Лекція 7.
Криві лінії

В нарисній геометрії лінія розглядається як траєкторія руху точки за певним законом, або як результат перетину двох поверхонь.

Для спрощення аналізу властивостей кривих ліній їх систематизують за різними ознаками.

Розрізняють ***плоскі*** та ***просторові*** криві лінії. ***Плоскою*** називають криву, усі точки якої належать одній площині. Точки ***просторової*** кривої не належать одній площині.

Залежно від вигляду аналітичного рівняння в декартових координатах лінії поділяють на ***алгебраїчні*** та ***тренсцедентні***. ***Алгебраїчні*** криві описуються алгебраїчними рівняннями, де кожен член рівняння є алгебраїчною функцією від аргументу. Наприклад, загальне рівняння плоскої алгебраїчної кривої має вигляд:

$$a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+\ldots+a_n(x)=0,$$

де $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ – багаточлени від x.

Основною ознакою алгебраїчної кривої є її порядок, який дорівнює степені рівняння кривої. Наочно порядок плоскої алгебраїчної кривої можна визначити, як максимальне число точок її перетину з довільною прямою. Порядок просторової кривої визначається як максимальне число точок її перетину з довільною площиною.

Трансцедентні криві аналітично описуються неалгебраїчними рівняннями. Прикладом плоскої трансцендентної кривої може бути синусоїда.

Локальні властивості плоских кривих

Довільна пряма m (рис.1), що перетинає плоску криву k, називається ***січною***.

Якщо точку В наближати до точки A, січна m буде обертатись навколо точки A, і довжина дуги AB буде зменшуватись. У граничному положенні точки A і B будуть збігатися, а січна m займе положення t і буде називатися ***дотичною*** до кривої k у точці A. Вважають, що дотичною до кривої є січна, яка проходить через дві нескінченно близькі точки кривої.

Перпендикуляр n до дотичної t у точці дотику A називається ***нормаллю*** кривої k у точці A.

Кожна крива (крім кола) у різних точках має більшу або меншу міру викривлення, а коло в усіх точках викривлено однаково. Величина, обернена до радіуса кола, називається його ***кривиною***. Кривину кривої вимірюють за допомогою кола, яке щільно прилягає до кривої в заданій точці і називається ***стичним колом***. Кажуть, що стичне коло проходить через три нескінченно близькі точки A, B і M кривої (рис.2). Центр O стичного кола називається центром кривини кривої k у точці M і належить нормалі n до кривої k. Радіус OM стичного кола називається ***радіусом кривини*** кривої k у точці M.

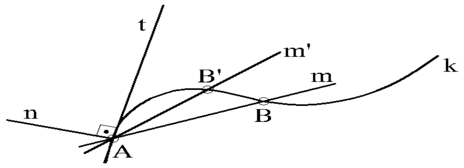


Рис.1

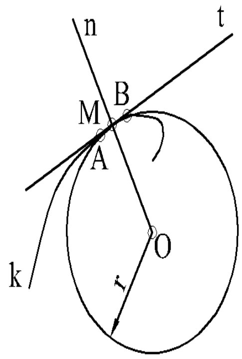


Рис.2

Точка кривої лінії, яка за своїми властивостями не відрізняється від більшості інших точок кривої, називається звичайною.

Звичайна точка має такі властивості:

- окіл звичайної точки є єдиною неперервною лінією;

- у звичайній точці крива має тільки одну дотичну;

- точка *M*, що рухаються у певному напрямі вздовж кривої, до і після звичайної точки не змінює напрям руху, а дотична у точці *M* не змінює напрям обертання.

Проте на кривій бувають такі точки, в яких порушуються сформульовані властивості. Такі точки називаються ***особливими***. Деякі приклади особливих точок показано на рис.3:

A – точка перегину, в якій дотична *t* змінює напрям обертання при незмінному русі точки дотику вздовж кривої *t* (рис.3, *а*);

B – точка звороту першого роду (вістря), в якій при незмінному напрямі обертання дотичної точка дотику змінює напрям руху на протилежний (рис.3, *б*);

C - точка звороту другого роду (дзьоб), в якій як обертання дотичної, так і рух точки дотику змінюється на протилежні (рис.3, *в*);

D – точка повторення, в якій дотична *t* два чи більше разів дотикається до кривої (рис.3, *г*);

E – вузлова точка, в яких крива має дві або більше дотичних (рис.3, *д*) тощо.

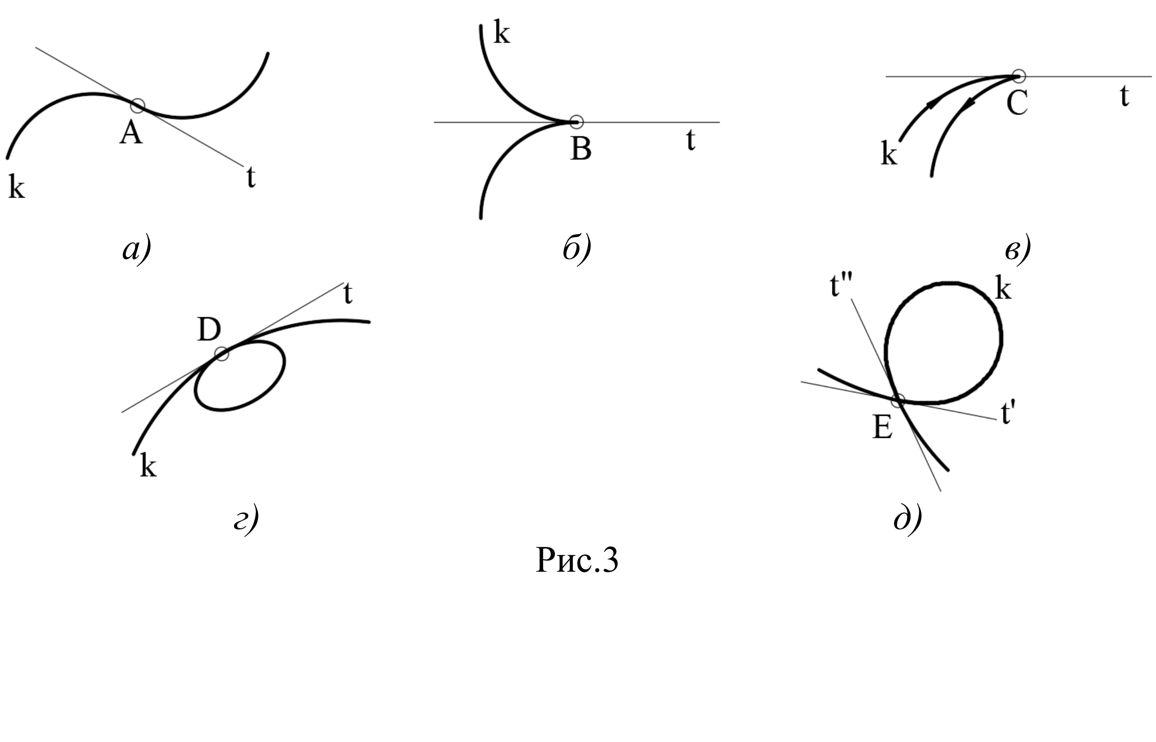


Рис.3

Множина нормалей до плоскої кривої k (рис.4) огинає іншу криву e, яка називається ***еволютою*** кривої k.

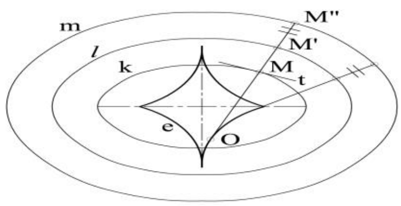


Рис.4

Еволюта кривої k є геометричним місцем центрів O кривини кривої. Сама крива k відносно своєї еволюти називається ***евольвентою***. Кожна крива має тільки одну еволюту і однопараметричну множину евольвент k, l, m …

Відстані (*M'M''*) між точками двох евольвент (l і m) у напрямах спільних нормалей однакові.

Евольвенти k, l, m однієї кривої e одна відносно одної називаються ***еквідистантами***. Еквідистанти кривої лінії є узагальненням для кривих поняття паралельності прямих ліній. Еволютою кола є його центр.

Алгебраїчні плоскі криві

Найпростішими та досконало вивченими алгебраїчними кривими є криві другого порядку. Їх аналітичне рівняння в декартових координатах має другу степінь:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+1=0, \qquad (2)$$

де A, B, C, D, E – коефіцієнти.

Рівняння (2) описує будь-яку криву другого порядку, довільно розміщену відносно прямокутної декартової системи координат (рис.5). Залежно від співвідношення коефіцієнтів у рівнянні (2) маємо окремі види кривих другого порядку: еліпс ($AC\text{-}B^2>0$), гіпербола ($AC\text{-}B^2<0$), парабола ($AC=B^2$) і коло ($A=C$, $B=0$, $D=E$).

Якщо осі еліпса або гіперболи збігаються з осями координатної системи (рис. 6 – 7), аналітичні рівняння значно спрощуються і називаються ***канонічними*** або ***стандартними***:

- еліпс (рис.6)

(3)

- гіпербола (рис.7)

, (4)

де a і b – довжини півосей кривої.

Дві точки F_1 і F_2 на площині, сума відстаней від яких до будь-якої точки еліпса є сталою величиною, називаються фокусами: $F_1M + F_2M = 2a$ (рис.6). Для гіперболи сталою величиною є різниця відстаней від фокусів до будь-якої точки гіперболи:

$$F_2N - F_1N = 2a$$

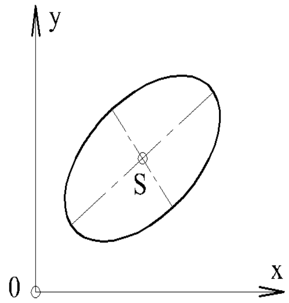


Рис.5

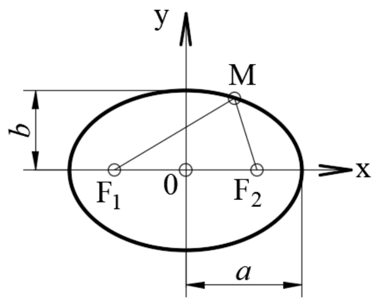


Рис.6

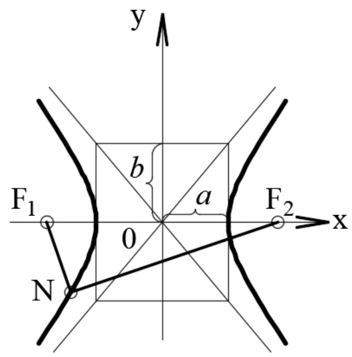


Рис.7

Канонічне рівняння параболи маємо, якщо вісь параболи збігається з віссю OX прямокутної декартової системи координат, а вершина параболи збігається з початком координат 0 (рис.8).

$$y^2 = 2px, \qquad (5)$$

де $p/2 = OF$.

Парабола є геометричним місцем точок (M), рівновіддалених від фокуса (F) і директриси (d).

Коло описується канонічним рівнянням, якщо центр кола збігається з початком координат (рис.9):

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (6)$$

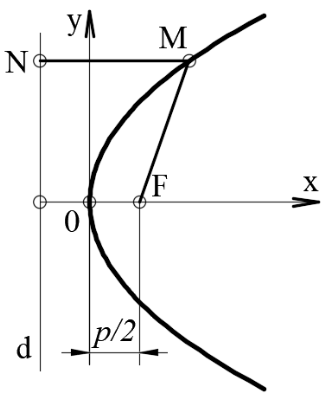


Рис.8

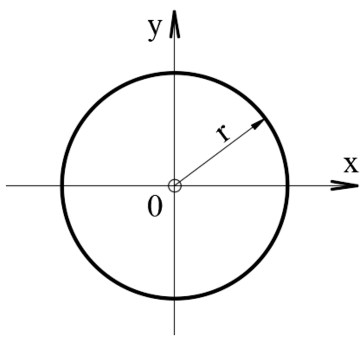


Рис.9

Всі властивості кривих другого порядку досконало вивчені і наводяться у будь-якому довіднику з математики. Ці криві не мають особливих точок і тому широко застосовуються для конструювання як технічних, так і архітектурних форм. Наприклад, параболічні арки можна спостерігати у численних пам'ятниках архітектури.

Криві другого порядку ще називають конічними перерізами, оскільки, залежно від положення січної площини, перерізом конічної поверхні обертання може бути будь-яка крива другого порядку (рис.10,11):

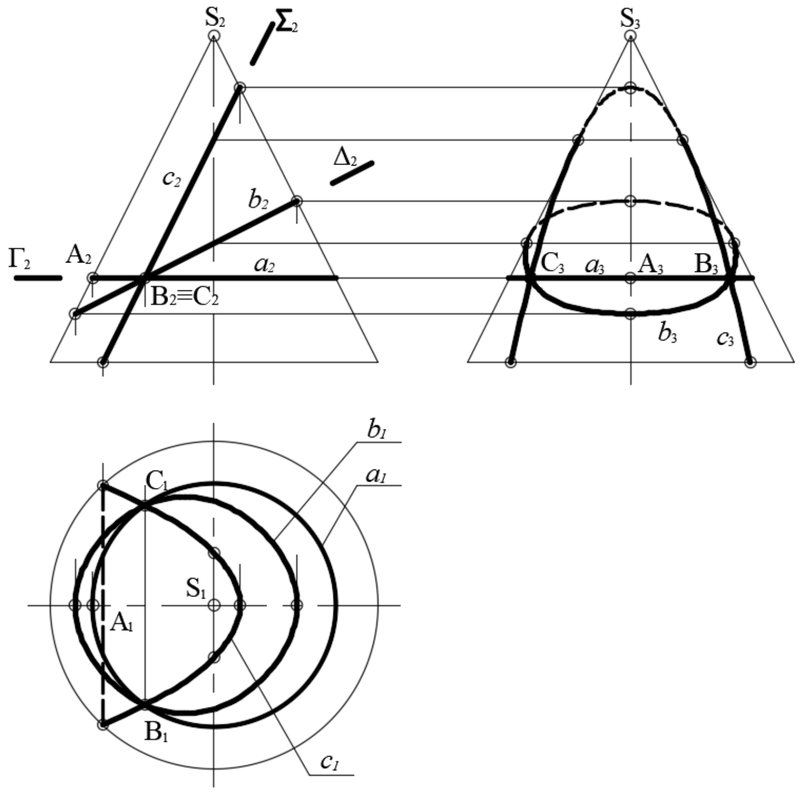


Рис.10

- горизонтальна січна площина *Г* перерізає конічну поверхню обертання по колу *a* (рис.10);

- фронтально-проекціювальна площина *Δ*, кут нахилу якої до Π_1 менше кута нахилу твірних конуса, перетинає конус по еліпсу *b* (рис.10) ;

- площина *Σ*, яка паралельна до однієї з твірних конуса, перерізає його по параболі *c* (рис.10) ;

- у площині *Ω*, яка паралельна двом твірним конуса, перерізом є гіпербола *d* (рис.11).

Всі криві другого порядку також можна розглядати як центральні проекції однієї з кривих на різні площини. Так, наприклад, коло *a* з центру *S* на площину *Δ* проекціюється еліпсом (рис.10), на площину *Σ* – параболою, на площину *Ω* – гіперболою (рис.11).

Якщо проекціювальний промінь *SA* провести паралельно площині *Σ*, то центральною проекцією точки *A* кола a на площині *Σ* є невласна (нескінченно віддалена) точка параболи *c*. Проекціями точок *B* і *C* кола *a* на площину *Ω* є дві невласні точки гіперболи, якщо твірні *SB* і *SC* паралельні площині *Ω*.

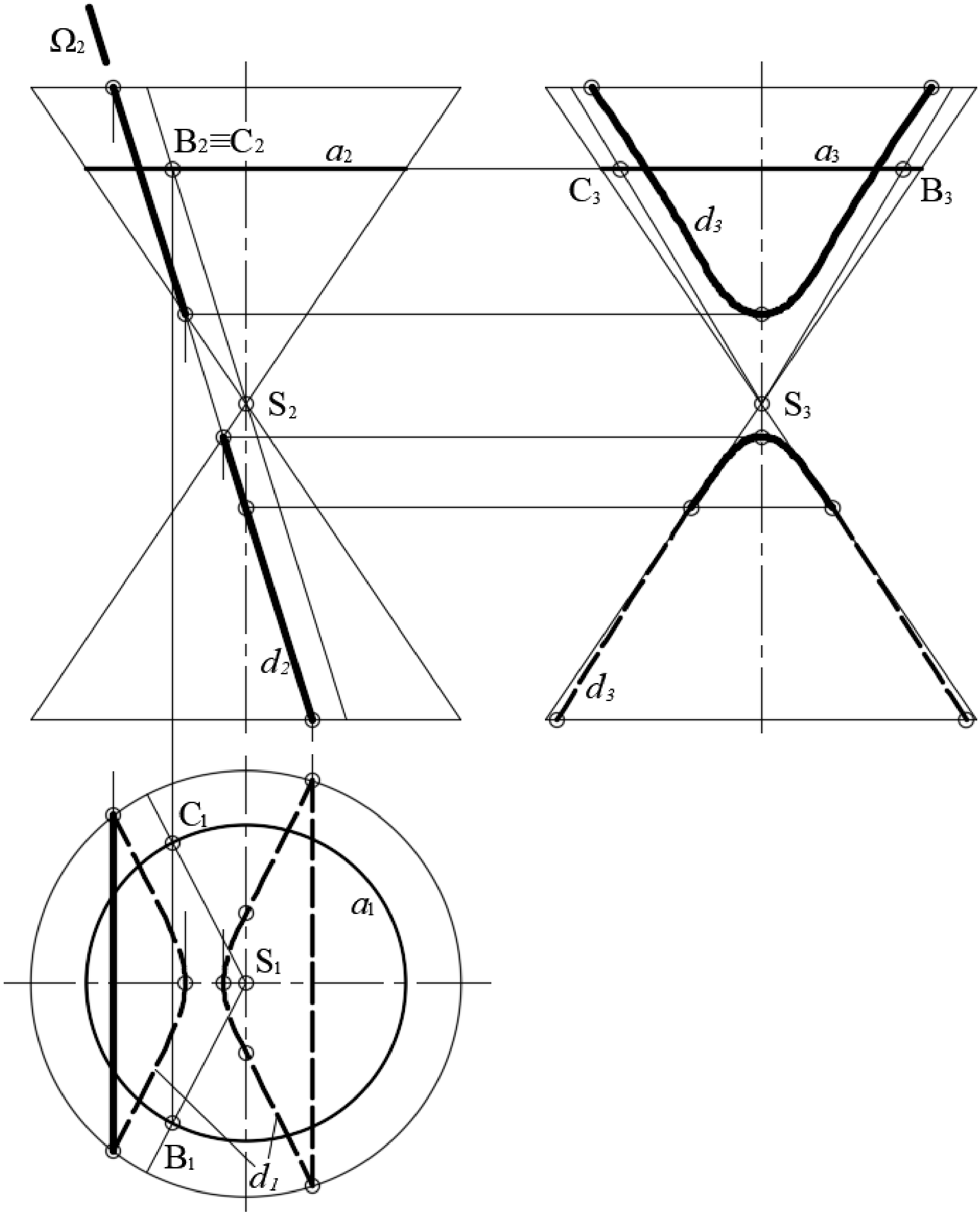
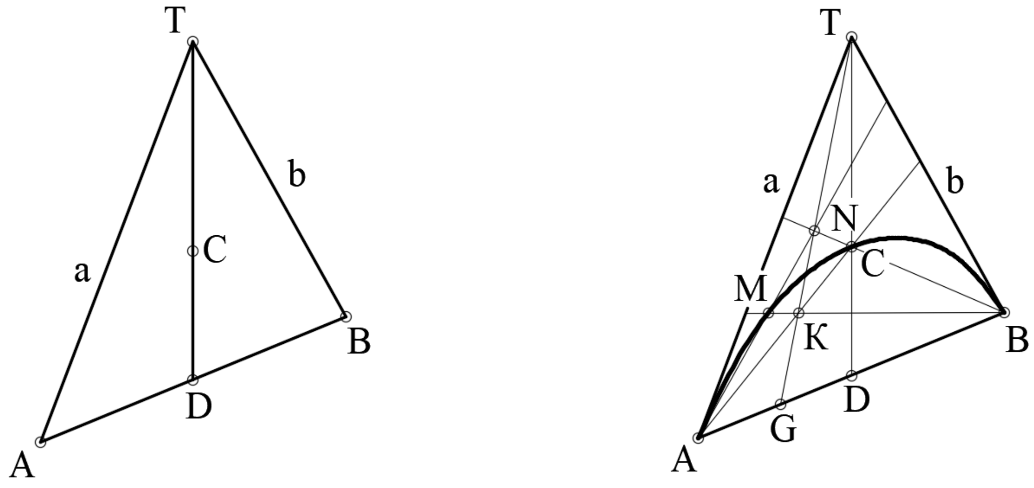


Рис.11

Існує багато різноманітних способів побудови точок кривих другого порядку, серед яких найбільш поширеним в інженерних задачах є так званий інженерний спосіб. Він дозволяє будувати криві другого порядку за трьома заданими точками *A*, *B* і *C* і двома дотичними *a* і *b*, що проходять відповідно через точки *A* і *B* (рис.12, *a*).

Для побудови довільної точки *M* кривої 2-го порядку (рис.12, *б*) довільно проводять промінь *TG*, на якому визначають точки *K* і *N* перетину прямої *TG* відповідно з прямими *AC* і *BC*. Прямі *AN* і *BK* перетинаються у точці *M* кривої другого порядку.



а) *б)*

Рис. 7.12

Якщо точку C обрати на медіані трикутника ABT, то її положення визначає тип кривої другого порядку. При $TC>CD$ точка M належить еліпсу, при $TC<CD$ – гіперболі, а при $TC=CD$ – параболі.

В геометричному моделюванні широко використовуються алгебраїчні криві, які описуються алгебраїчним поліномом:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n \qquad (7)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_3$ – коефіцієнти.

Такі криві можуть мати степінь від 1 до n, залежно від кількості членів з правого боку рівняння, і кожна з них має тільки одну власну точку перетину з вертикальною прямою $x = c$. Їх ще називають параболами n-го порядку.

На рис.13. показано декілька таких ліній:

$y=0$ – пряма, що збігається з віссю ох;
$y=a_0$ – горизонтальна пряма;
$y=a_0+a_1x$ – похила пряма;
$y=a_0+a_1x+a_2x^2$ – парабола 2-го порядку;
$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ – кубічна парабола тощо.

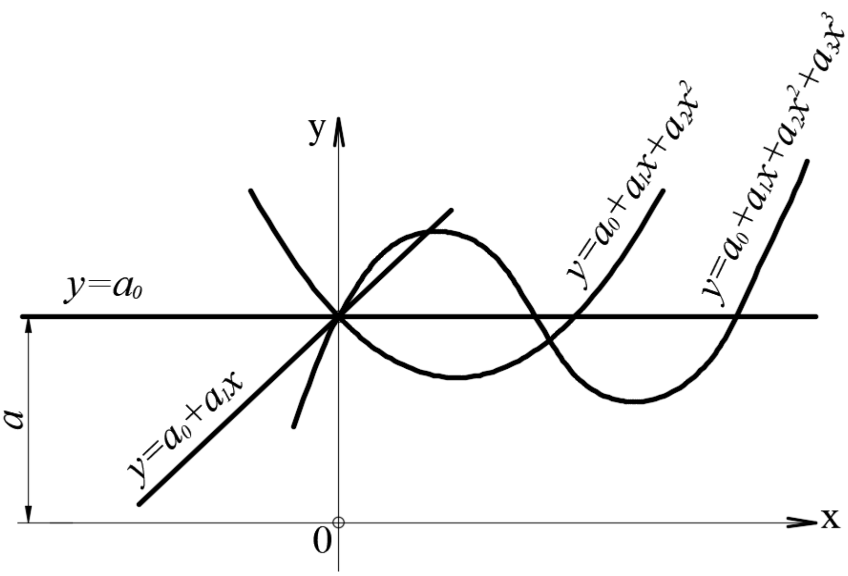


Рис.13

Плоскі трансцендентні криві

Трансцендентними є криві, рівняння яких у прямокутній декартовій системі координат не є алгебраїчними. Їх можна розглядати як алгебраїчні криві нескінченно високого порядку.

Прикладами трансцендентних кривих є різноманітні спіралі (спіраль Архімеда, логарифмічна спіраль, евольвента кола, графіки тригонометричних функцій тощо).

Розглянемо деякі приклади побудови трансцендентних кривих.

Спіраль Архімеда (рис.14) утворюється рівномірним центробіжним рухом точки (*M*) з одночасним обертанням навколо центру *O*.

Для побудови точок спіралі Архімеда з центром *O*, яка проходить через задану точку *M*, потрібно центральний кут *AOM* та відрізок *OM* поділити на однакове число рівних частин. Через точки поділу радіуса провести концентричні кола з центром *O*. При цьому утворюється в'язка прямих і в'язка кіл з центром *O*. Відповідні лінії цих в'язок перетинаються у точках спіралі Архімеда.

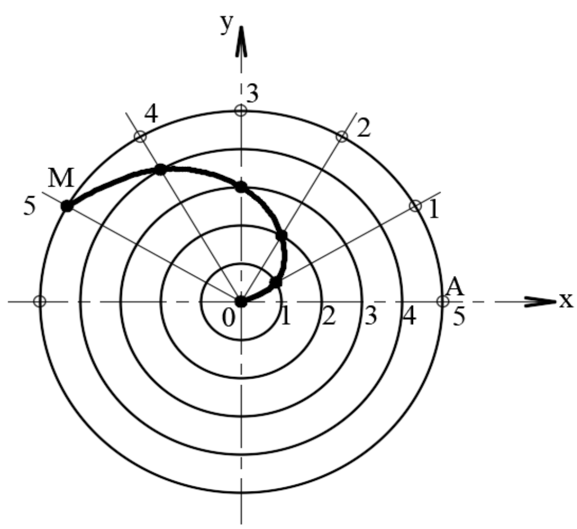


Рис.14

Полярне рівняння спіралі Архімеда має вигляд:

$$\rho = k\varphi, \tag{8}$$

де k – коефіцієнт пропорційності;
ρ – відстань від центру O до точки спіралі;
φ – полярний кут.
Рівняння у декартовій системі координат:

$$= k \cdot arctg, \tag{9}$$

В техніці широко використовується трансцендентна крива, яка називається евольвента кола (рис.15). Для побудови точок евольвенти необхідно поділити коло на певне число n рівних частин, у точках поділу провести дотичні і на кожній з них від точки дотику (A) відкласти довжину дуги () від початкової точки S до точки дотику (A):

$$AB = \, =, \tag{10}$$

де r – радіус кола;
i – номер точки на колі;
n – число дуг поділу кола.

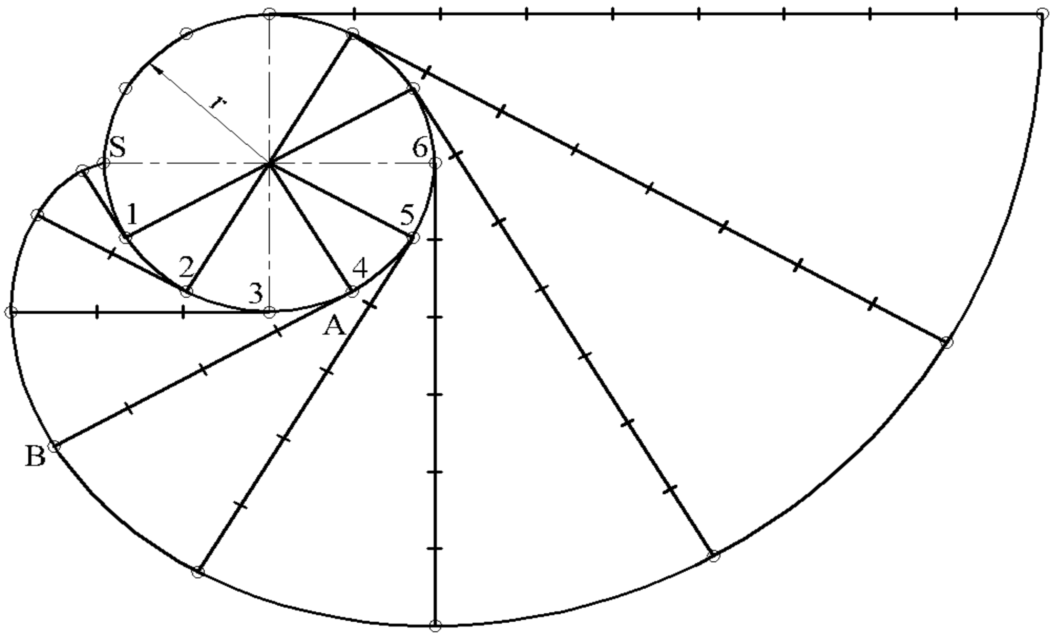


Рис.15

Для архітекторів цікавою є трансцендентна крива, яка називається «ланцюговою лінією» (рис.16).

Форму ланцюгової лінії приймає однорідна гнучка нерозтягнута нитка з закріпленими кінцями під дією власної ваги (рис.16, *а*). Її рівняння має вигляд:

$$y=,\qquad (11)$$

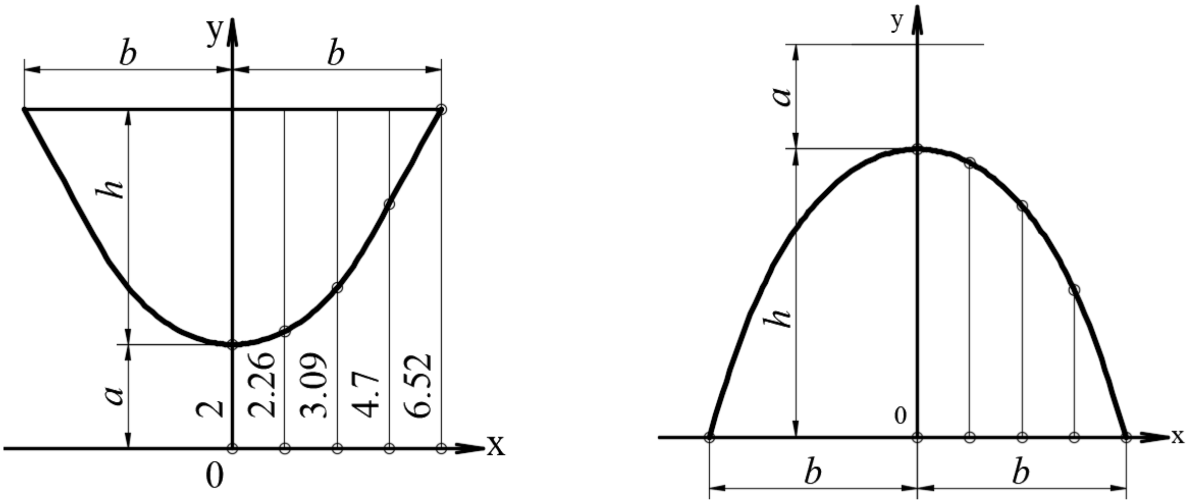
де a – параметр ланцюгової лінії;

$e \approx 2{,}7183\ldots$ − трансцендентне число.

Ланцюгова лінія є основою геометричного конструювання деяких вантових систем, арок, склепінь. В арці, яка окреслена за ланцюговою лінією, не виникає згинаючих моментів під дією власної ваги. Така арка, складена з цеглин або або каміння навіть без скріплюючого розчину не буде руйнуватися.

Рівняння ланцюгової лінії, що показана на рис.16, *б* має вигляд:

$$y=\qquad (12)$$



а) *б)*

Рис.16

Графічного алгоритму побудови точок ланцюгової лінії не існує, тому її точки будують за рівнянням (11) або (12).

Якщо задано стрілу підйому h арки та прогон b, то параметр a ланцюгової лінії можна визначити наближено за формулою:

$$a \approx \qquad (13)$$

Формула (12) придатна тільки для пологих арок, у яких . Тоді відносна похибка у визначенні ординат точок ланцюгової лінії не перевищує 2 %.

В архітектурному проектуванні ланцюгову лінію (11) часто замінюють параболою другого порядку:

$$y = h- \qquad (14)$$

Просторові криві

Просторові криві, так само як і плоскі, поділяються на алгебраїчні і трансцендентні.

Проекціями просторової кривої є плоскі криві і аналітично вона описується двома рівняннями своїх проекцій.

Локальні властивості просторових кривих визначаються за допомогою тригранника Френе (Ф.Френе – французький математик 19 сторіччя), який складається з трьох взаємно перпендикулярих площин (рис.17).

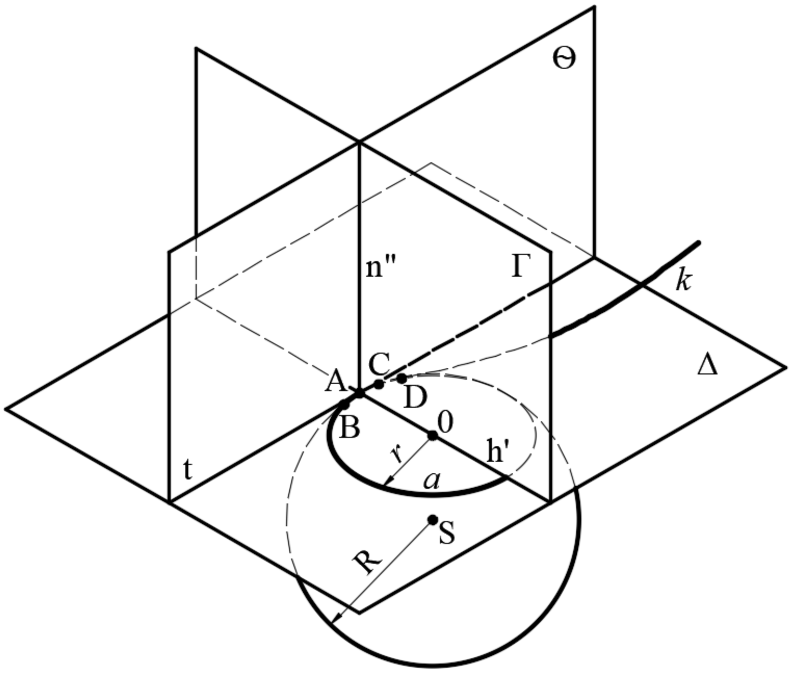


Рис.17

Пряма t, що проходить через дві нескінченно близькі точки (A і B) просторової кривої k, є дотичною. Всі прямі, перпендикулярні до дотичної t у точці дотику A просторової кривої, належать ***нормальній площині*** Γ. Через три нескінченно близькі точки (A, B, C) кривої k проходить ***стична площина*** Δ. Площина Θ, що проходить через дотичну t і перпендикулярна площинам Γ і Δ, називається ***спрямляючою площиною***.

Три нескінченно близькі точки A, B, C просторової кривої k визначають ***стичне коло a***, яке належить стичній площині Δ. Величина , обернена до радіуса r стичного кола, є кривиною просторової кривої k у точці A. Сфера, яка проходить через чотири нескінченно близькі точки A, B, C, D просторової кривої k, називається ***стичною сферою***. Величина, обернена до до радіуса стичної сфери, називається ***скрутом просторової кривої*** k у точці A. Скрут є мірою повороту тригранника Френе навколо дотичної t при русі точки A вздовж кривої k. Перерізом стичної сфери стичною площиною Δ є стичне коло a.

Проекціями дотичної до просторової кривої є дотичні до проекцій кривої.

Просторові криві, так само як і плоскі, можуть мати особливі точки, в яких порушуються локальні властивості кривої. Проекцією звичайної точки просторової кривої не завжди є звичайна точка проекції. І навпаки, проекцією особливої точки просторової кривої може бути звичайна точка проекції. Наприклад (рис.18), якщо дотична t до просторової кривої є проекціювальною, то проекцією звичайної точки дотику A просторової кривої буде особлива точка A_1 проекції k_1, а проекцією особливої точки B може бути звичайна точка B_1 проекції k_1.

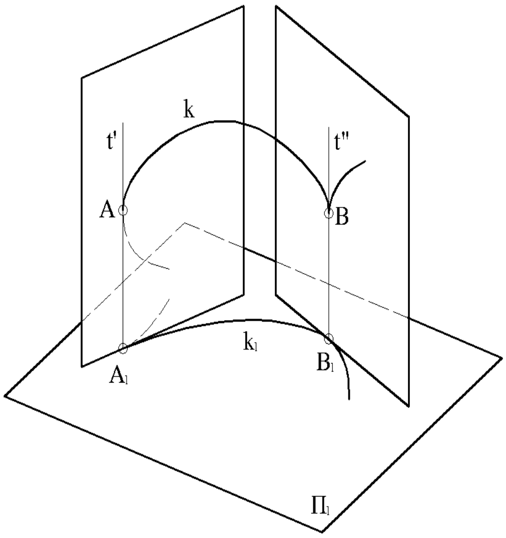


Рис.18

Серед просторових кривих найбільше поширення у техніці мають гвинтові лінії, які є трансцендентними кривими.

Циліндрична гвинтова лінія (рис.19) утворюється гвинтовим рухом точки (A). Точка A рівномірно обертається навколо осі l, одночасно рівномірно рухаючись уздовж осі.

Для побудови точок гвинтової лінії прямий круговий циліндр, по поверхні якого рухається точка A, у межах заданого кроку h гвинтової лінії горизонтальними перерізами поділяють на певне число рівних частин. На таке саме число рівних частин поділяють коло основи циліндра.

При повороті точки A на кут $A_1O_11_1$ вона переміщується на перший рівень уздовж осі циліндра і т.д. Фронтальні проекції точок будують за відповідністю з горизонтальними на відповідних горизонтальних перерізах.

Серед основних властивостей циліндричної гвинтової лінії можна зазначити такі: - всі дотичні до гвинтової лінії однаково нахилені до площини $П_1$;

- в усіх точках циліндрична гвинтова лінія має однакову кривину і однаковий скрут;

- фронтальною проекцією гвинтової лінії, яку показано на рис.19, є синусоїда, якщо крок h дорівнює довжині кола горизонтальної проекції.

У полярній циліндричній системі координат циліндрична гвинтова лінія описується системою рівнянь:

$$\rho = r$$

(15)

$$z = \ ,$$

де r – радіус основи циліндра;

h – крок гвинтової лінії;

φ – кут повороту точки A.

Циліндрична гвинтова лінія є основою для утворення гвинтових поверхонь.

Конічною гвинтовою лінією (рис.20) називають просторову криву, розміщену на поверхні конуса обертання та утворену рівномірним рухом точки по твірній, що рівномірно обертається навколо осі конуса.

Для побудови точок конічної гвинтової лінії вісь конуса на інтервалі h поділяють на певне число рівних частин та наносять таке саме число твірних з рівномірним кутовим кроком. Точки перетину твірних конуса з відповідними горизонтальними перерізами і є точками конічної гвинтової лінії.

Горизонтальною проекцією конічної гвинтової лінії, яку показано на рис.20, є спіраль Архімеда.

У циліндричній полярній системі координат конічна гвинтова лінія описується системою рівнянь:

$$\begin{matrix} \rho = \\ z = \quad , \end{matrix} \qquad (16)$$

де φ – полярний кут;
h – висота конуса;
r – радіус основи конуса.

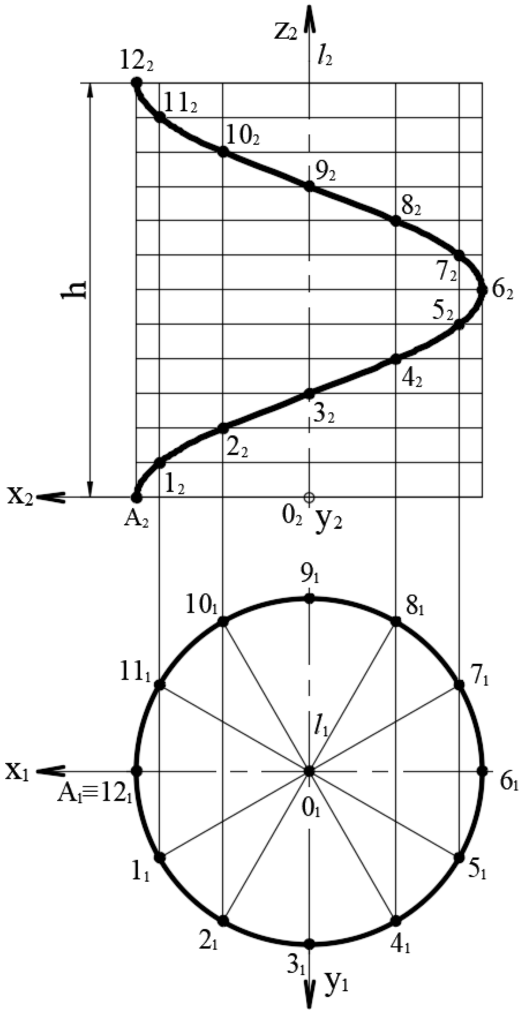


Рис.19

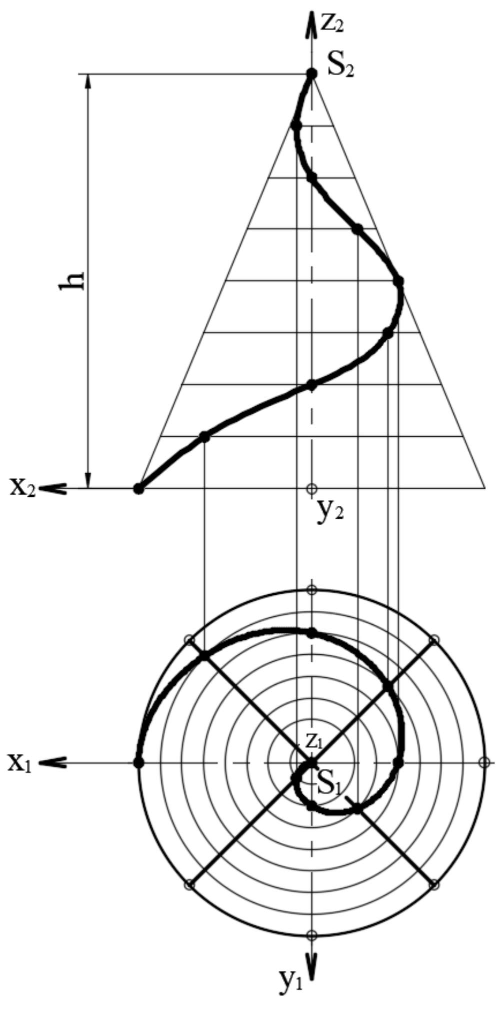


Рис.20

Параметри кривих ліній

Величини, які визначають єдину лінію на площині або у просторі, називаються її параметрами. Будь-які геометричні фігури, за винятком точки, прямої і площини, можуть відрізнятись за формою. Наприклад, два кола різних діаметрів сумістити неможливо. Єдине коло на площині визначається не тільки положенням центру, а й радіусом або діаметром. Радіус кола є параметром його форми, а координати центру – параметрами положення. Отже, величини, які визначають форму кривої (її розміри), називаються параметрами форми, а величини, що визначають положення кривої – параметрами положення.

Загальне число параметрів кривої у заданому просторі називається її параметричним числом у цьому просторі:

$$P = P_ф + P_п, \tag{17}$$

де $P_ф$ – число параметрів форми;

$P_п$ – число параметрів положення. У загальному випадку будь-яка плоска крива на площині має три параметри положення, що дорівнює числу ступенів вільності кривої (рис.21).

Будь-яку зміну положення кривої на площині можна здійснити за допомогою трьох елементарних переміщень – повороту навколо довільно обраного центру і двох прямолінійно-поступальних рухів уздовж довільно призначених напрямів (рис.21), тому $P_п = 3$. Винятками є коло, яке має тільки два параметри положення, оскільки обертання навколо власного центру не змінює положення кола, і пряма, яка також має два параметри положення.

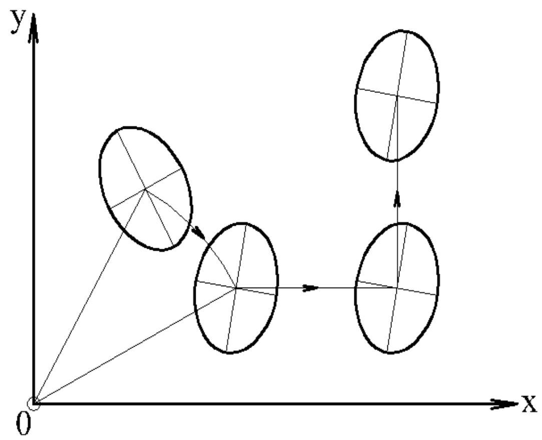


Рис.21

Параметричне число P кривої на площині дорівнює числу незалежних коефіцієнтів у загальному рівнянні кривої. Наприклад, загальне рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+1=0 \tag{18}$$

має п’ять незалежних коефіцієнтів, що відповідає параметричному числу кривої (P = 5).

Криву лінію завжди можна так розмістити відносно системи координат, щоб параметри положення дорівнювали нулю. В такому разі рівняння кривої набуває найпростішого вигляду і називається стандартним або канонічним. Наприклад, якщо осями еліпса є координатні осі (рис.22), його рівняння приймає вигляд:

, (19)

де a і b – параметри форми.

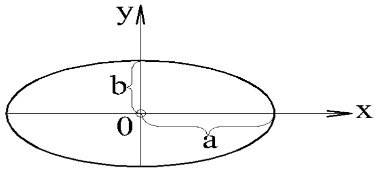


Рис.22

Якщо всі параметри p-параметричної кривої зробити вільними, площина заповнюється р-параметричною множиною кривих. Для вилучення з цієї множини однієї конкретної кривої потрібно зв’язати всі її параметри. Зв’язувати параметри можна за допомогою геометричних умов. Так, наприклад, умова проходження кривої через задану точку або умова дотику кривої до заданої дотичної зв’язує один параметр множини. З цього випливає, що р-параметричну криву можна провести через р заданих точок або за р заданими дотичними, або якщо число заданих точок і заданих дотичних в сумі складає число p.

У тривимірному просторі будь-яка крива (плоска або просторова), за винятком кола та циліндричної гвинтової лінії, має шість параметрів положення за числом ступенів вільності (рис.23). Пряма у просторі має тільки чотири параметри положення і жодного параметру форми.

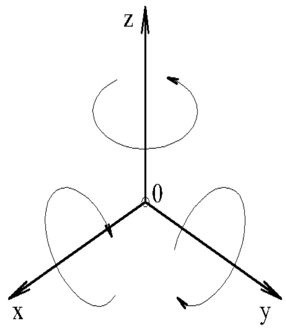


Рис.23

Параметричне число кривої у просторі дорівнює:

$$P = P_ф + 6, \qquad (19)$$

де $P_ф$ – число параметрів форми. Наприклад, еліпс у тривимірному просторі має 2 параметри форми та 6 параметрів положення.

Якщо всі параметри кривої звільнити, простір заповнюється p-параметричною множиною кривих. Зв’язувати параметри у просторі можна так само, як і на площині за допомогою геометричних умов. Так, наприклад, умова перетину кривих простору з заданою лінією потребує витрати одного параметру, умова проходження кривих простору через задану точку потребує двох параметрів тощо.

Інтерполяція точок на площині

З геометричної точки зору одновимірною інтерполяцією точок є проведення гладкої кривої через задані точки з можливим врахуванням заданих локальних характеристик кривої. Інтерполяція точок може бути суцільною, коли через задані точки проводять одну криву, або кусковою, коли точки з’єднуються дугами складеної кривої з забезпеченням гладкості стикування окремих дуг. Найпростішим прикладом суцільної інтерполяції трьох точок може бути проведення через них дуги кола (рис.24). При цьому центр *O* дуги визначається в результаті перетину двох перпендикулярів, проведених через середини хорд *AB* і *BC*.

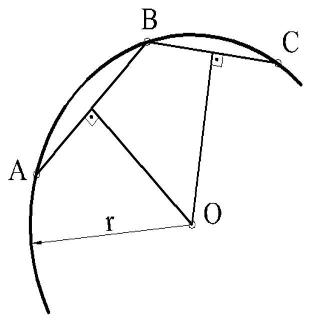


Рис.24

Для суцільної інтерполяції точок на площині часто використовується поліном (7), який дозволяє проводити одну криву через довільне число n заданих точок. Така інтерполяція виконується аналітично, тобто аналітично визначаються коефіцієнти a_i в рівнянні кривої, яка проходить через задані точки.

Наприклад, для інтерполяції чотирьох точок *A, B, C* і *D* (рис.25) береться частина полінома (7), яка має чотири коефіцієнти a_i, де i – номер коефіцієнта:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \qquad (20)$$

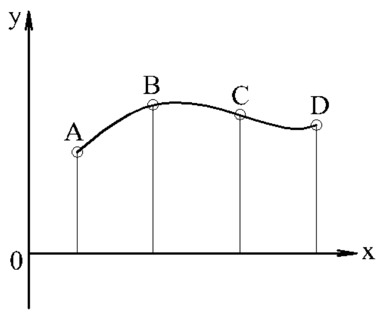


Рис.25

До рівняння (20) по черзі підставляються координати заданих точок *A, B, C, D* і складається система рівнянь:

$$\begin{aligned} y_A&=a_0+a_1x_A+a_2x_A^2+a_3x_A^3 \\ y_B&=a_0+a_1x_B+a_2x_B^2+a_3x_B^3 \end{aligned} \qquad (21)$$

$$y_C=a_0+a_1x_C+a_2x_C^2+a_3x_C^3$$
$$y_D=a_0+a_1x_D+a_2x_D^2+a_3x_D^3$$

Невідомі коефіцієнти a_i визначаються при розв’язанні системи рівнянь (21).

Кускова інтерполяція точок передбачає гладке стикування дуг кривих, що проходять через задані точки. Тому в точках з’єднання дуг кривих повинні бути зазначені умови гладкого стикування. Кускову інтерполяцію точок на площині розглянемо на прикладі використання інженерного способу побудови кривих другого порядку (рис.26).

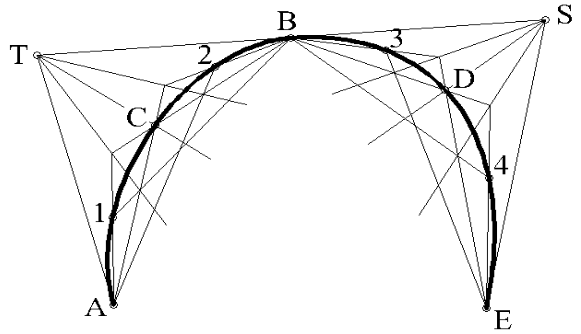


Рис.26

Задано точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. У точках *A*, *B* і *E* задано дотичні відповідно *AT*, *TS* і *SE*. Дотична *TS* є спільною для дуг *ACB* та *BDE* кривих другого порядку, що забезпечує їх гладке стикування у точці *B*. Проміжні точки *1,2,3,4* побудовано так, як було показано на рис.12, *б*.

Кускова інтерполяція кубічною параболою (20) виконується аналітично. Параболу (20) проводять на всіх інтервалах між заданими точками, крім першого (*AB*) і останнього (*DE*). В усіх проміжних точках (*B*, *C*, *D*) задають дотичні паралельно відповідним хордам ($t_B \parallel AC$; $t_C \parallel BD$; $t_D \parallel CE$). Аналітично ця умова виглядає як задання тангенсів кутів нахилу дотичних до осі OX:

$$tg\alpha_B = \ ; \ tg\alpha_C = \ ; \ tg\alpha_D =$$

Зазначені тангенси кутів дорівнюють першій похідній функції (20) у відповідній точці (*B*, *C* або *D*):

$$y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2 = tg\alpha \qquad (22)$$

На довільному інтервалі (крім першого і останнього) визначають коефіцієнти a_0, a_1, a_2, a_3 кубічної параболи, яка проходить через дві граничні точки інтервалу і дотикається до двох дотичних у цих точках. Для цього до рівняння (20) підставляють задані координати двох точок, а до рівняння (22) визначений тангенс кута нахилу відповідних дотичних. Наприклад, на інтервалі *BC* така система рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} y_B&=a_0+a_1x_B+a_2x_B^2+a_3x_B^3 \\ y_C&=a_0+a_1x_C+a_2x_C^2+a_3x_C^3 \end{aligned} \qquad (23)$$

$$= a_1+2a_2x_B+3a_3x_B^2$$
$$= a_1+2a_2x_C+3a_3x_C^2$$

Невідомі коефіцієнти кривої (20), яка з’єднує точки *B* і *C* визначаються з системи рівнянь (23).

На першому (*AB*) і останньому (*DE*) інтервалах проводять дуги парабол другого порядку:

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2 \qquad (24)$$

за умовами їх проходження через точки границь інтервалів та дотику до визначеної дотичної в одній з точок. Наприклад, для інтервалу *AB* такі умови записуються у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\begin{gathered} y_A=b_0+b_1x_A+b_2x_A^2 \\ y_B=b_0+b_1x_B+b_2x_B^2 \\ = b_1+2b_2x_B \end{gathered} \qquad (25)$$

З системи рівнянь (25) визначаються невідомі коефіцієнти b_0, b_1, b_2 параболи (24), яка відповідає зазначеним умовам.

Одним з можливих способів одновимірної інтерполяції точок у просторі просторовими кривими є перехід до інтерполяції проекцій точок на двох площинах проекцій.

Вище було наведено лише окремі найпростіші випадки одновимірної інтерполяції точок. До цього часу досконально розроблено багато способів одновимірної інтерполяції, які дозволяють враховувати найрізноманітніші умови проведення гладких кривих через задані точки.

Одновимірна інтерполяція точок у тривимірному просторі зводиться до інтерполяції проекцій точок на площинах проекцій.

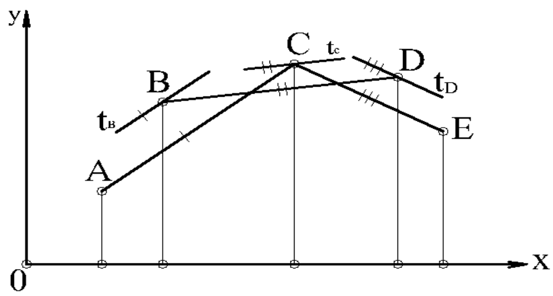


Рис.27