

Лекція 6

Розгортки багатогранних і кривих поверхонь

Розгорткою відсіку поверхні називають плоску фігуру, що утворюється при суміщенні відсіку поверхні з площиною при його розгинанні. Деякі геометричні властивості елементів поверхонь не змінюються при розгортці. Так, лінія поверхні переходить у лінії розгортки; довжини ліній, розміри плоских кутів та площ, обмежених замкненими лініями, зберігаються.

Точну розгортку можна побудувати лише для багатогранників та відсіків розгортних поверхонь (циліндра, конуса, торса). Поверхню багатогранника завжди можна сумістити з площиною, адже вона складається з плоских відсіків. Однак при послідовному суміщенні граней складних багатогранників з площиною можуть бути накладки на фігурі розгортки. Побудова точної розгортки розгортної поверхні пов'язана з обчисленням довжини кривої лінії, що є непростим завданням. Тому розгортки, як правило будують наближено. Винятком є циліндри та конуси обертання, для яких можна легко визначити параметри розгортки.

Інженерна практика часто потребує розв'язування задач виготовлення виробів, що мають форму нерозгортних поверхонь, з листового матеріалу. Отже виникає потреба у побудові розгортки нерозгортних поверхонь, що суперечить самому визначенню нерозгортної поверхні. Для розв'язування цієї задачі нерозгортну поверхню апроксимують відсіками розгортних або площин, після чого будують розгортку. Сукупність розгорток відсіків розгортних поверхонь або площин, якими замінюється нерозгортна поверхня, називають *умовною наближеною розгорткою нерозгортної поверхні*.

Побудова розгортки поверхні багатогранника

Для побудови розгортки багатогранника всі його грані суміщують з площиною проекцій або з площиною яка паралельна площині проекцій, щоб запобігти спотвореному зображенню граней. Можна рекомендувати два способи: обертання граней навколо спільних ребер, які паралельні площині проекцій; другий – побудова неспотворених величин граней за визначеними довжинами ребер (для трикутних граней).

На рис.1 побудовано розгортку тригранної піраміди $ABCS$ на горизонтальну площину її основи. Для цього кожен грань обертають навколо її горизонталі – ребра основи. Побудову розгортки почато з обертання грані SBC навколо горизонталі BC . Проекції B_1 і C_1 при обертанні не змінюють свого положення, а вершина S

переміщується у просторі по колу, площина якого перпендикулярна до осі обертання BC .

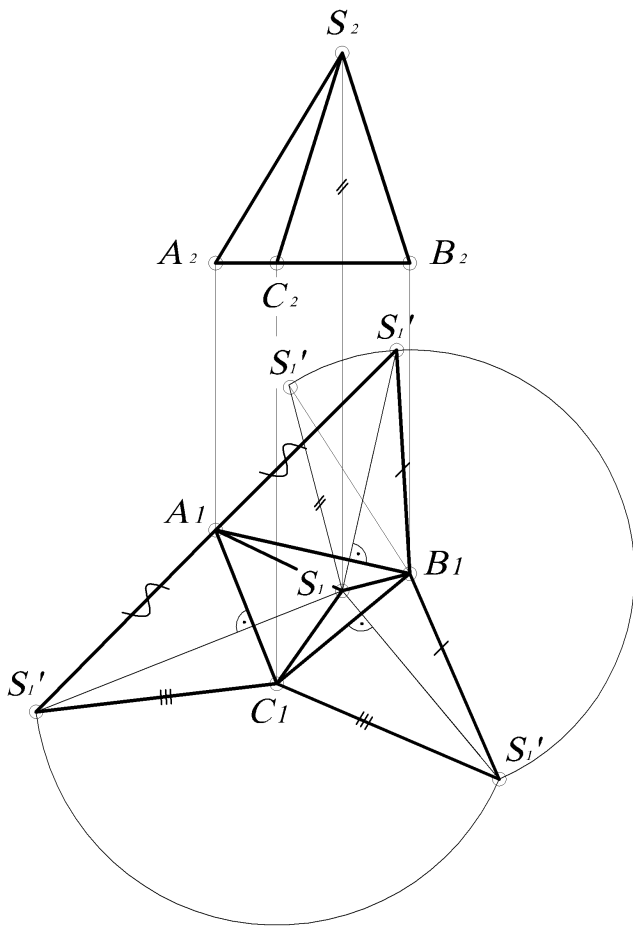


Рис.1

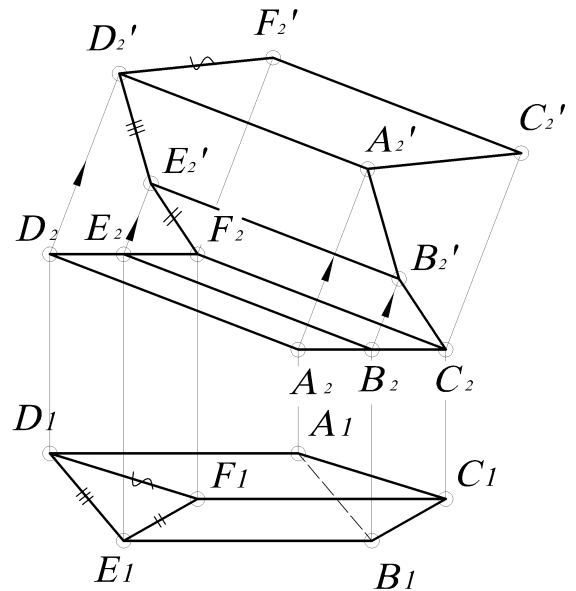


Рис.2

Горизонтальну проекцію цієї площини є пряма, перпендикулярна до проекції B_1C_1 . Щоб визначити положення точки S_1' розгортки, спочатку знаходять натуральну величину ребра SB за способом прямокутного трикутника, а потім відстань $S_1'B_1$ відкладають від точки B_1 засічкою на перпендикулярі. Трикутник $S_1'B_1C_1$ є натуральною величиною грані SBC . Бічні грані SAB і SAC піраміди обертають навколо AB і AC . Для побудови використано натуральні величини ребер $S_1'B_1$ і $S_1'C_1$, отримані при обертанні першої грані. Побудована плоска фігура є розгорткою поверхні піраміди на горизонтальну площину її основи.

На рис.2 показано побудову розгортки бічної поверхні призми з фронтальними ребрами послідовним обертанням граней навколо бічних ребер до суміщення граней з фронтальною площиною, що проходить через ребро CF . Вершини багатогранника переміщуються у фронтально проекціювальних площинах, перпендикулярних до ребра CF . Для побудови використано те, що ребра основ призми горизонтальні й зображуються на горизонтальній проекції без спотворення.

Якщо всі ребра багатогранника знаходяться в загальному положенні, то спочатку визначають їх натуральні величини, а потім будують розгортку.

На рис.3,а зображено тригранну піраміду в загальному положенні. За способом прямокутного трикутника визначають натуральні величини ребер. На рис.3,б спочатку побудовано грань ABS . Для цього на довільній прямій відкладають натуральну величину ребра AB і із точок A і B засічками, які дорівнюють натуральним величинам ребер AS і BS , знаходять точку S . Точки C' , C'' і C''' розгортки будують за допомогою засічок із вершин A , B і S грані ASB .

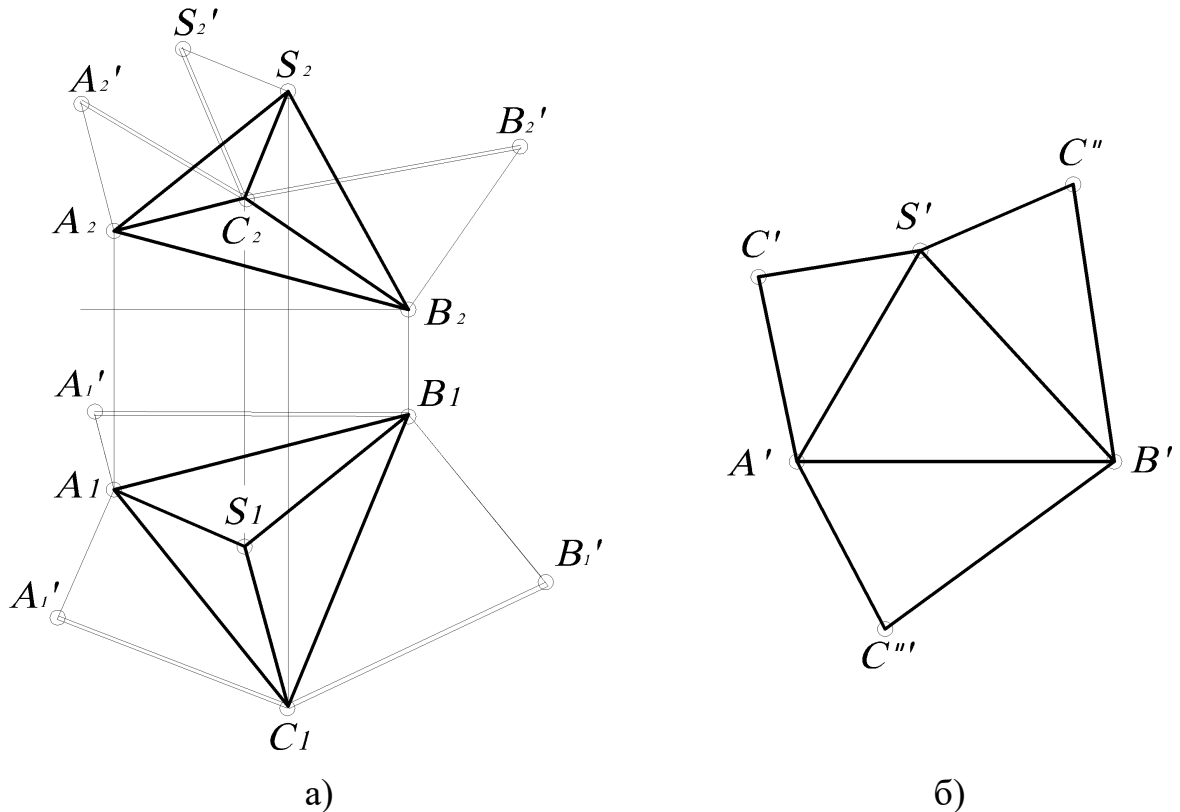


Рис.3

Розгортки циліндричних і конічних поверхонь

Розгортку відсіку циліндра обертання (рис.4) можна побудувати точно, оскільки довжина розгортки l дорівнює довжині кола нормального перерізу циліндра горизонтальною площиною $\Gamma: l = 2\pi r$, де r - радіус кола нормального перерізу.

Для побудови розгортки ліній перерізу циліндра площинами Δ і Ω коло його нормального перерізу поділено на 12 однакових частин. На 12 однакових частин поділяють також відрізок прямої, який є розгорткою нормального перерізу. Довжина кожної твірної циліндра перенесена на розгортку за відповідністю.

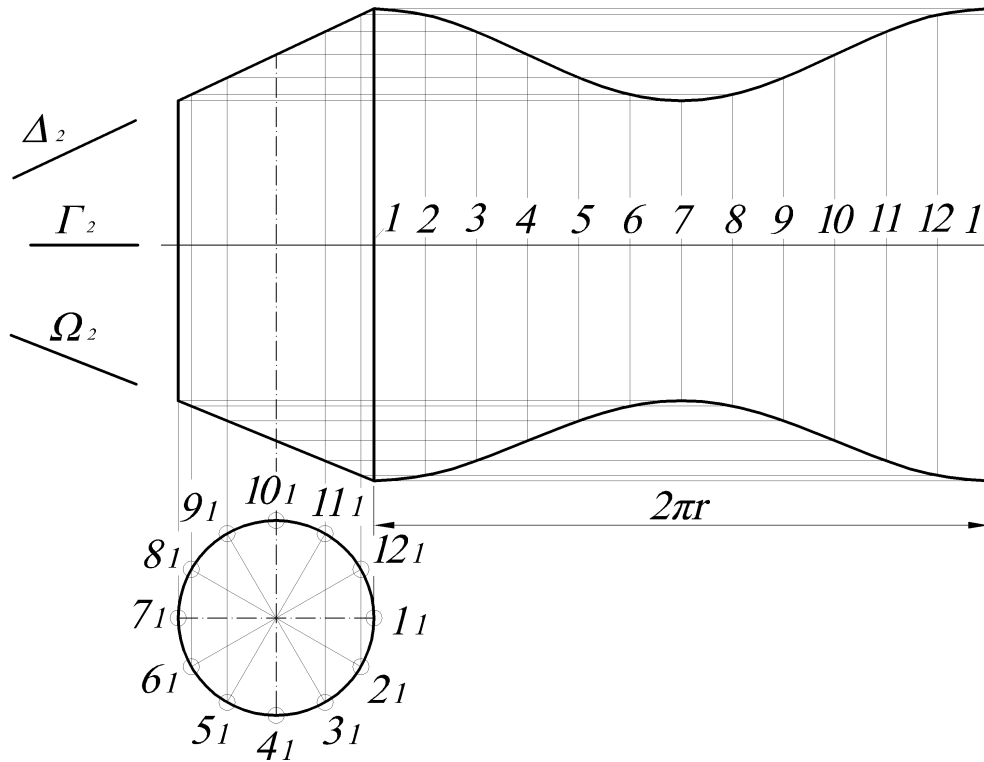


Рис.4

Розгорткою конуса обертання (рис..5) є сектор, довжина дуги якого дорівнює довжині кола основи конуса $2\pi r$.

Щоб побудувати точну розгортку, визначають кут між двома граничними радіусами сектора за формулою $\varphi = 360^\circ r : l$, де r - довжина радіуса основи конуса, а l - довжина твірної конуса.

Для побудови розгортки будь-якого перерізу конуса, наприклад площиною Γ , на поверхні конуса та на розгортці визначають певну кількість твірних з постійним кроком. Довжину відрізка кожної твірної від вершини S до перерізу визначають її обертанням навколо осі конуса до фронтального положення. Щоб визначити, наприклад, довжину відрізка SA , його повертають до фронтального положення S_2A_2' і тоді відкладають на відповідній твірній розгортки від вершини S_2 .

Розгортки циліндрів і конусів, які не є поверхнями обертання, будують наближено. На рис.6 еліптичний циліндр задано в загальному положенні, тому його твірні зображуються на проекціях спотворено. Для побудови розгортки його поверхні спочатку замінюють фронтальну площину проекцій так, щоб на новий площині проекцій твірні зобразились в натуральну величину. Потім бічну поверхню циліндра апроксимують призмою, бічні ребра якого збігаються з дискретним каркасом твірних циліндра.

Розгортку призми будують так само, як у прикладі, наведеному на рис.2. Точність розгортки залежить від кроку дискретного каркаса твірних.

Для побудови розгортки конуса (рис.7) його апроксимують пірамідою, ребра якої збігаються з дискретним каркасом прямолінійних твірних конуса.

Розгортка піраміди за своїми розмірами наближається до розгортки конуса. Точність цього наближення залежить від кроку дискретного каркаса твірних конуса. Натуральні величини твірних конуса визначають їх обертанням навколо вертикальної осі, що проходить через вершину конуса. Твірна SI , наприклад, повернута в положення SI' , фронтальна проекція якого S_2I_2' є натуральною величиною SI . Після визначення натуральних величин усіх твірних розгортку поверхні будують як сукупність трикутників, усі сторони яких відомі. Для побудови лінії будь-якого перерізу конуса (наприклад, площиною Γ) на розгортці спочатку виявляють положення точок перерізу на натуральних величинах твірних, а потім – на твірних розгортки.

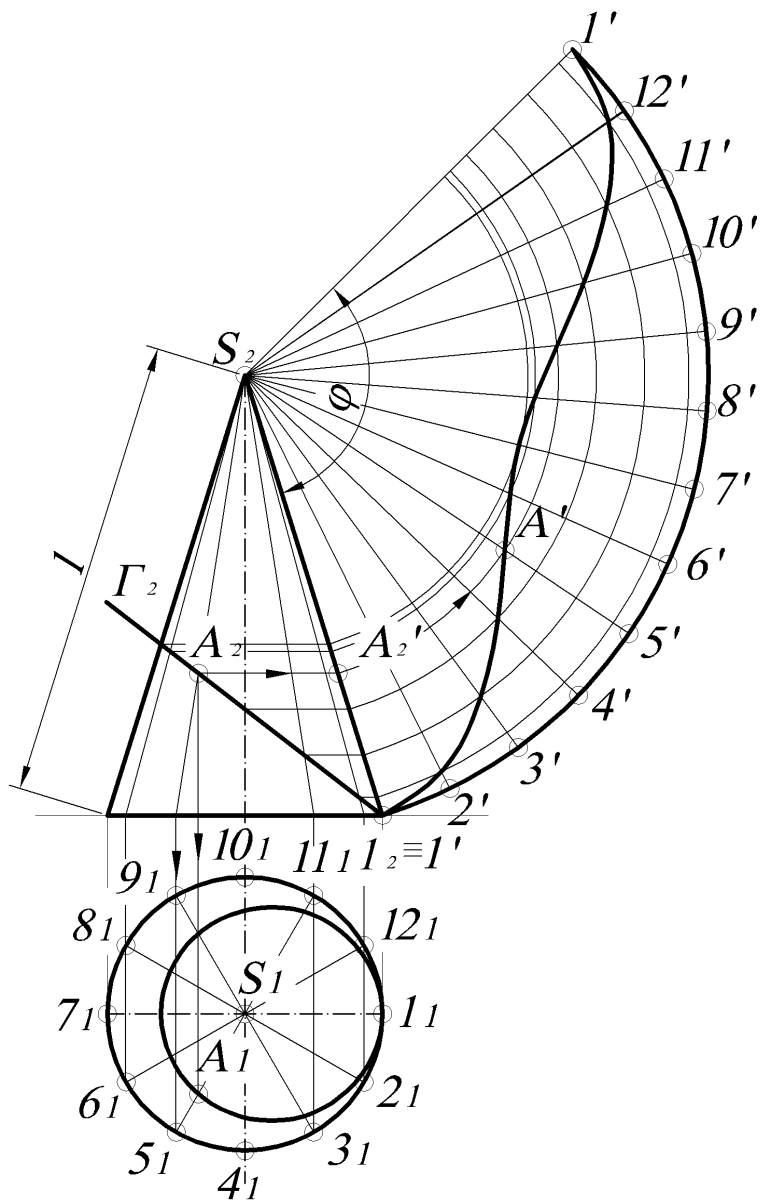


Рис.5

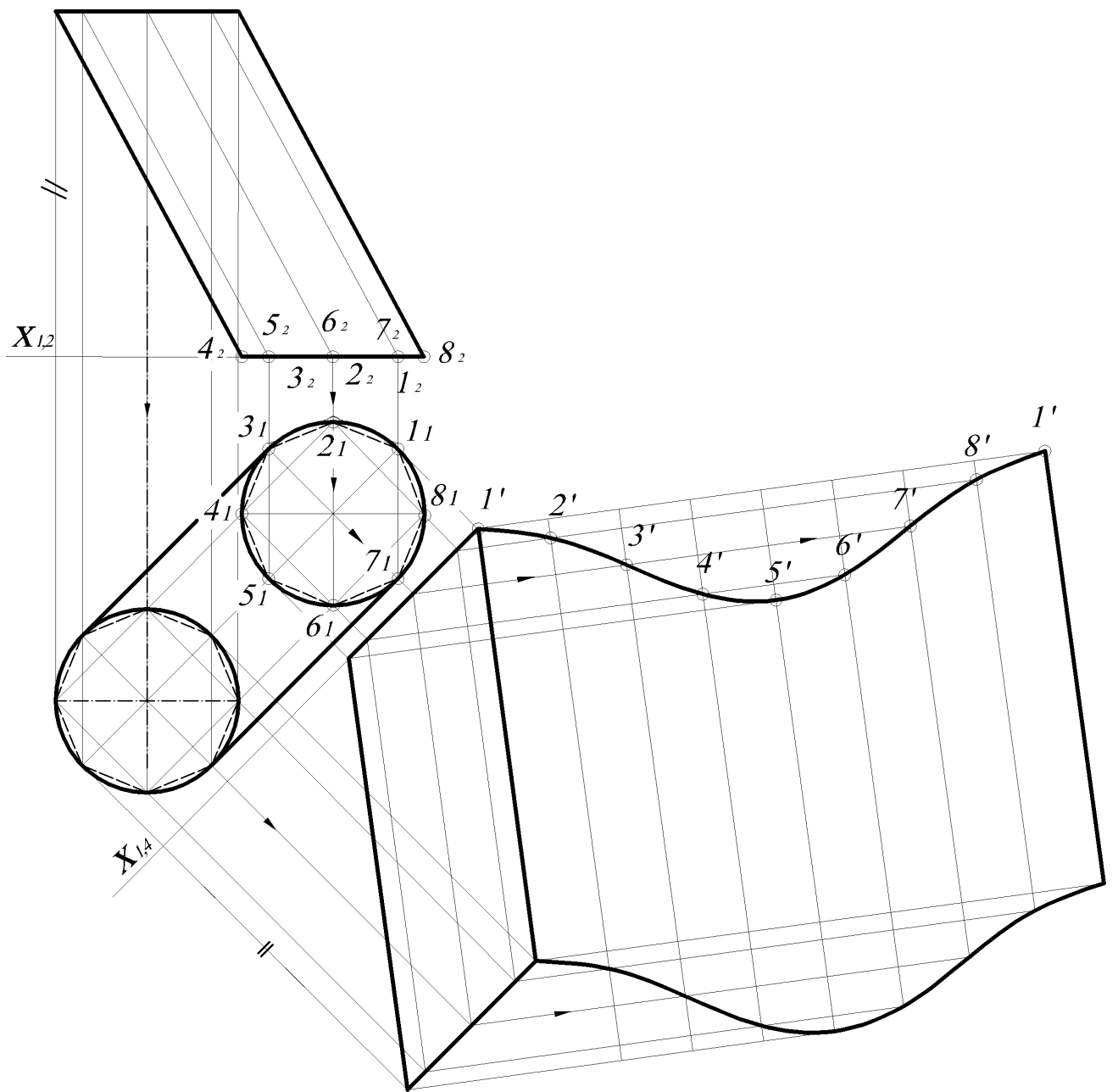


Рис.6

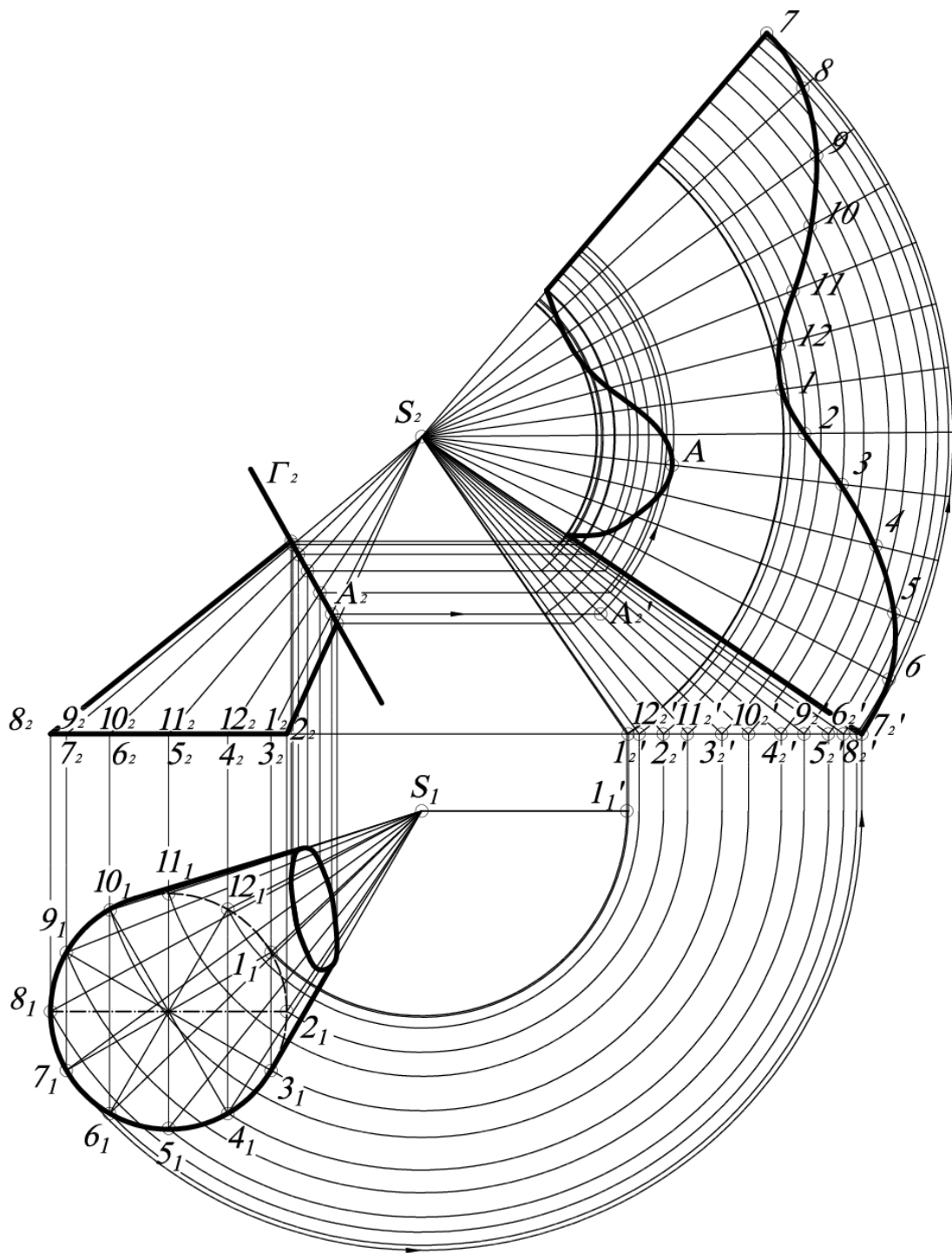


Рис.7

Умовні розгортки нерозгортних поверхонь

Для побудови наближених умовних розгорток нерозгортних поверхонь спочатку їх апроксимують розгортними поверхнями, або багатогранниками з наступною розгорткою відсіків апроксимуючих поверхонь або багатогранників.

Один із способів побудови розгортки поверхні обертання (наприклад, сфери) полягає в тому, що поверхню розрізають площинами, які проходять через вісь поверхні, на кілька однакових відсіків (рис.8). Після цього один відсік наближено

замінюють відсіком циліндричної поверхні і будують його розгортку. Отриману фігуру повторюють стільки разів, на скільки частин розрізано поверхню обертання.

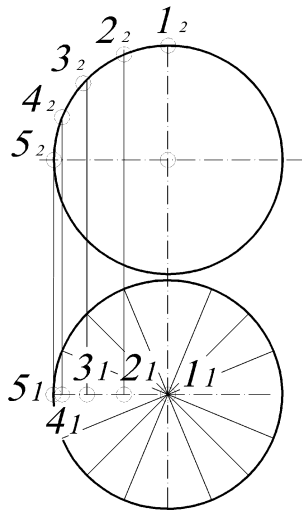


Рис.8

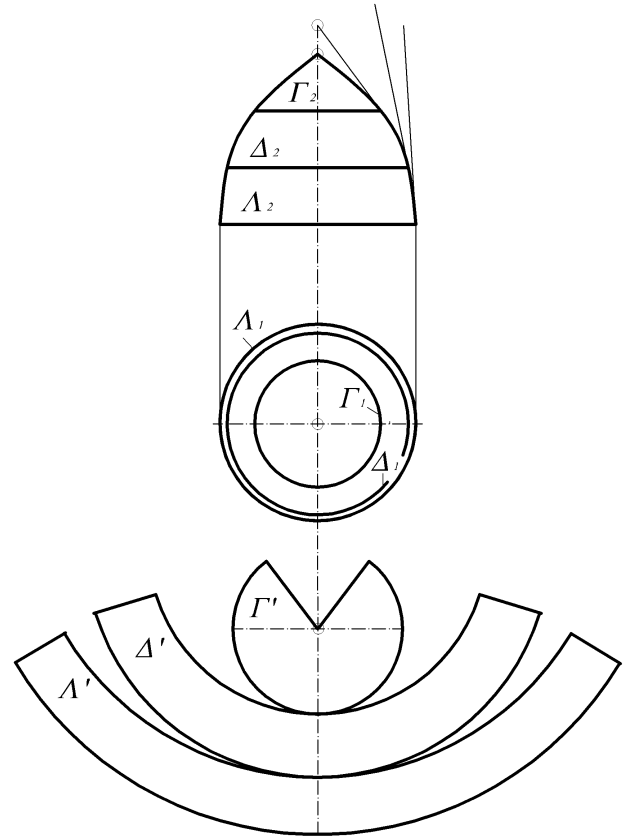
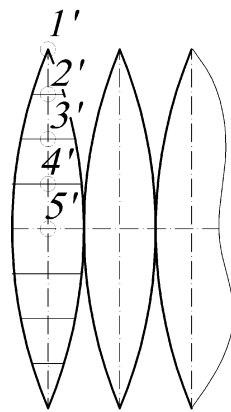


Рис.9

Другий спосіб побудови розгортки поверхні обертання ґрунтується на апроксимації поверхні конусами (рис.9). На поверхні визначають з певним кроком дискретний каркас горизонтальних кіл, після чого кільцеподібні відсіки поверхні обертання апроксимують конусами обертання, для яких і будують розгортку.

Розгортки косих лінійчатих поверхонь будують за допомогою триангуляції (апроксимації трикутними відсіками площин). Прямолінійні твірні поверхні використовують при цьому як сторони апроксимуючих трикутників.

На рис.10 побудовано умовну розгортку відсіку коноїда, напрямними якого є пряма 1-6, дуга фронтального кола 7-9-12 та горизонтальна площина Γ паралелізму. На проєкціях поверхні визначають з певним кроком дискретний каркас прямолінійних твірних. Ділянки кривої напрямної між двома суміжними твірними замінюють хордами, наприклад дугу 7-8 замінюють хордою 7-8. Кожна пара суміжних твірних разом з відрізками напрямних утворюють просторові чотирикутники, які за допомогою діагоналей замінюють парами трикутників. Способом прямокутного трикутника визначають натуральні величини діагоналей. На розгортці послідовно будують неспотворені трикутники, множина яких апроксимує поверхню.

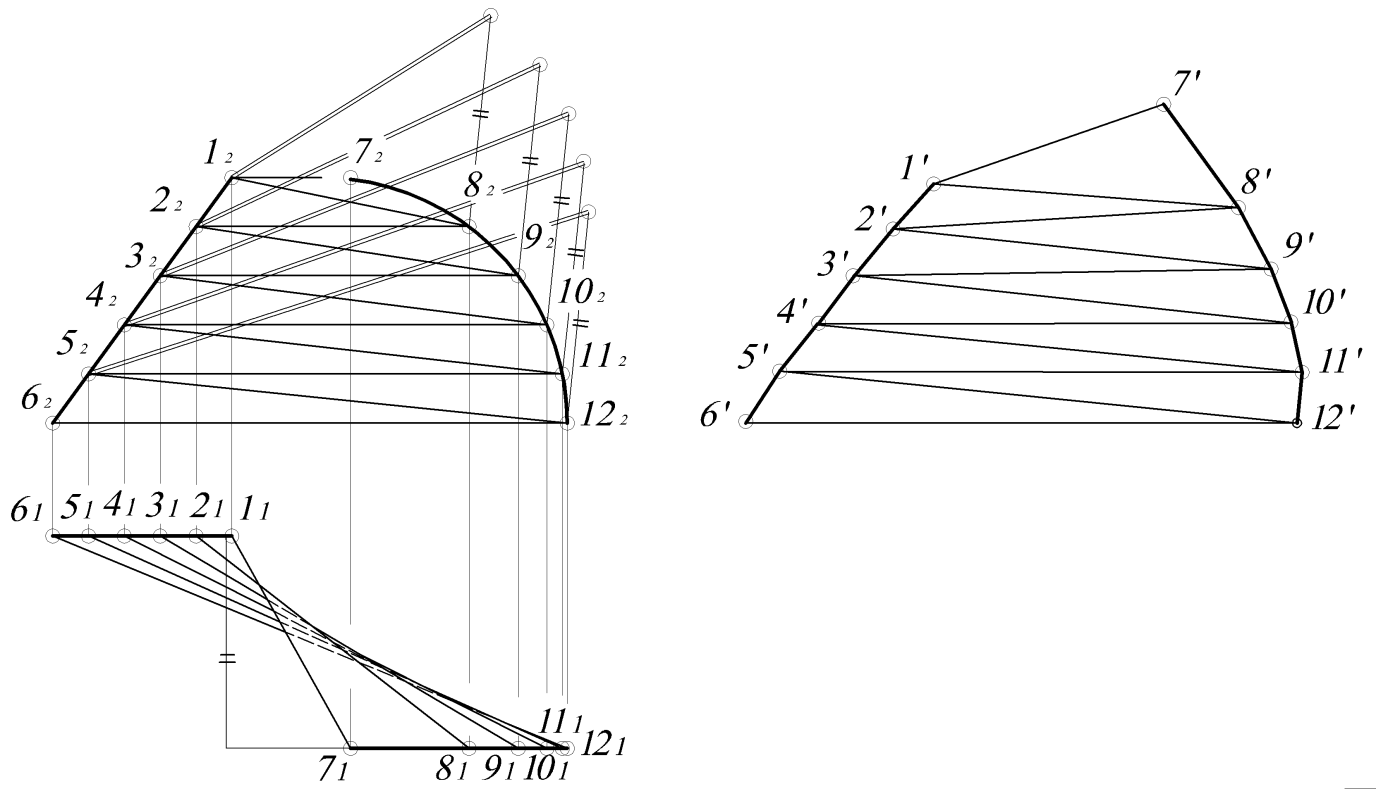


Рис.10