# Лекція 4.
## Метричні властивості проекцій пар геометричних фігур

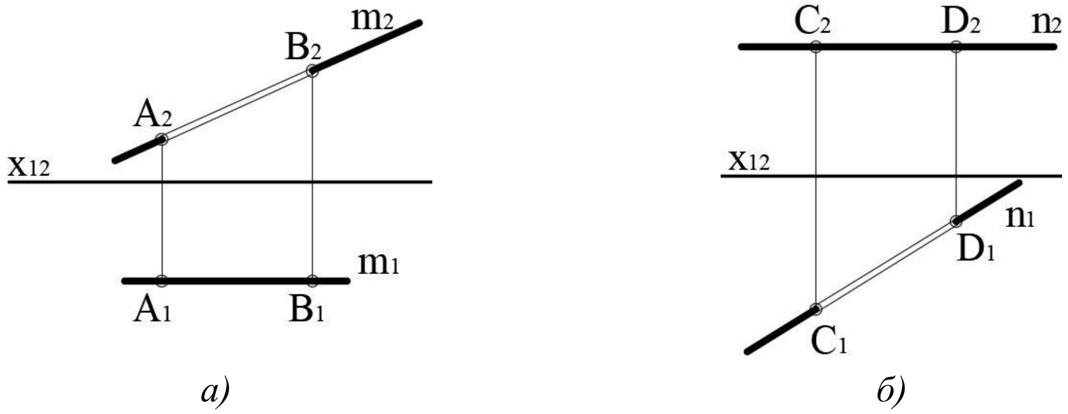
При довільному розміщенні у просторі геометричні фігури проекціюються зі спотвореннями. Наприклад, довжина прямокутної проекції відрізка прямої загального положення завжди менша, ніж довжина самого відрізка. Кут між прямими загального положення не дорівнює куту між їх проекціями тощо. Задачі на визначення метричних характеристик геометричних фігур (відстаней, кутів та площ) за їх проекціями називаються метричними задачами. Для їх розв’язання існують спеціальні способи, які дозволяють привести взаємне положення геометричних фігур і площин проекцій до окремного випадку, коли та чи інша метрична характеристика проекціюється без спотворення.

Якщо розглядати тільки елементарні геометричні фігури (точку, необмежену пряму і необмежену площину), то поняття відстані або кута має сенс тільки для пари таких фігур. Відстань між двома фігурами завжди вимірюється певним відрізком, а кут – певним плоским кутом.

Метричні властивості проекцій пар геометричних фігур відповідають на запитання: яке положення повинна займати пара фігур відносно площин проекцій, щоб ту чи іншу метричну характеристику можна було виміряти безпосередньо на проекції.

Між двома точками, точкою і прямою та точкою і площиною можна виміряти тільки відстань.

Властивість 1. Відстань між двома точками проекціюється у натуральну величину, якщо точки належать прямій, що паралельна до площини проекцій (рис.1).




*а)* *б)*

Рис. 1

Дійсно, відстань між двома точками вимірюється відрізком, який з'єднує ці точки, а він зобразиться без спотворення у тому разі, якщо буде відрізком прямої рівня. На рис.1 показано пари точок *A* і *B* та *C* і *D*, що належать відповідно фронтальній прямій *m* та горизонтальній прямій *n*. Натуральну величину відстані показано подвійною тонкою лінією.

Властивість 2. Відстань від точки до прямої проекціюється у натуральну величину, якщо пряма є лінією найбільшого нахилу площини, яка визначається заданими точкою і прямою, до площини проекцій.

На рис.2. точка *A* і пряма *m* визначають площину *ABC*. Відстань від точки *A* до прямої *m* вимірюється відрізком *AD*, який є горизонталлю площини *ABC*. Тоді пряма *m* є лінією найбільшого нахилу площини *ABC* до горизонтальної площини проекцій.

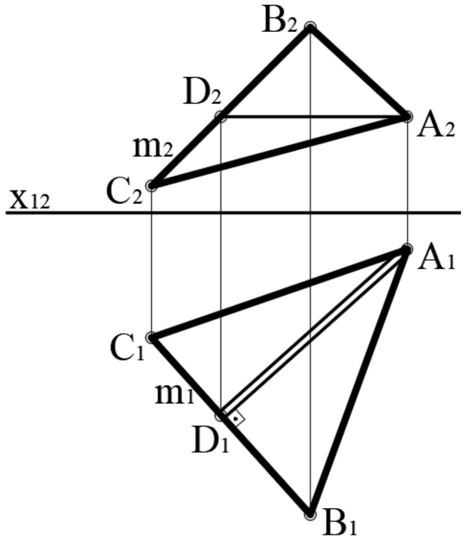



Рис. 2

В окремих випадках відстань від точки *A* до прямої *m* зображується у натуральну величину, якщо пряма *m* є проекціювальною (рис.3) або якщо точка *A* і пряма *m* належать площині рівня (рис.4). Саме такі окремі випадки найчастіше використовуються при розв'язанні метричних задач.

Властивість 3. Відстань від точки *A* до площини *Г* проекціюється без спотворення, якщо площина *Г* проекціювальна.

На рис.5 фронтально-проекціювальну площину *Г* задано слідами *f* і *h*. Відстань від точки *A* до цієї площини вимірюється відрізком *AB*, який є перпендикулярним до площини *Г* і паралельним до фронтальної площини проекцій.

Між іншими парами елементарних геометричних фігур залежно від їх взаємного розташування можна вимірювати як відстані, так і кути. Так, наприклад, між двома паралельними прямими можна виміряти відстань, а між прямими, що перетинаються – кут. Між двома мимобіжними прямими вимірюється як відстань, так і кут.

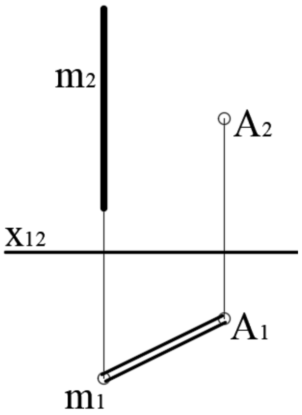



Рис. 3

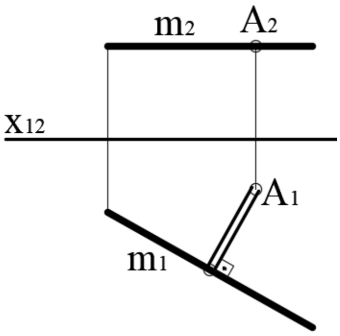



Рис. 4

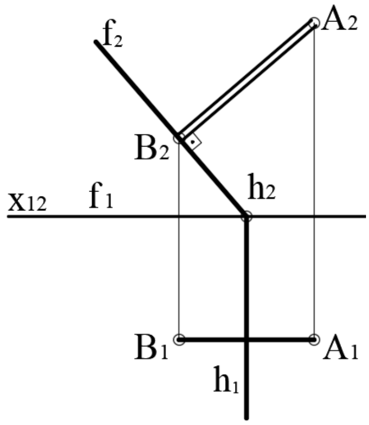



Рис. 5

<u>Визначення.</u> Кут між двома мимобіжними прямими (***кут мимобіжності***) вимірюється плоским кутом між двома прямими, що перетинаються і паралельні даними мимобіжними прямим.

На рис.6 задано дві мимобіжні прямі $m$ і $n$. Якщо через довільну точку $A$ провести прямі $k \| m$ і $l \| n$, то кут $\alpha$ між прямими $k$ і $l$ є кутом мимобіжності прямих $m$ і $n$.

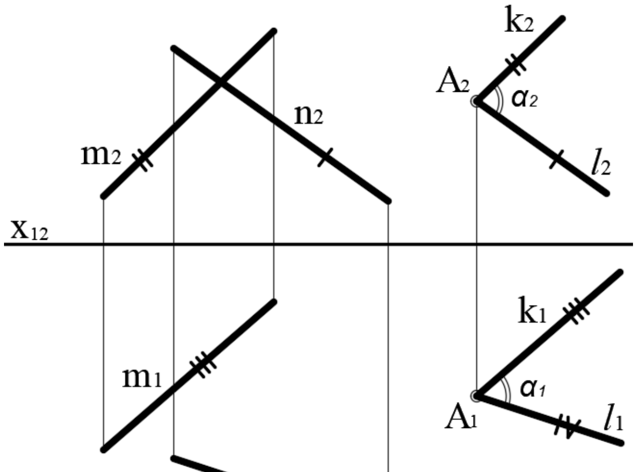



Рис. 6

<u>Властивість 4.</u> Кут між двома прямими (мимобіжними або такими, що перетинаються) проекціюється без спотворення, якщо обидві прямі паралельні до однієї площини проекцій.

На рис.7 показано дві горизонтальні мимобіжні прямі, на рис.8 – дві фронтальні прямі, що перетинаються. В обох випадках кут $\alpha$ між відповідними прямими зображається у натуральну величину.

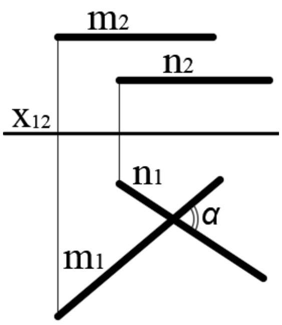


Рис. 7

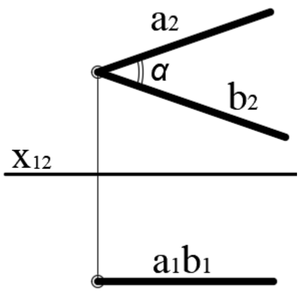


Рис. 8

<u>Властивість 5.</u> Прямий кут між двома прямими (мимобіжними або такими, що перетинаються) проекціюється без спотворення, якщо хоча б одна пряма паралельна до площини проекцій.

На рис.9 показано дві прямі $a$ і $b$, які перетинаються під прямим кутом. Пряма $b$ паралельна до горизонтальної площини проекцій. Для побудови горизонтальної проекції $a_1$ прямої а через неї проведено горизонтально-проекціювальну площину $\Delta$, яка перпендикулярна до прямої $b$. Але $b_1 \parallel b$, тому $b_1 \perp a_1$.

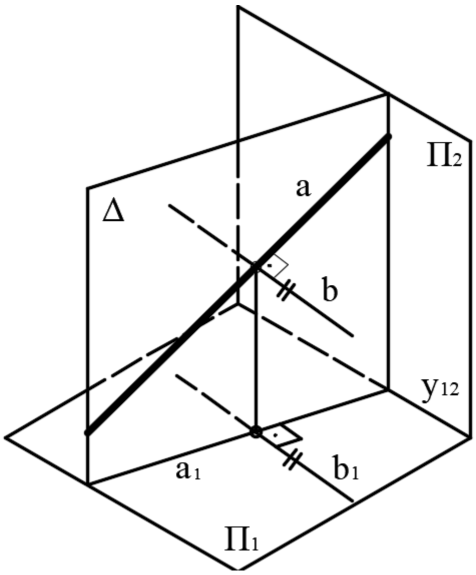


Рис. 9

На рис.10 прямий кут між перетинними прямими $a$ і $b$ зображується без спотворення на $П_1$, оскільки $b \parallel П_1$. На рис.11 прямий кут між мимобіжними прямими $m$ і $n$ проекціюється у натуральну величину на $П_2$, тому що $m \parallel П_2$.

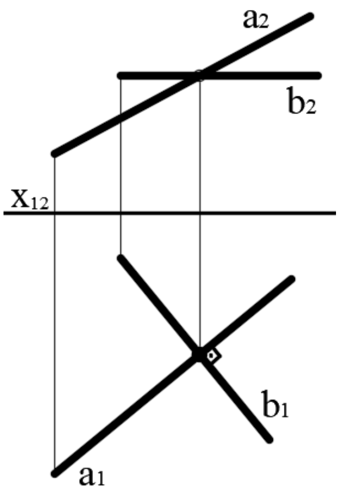



Рис. 10

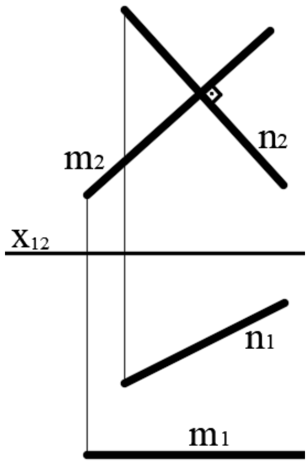



Рис. 11

Властивість прямого кута між двома прямими використовується для побудови ***ліній найбільшого нахилу*** площини загального положення до площин проекцій $\Pi_1$ і $\Pi_2$ (рис.12). Лінія (*BD*) найбільшого нахилу площини (*ABC*) до горизонтальної площини проекцій складає прямий кут з горизонталлю (*CH*) цієї площини. Лінія (*BE*) найбільшого нахилу площини до $\Pi_2$ складає прямий кут з фронталлю.

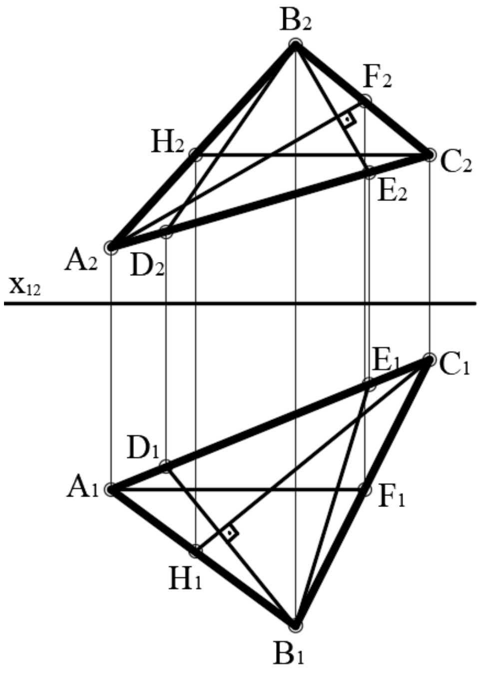



Рис. 12

<u>Властивість 6.</u> Відстань між мимобіжними прямими зображується у натуральну величину, якщо площина їх паралелізму є проекціювальною. Площиною паралелізму двох прямих є площина, яка одночасно паралельна обом прямим.

У випадку, показаному на рис.13, мимобіжні прямі $a$ і $b$ мають вертикальну площину паралелізму *Г*. Горизонтальні проекції $a_1$ і $b_1$ прямих $a$ і $b$ паралельні між собою, а відстань між ними вимірюється відрізком спільного перпендикуляра.

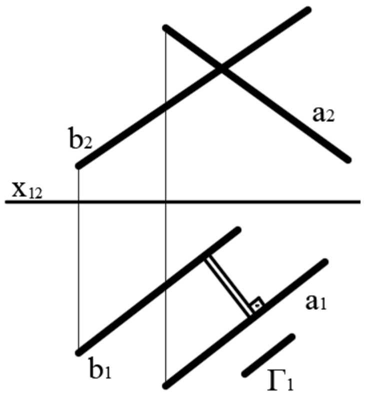



Рис. 13

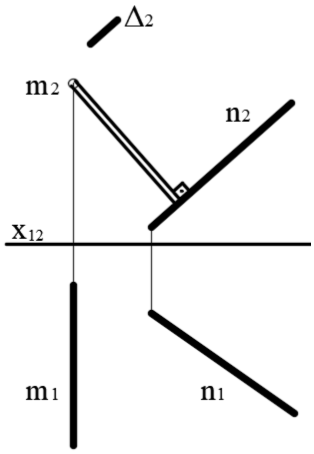



Рис. 14

В окремому випадку відстань між мимобіжними прямими проекціюється у натуральну величину, якщо одна з них перпендикулярна до площини проекцій (рис.14). У цьому випадку площина паралелізму прямих $\Delta$ також є проекціювальною.

<u>Властивість 7.</u> (рис.15). Відстань між паралельними прямими проекціюється у натуральну величину, якщо прямі є лініями найбільшого нахилу площини, яку вони визначають, до площини проекцій.

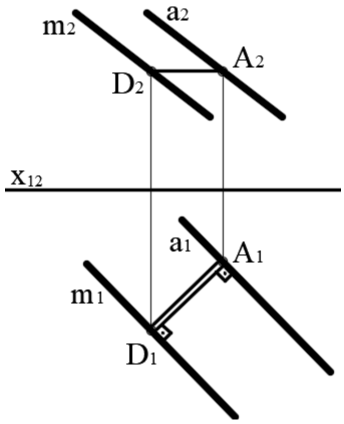



Рис. 15

На прямій *a* взято довільну точку *A*. Відстань *AD* від точки *A* до прямої $m$ і буде відстанню між паралельними прямими $a$ і $m$. Тоді доведення властивості 7 зводиться до властивості 2 (рис.2).

На рис.16 і 17 показано окремі випадки властивості 7, коли обидві прямі є проекціювальними (рис.16) або належать одній площині рівня (рис.17).

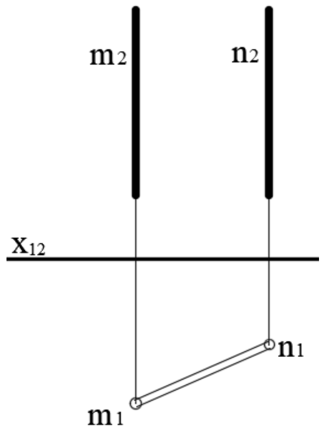



Рис. 16

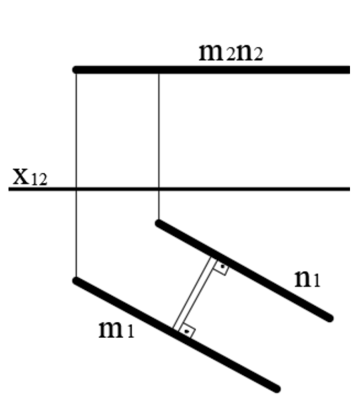



Рис. 17

<u>Властивість 8.</u> (рис.18). Відстань від точки до площини або відстань від прямої до паралельної їй площини зображується у натуральну величину, якщо площина є проекціювальною.

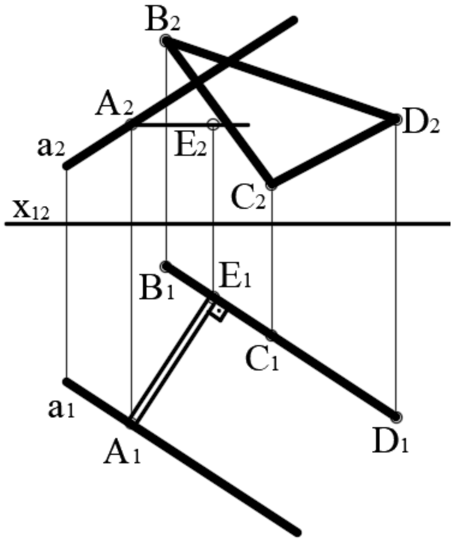



Рис. 18

Відстань від точки *A* до площини *BCD* вимірюється перпендикуляром *AE* до площини. Якщо площина *BCD* перпендикулярна до площини проекцій, то відрізок *AE* паралельний до тієї ж площини проекцій, і тому зображується у натуральну величину.

*Якщо* через точку *A* провести пряму *a* паралельну площині *BCD*, то відрізок *AE* вимірюватиме відстань від прямої а до площини *BCD*.

<u>Визначення</u>. Кут між прямою і площиною вимірюється плоским кутом, утвореним самою прямою і її прямокутною проекцією на цю площину. На рис.19 відрізок *КВ* є ортогональною проекцією відрізка *АК* на площину *Г*. Плоский кут *АКВ* є кутом між прямою *l* і площиною *Г*.

<u>Властивість 9.</u> (рис.20). Кут між прямою і площиною проекціюється у натуральну величину, якщо пряма паралельна, а площина перпендикулярна до однієї і тієї ж площини проекцій. Дійсно, якщо пряма *l* паралельна до площини проекцій $П_1$, а площина *Г* перпендикулярна до $П_1$, то площина $АКВ \parallel П_1$ і кут *АКВ* проекціюється у натуральну величину.

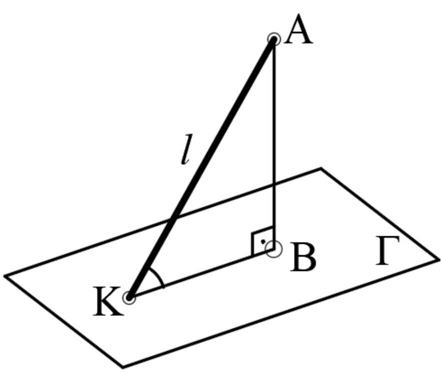



Рис. 19

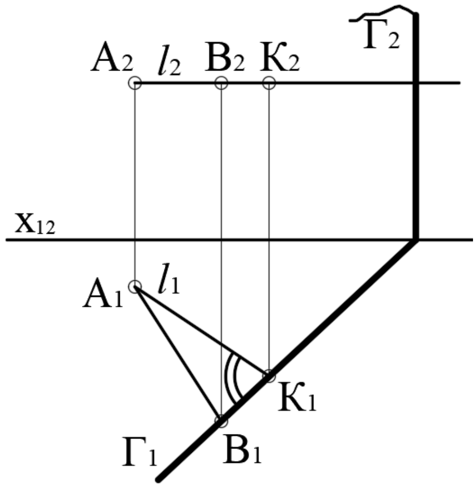



Рис. 20

<u>Визначення</u>. **Двогранним кутом** називається кут між двома площинами (*Г* і *Δ*). Він вимірюється плоским кутом *α*, який утворюється при перерізі двох даних площин (*Г* і *Δ*) третьою (*Σ*), перпендикулярною до перших двох (рис.21).

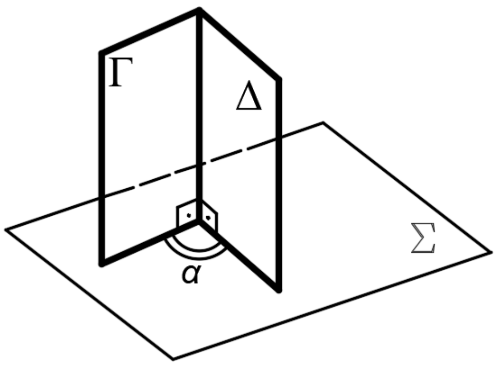
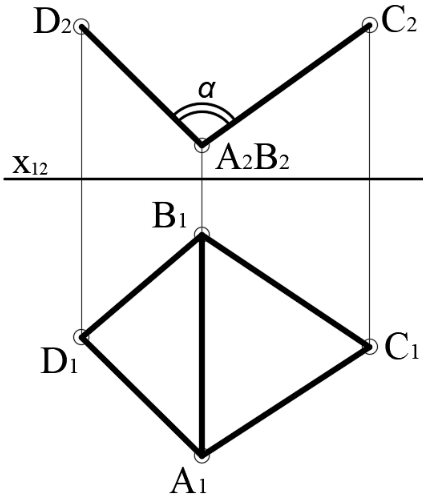


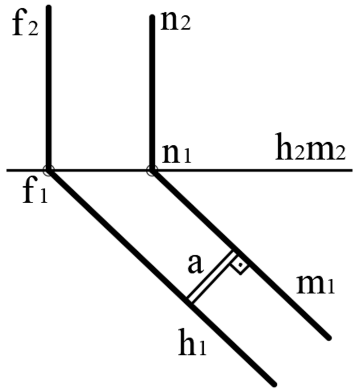

Рис. 21

Властивість 10. Двогранний кут між двома площинами, що перетинаються, або відстань між двома паралельними площинами зображається у натуральну величину, якщо обидві площини перпендикулярні до однієї площини проекцій.

На рис.22, *а*, показано дві фронтально-проекціювальні площини *ABC* і *ABD*, кут $\alpha$ між якими зображається у натуральну величину на $\Pi_2$. На рис.22, *б*, відстань а між паралельними площинами проекціюється у натуральну величину на $\Pi_1$.




*а)*




*б)*

Рис. 22

***Перпендикуляром до площини*** називається пряма, яка перпендикулярна до двох непаралельних прямих, що належать цій площині.

Властивість 11. Фронтальна та горизонтальна проекції перпендикуляра до площини утворюють прямий кут відповідно з фронтальною проекцією фронталі та горизонтальною проекцією горизонталі цієї площини.

Властивість проекцій перпендикуляра до площини випливає з властивості проекцій прямого кута (властивість 5). При цьому сторонами прямого кута, паралельними до площин проекцій, є горизонталь і фронталь площини.

На рис.23 показано дві проекції площини $\sum$, заданої трикутником *ABC*. З довільної точки *P* побудовано перпендикуляр *p* до площини $\sum$. Для цього спочатку у площині трикутника побудовано фронталь *f* та горизонталь *h*. З фронтальної проекції $P_2$ точки *P* проведено фронтальну проекцію $p_2$ перпендикуляра *p* під прямим кутом до фронтальної проекції $f_2$ фронталі *f*. З горизонтальної проекції $P_1$ точки *P* проведено горизонтальну проекцію $p_1$ перпендикуляра *p* під прямим кутом до горизонтальної проекції $h_1$ горизонталі *h*.

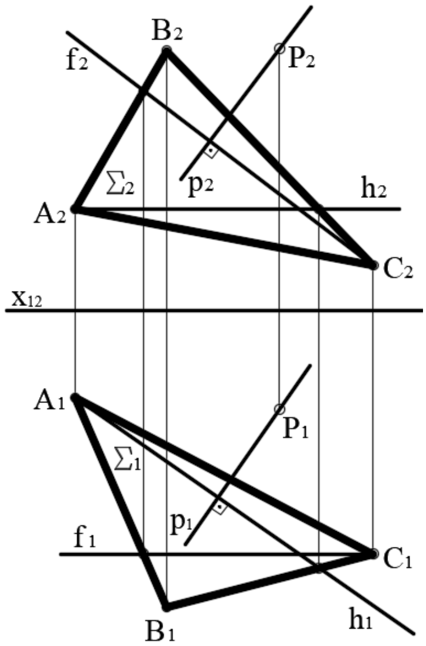
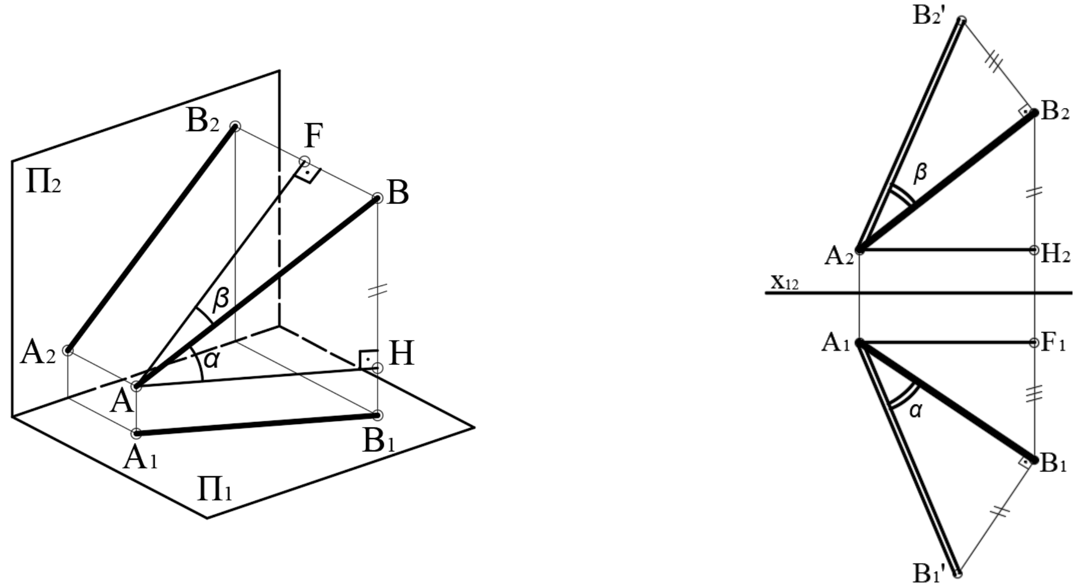



Рис.23

**Спосіб прямокутного трикутника**

Основною метричною задачею нарисної геометрії вважається визначення довжини відрізка загального положення за заданими прямокутними проекціями.

На рис.24, *а* показано відрізок *AB* прямої загального положення у просторі, на рис.24, *б* – на комплексному рисунку.




*а)* *б)*

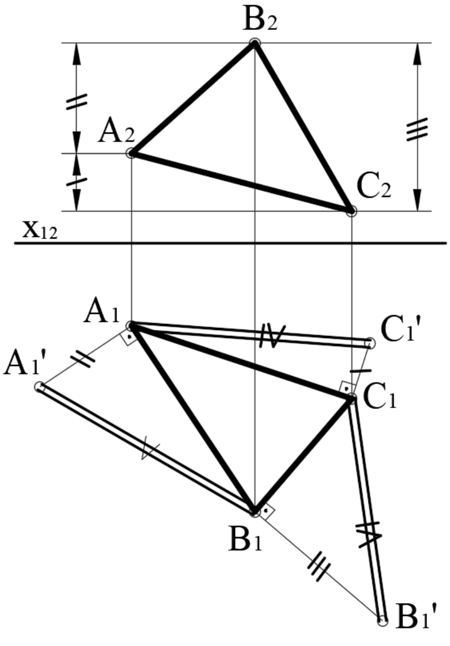
Рис. 24

Необхідно за заданими проекціями (рис.24, *б*) $A_1B_1$ і $A_2B_2$ відрізка $AB$ визначити його довжину у просторі. Якщо з точки $A$ (рис.24, *а*) провести пряму $AH \parallel \Pi_1$, утвориться прямокутний трикутник $ABH$, гіпотенуза якого дорівнює довжині відрізка $AB$. Будь-який прямокутний трикутник можна побудувати, якщо відомі значення його катетів. Катет $AH$ має таку ж довжину, як горизонтальна проекція $A_1B_1$ відрізка. Катет $BH$ можна визначити як перевищення точки $B$ над точкою $H$. Прийнявши $A_1B_1$ за один з катетів трикутника, до нього можна прибудувати катет $B_1B_1'=B_2H_2$ і визначити довжину гіпотенузи $A_1B_1'=AB$. Кут $\alpha$ трикутника $B_1A_1B_1'$ дорівнює куту нахилу відрізка $AB$ до горизонтальної площини проекцій $\Pi_1$.

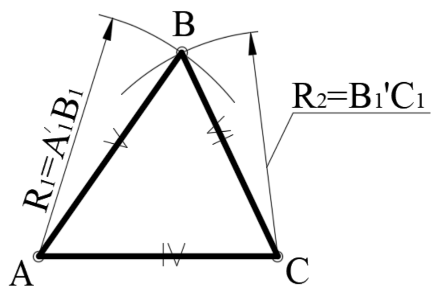
Так само можна визначити кут $\beta$ нахилу відрізка до $\Pi_2$, побудувавши у просторі прямокутний трикутник $AFB$, у якого катет $AF=A_2B_2$, а відрізок $FB$ показує, наскільки точка $B$ знаходиться ближче, ніж точка $A$. На рис.24, *б*, цей трикутник прибудовано до фронтальної проекції $A_2B_2$ відрізка $AB$, де катет $B_2B_2'$ дорівнює відстані $F_1B_1$. Отримано таку саму довжину $A_2B_2'= A_1B_1'$ відрізка $AB$ і кут $\beta$ його нахилу до площини $\Pi_2$.

За допомогою способу прямокутного трикутника можна розв'язати більшість метричних задач нарисної геометрії.

**Приклад 1.** Визначити натуральну величину довільного трикутника $ABC$ (рис.25).




*а)*




*б)*

Рис.25

Способом прямокутного трикутника визначено довжини всіх сторін трикутника (рис.25, *а*). Потім за трьома відомими сторонами за допомогою засічок побудовано натуральну величину трикутника $ABC$.

**Приклад 2.** Визначити кут нахилу прямої $m$ загального положення до площини $\sum (f, h)$ загального положення (рис.27).

Кут нахилу прямої $m$ до площини $\sum$ вимірюється плоским кутом між прямою $m$ та її ортогональною проекцією $PK$ на площині $\sum$ (рис.26). Такий самий кут доповнює до $90^{O}$ кут $PAK$ між прямою $m$ та перпендикуляром $n$. Отже, достатньо визначити величину кута $PAK$ і доповнити його до $90^{O}$.

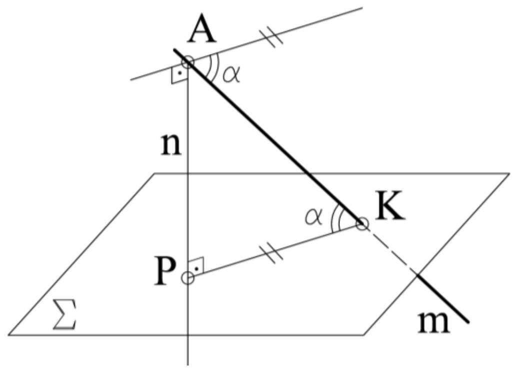
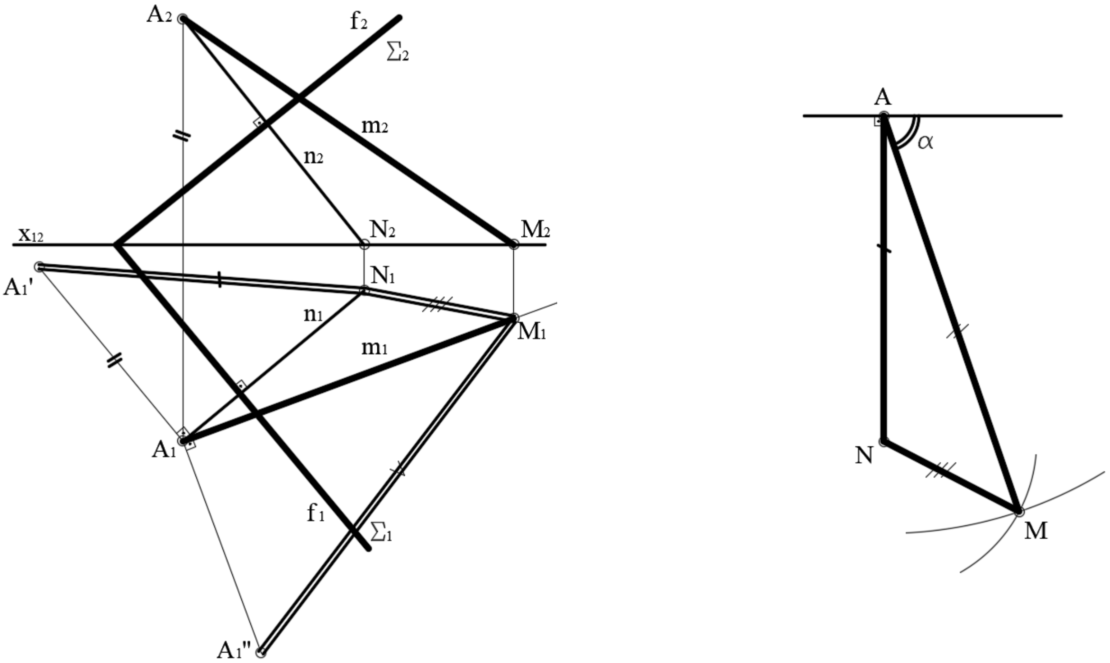



Рис.26

На прямій $m$ призначено довільну точку $A$, через яку згідно з властивістю 11 побудовано проекції $n_1$ і $n_2$ перпендикуляра $n$ до площини $\sum$ (рис.27).




*а)* *б)*

Рис.27

Побудовано точки $M$ і $N$ перетину відповідно прямої $m$ і перпендикуляра $n$ з горизонтальною площиною проекцій. Натуральну величину утвореного трикутника $AMN$ (рис.27, *б*) побудовано за трьома сторонами $MN$, $AM$ і $AN$. Натуральну величину *MN* виміряно безпосередньо на $П_1$, а натуральні величини сторін *AM* і *AN* визначено способом прямокутного трикутника.

**Приклад 3.** Визначити відстань від точки *A* до прямої *l* загального положення.

Відстань від точки до прямої – це довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму. Для розв'язання задачі потрібно через точку А провести площину, перпендикулярну до заданої прямої, і знайти точку перетину цієї площини з прямою. Відстань від точки перетину до заданої точки і визначить відстань від точки до прямої.

На рис.28 задано пряму *l* загального положення та точку *A*. Площину, перпендикулярну до прямої *l*, задано лініями рівня, відповідно до властивостей проекцій перпендикуляра до площини, яким виступає пряма *l*: $h_1 \perp l_1$ та $f_2 \perp l_2$.

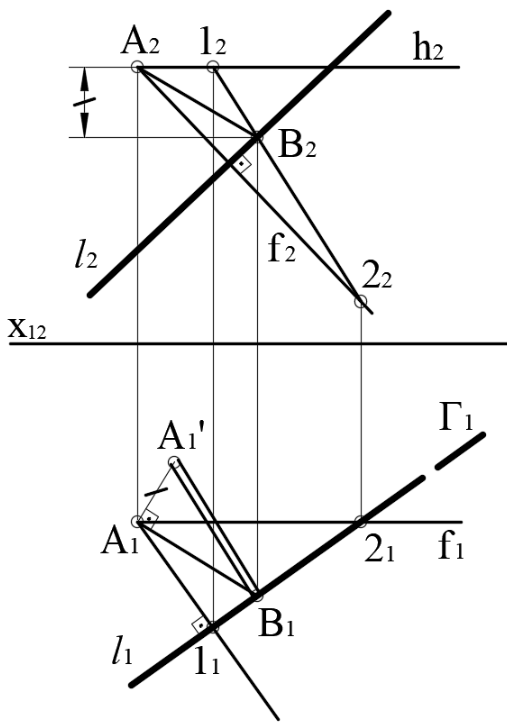



Рис.28

Для визначення точки перетину прямої *l* з побудованою площиною через пряму *l* проведено допоміжну вертикальну січну площину *Г*. Вона перетинає площину (*f*, *h*) по лінії *1-2*. Точку В перетину прямої *l* і площини (*f*, *h*) знайдено на перетині фронтальних проекцій $1_2 2_2$ та $l_2$. Відрізок *AB* є проекцією відстані від точки *A* до прямої *l*. Для визначення дійсного значення відстані знайдено натуральну величину відрізка *AB* способом прямокутного трикутника.