*AF* і *AB*
2	*FG*	*AF* і *FE*
3	*BH*	*AB* і *BC*
4	*EK*	*FE* і *ED*
5	*DL*	*ED* і *DC*
6	*LC*	*DC* і *BC*
7	*GH*	*AB* і *FE*
8	*KL*	*ED* і *BC*
9	*HK*	*FE* і *BC*

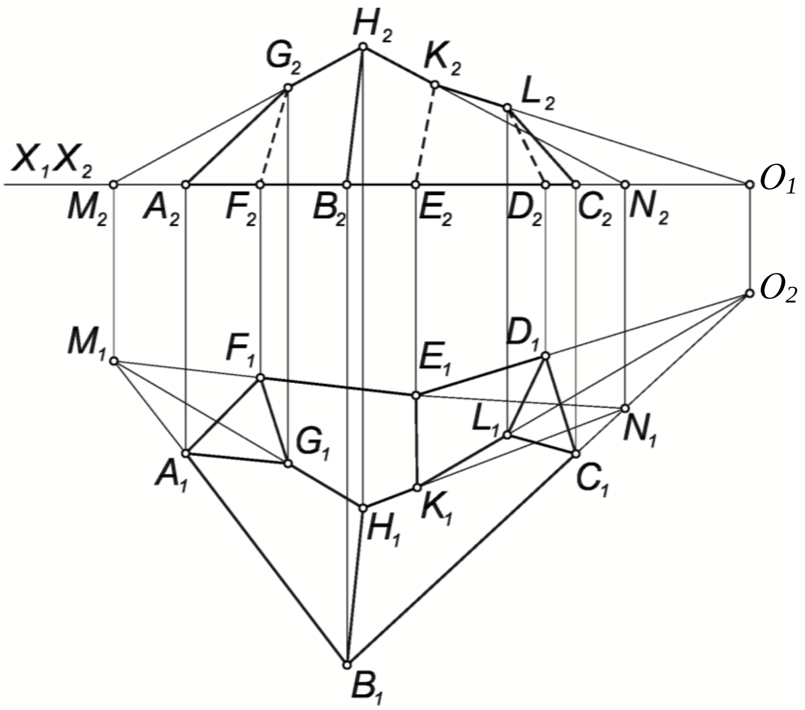


Рис. 3.18