# Лекція 8.
## КРИВІ ПОВЕРХНІ

Застосування будівельних та архітектурних конструкцій, обмежених кривими поверхнями, поширене ще з давніх часів. Різноманітні покриття, башти та куполи надавали особливої виразності архітектурним спорудам на фоні міської забудови та навколишнього ландшафту. Нині важливого значення набуває знання закономірностей побудови кривих поверхонь, коли застосування кривої поверхні в інженерному або архітектурному вирішенні є найоптимальнішим або єдино можливим. За допомогою таких конструкцій перекривають великі за площею приміщення без проміжних опор, що важливо при будівництві спортивних, видовищних, торгових залів, вокзалів, аеропортів та інших громадських споруд. Оптимальною є криволінійна форма таких промислових споруд, як резервуари, газгольдери тощо. Криволінійну форму мають багато елементів інженерного устаткування будівель; нарешті, земний рельєф, на якому розміщують об'єкти будівництва, також обмежується кривими поверхнями. Формоутворення кривих поверхонь широко застосовується у технічному дизайні. Щоб спроектувати і виготовити ці поверхні необхідно володіти законами їх утворення і зображення.

### Способи утворення кривих поверхонь та їх систематизація

**Крива поверхня** – це неперервна двопараметрична множина точок або однопараметрична множина ліній. В нарисної геометрії поверхні задаються графічно, їх проекціями. Неперервна поверхня зображується точками або лініями з певним інтервалом. Множина точок або ліній, що належать поверхні, називається **каркасом поверхні**.

Однопараметричну множину ліній на поверхні, які мають спільний закон утворення та взаємозв'язані певною залежністю, називають **лінійним каркасом поверхні.** Форму та положення конкретної лінії каркаса на поверхні визначають єдиним параметром, який називають **законом каркаса**.

До утворення неперервного каркаса поверхні може бути застосовано два способи: каркасно-параметричний і каркасно-кінематичний.

**Каркасно-параметричний спосіб утворення поверхонь.** У цьому випадку поверхня утворюється завдяки зв'язуванню параметрів множини ліній, що заповнюють простір. Визначають параметричне число лінії за формулою

$$P = P_{\phi} + P_{\Pi}, \text{ де}$$

$P_{\Phi}$, $P_{\Pi}$ –число параметрів форми і положення кривої відповідно.

Задають умови, які зв'язують $(P-1)$ параметрів множини ліній, що заповнюють простір. Один вільний параметр визначає однопараметричну $(\infty^1)$ множину ліній каркаса поверхні. Цей параметр є параметром каркаса.

На рис.1 наведено приклад утворення поверхні з каркасом із кіл. Коло має один параметр форми і п'ять параметрів положення у просторі, тому простір заповнюється шестипараметричною множиною кіл.  Для утворення поверхні потрібно зв'язати п'ять параметрів, залишивши вільним один параметр каркаса. Лініями каркаса в нашому прикладі є кола, що належать горизонтальним площинам.

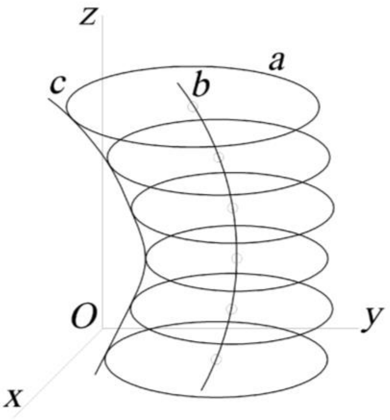



Рис.1

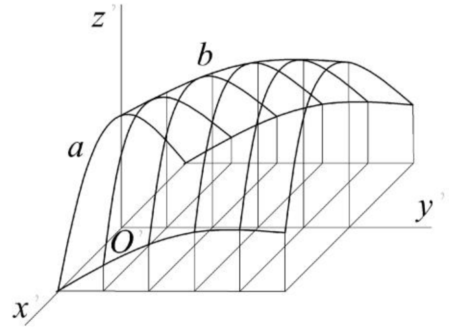



Рис.2

Ця умова зв'язує два параметри множини кіл. Умова належності центрів кіл каркаса до лінії *b* зв'язує ще два параметри множини, оскільки в кожній площині з двопараметричної множини точок виділяється єдина точка – центр кола. Умова належності до поверхні заданої лінії ***c*** зв'язує ще один параметр множини кіл, оскільки точки перетину лінії з кожною горизонтальною площиною визначають радіус кола. Таким чином з усіх шести параметрів множини кіл зв'язуються п'ять параметрів. Невизначеною залишається відстань кожного кола від горизонтальної площини проекцій. Ця відстань і є параметром каркаса поверхні. Якщо її задавати з певним інтервалом, то можна визначити дискретний каркас поверхні для її графічного зображення.

**Каркасно-кінематичний спосіб утворення поверхонь.** Цей спосіб утворення поверхні ґрунтується на звільненні одного параметра заданої лінії. Через це утворюється однопараметрична множина ліній каркаса поверхні. Як правило, параметр звільнюється при заданні закону руху лінії у просторі. На рис.2 у площині xOz задано конкретну параболу *a*, яка не має вільних параметрів форми.

Звільнення одного параметра положення дає змогу параболі рухатися за визначеним законом, наприклад, поступально уздовж лінії *b*. Множина послідовних положень параболи у просторі утворює неперервний каркас поверхні. Такий спосіб утворення поверхонь називають кінематичним, лінію *a* каркасу – ***твірною*** поверхні, а лінію *b* – ***напрямною***. Поверхні, які утворені рухом твірної певної форми, називають ***кінематичними поверхнями з твірною сталої форми***.

З параметром положення лінії каркаса можуть зв'язуватися також параметри її форми. За параметр каркаса можна обрати будь-який з цих параметрів. При цьому незалежним (вільним) є тільки один параметр каркаса, а решта змінних параметрів визначаються як залежні від першого. Поверхню, яка утворюється у такий спосіб, називають ***кінематичною поверхнею з твірною змінної форми***. Прикладом може бути поверхня, зображена на рис.1. Твірне коло рухається у просторі таким чином, що його центр переміщується уздовж напрямної *b*, а площина кола весь час залишається паралельною площині *xOy*. Зміна радіуса в процесі переміщення задається лінією *c*. Змінюються два параметри кола - положення площини кола та радіус, проте незалежним є тільки один.

Поверхня вважається заданою, якщо за однією проекцією точки, яка належить поверхні, можна визначити другу проекцію. Сукупність умов, які є необхідними і достатніми для задання поверхні називають ***визначником поверхні***. Він складається з геометричної та алгоритмічної частин. Геометричною частиною визначника поверхні є геометричні фігури, зображені на рисунку, за допомогою яких зв'язуються параметри множини ліній простору. Алгоритмічна частина визначника – це сукупність правил застосування його геометричної частини для утворення поверхонь. Наприклад, геометричною частиною визначника поверхні, зображеної на рис.1, є лінії *a, b, c* і площина *xOy*. До алгоритмічної частини визначника цієї поверхні належать правила:1) коло *a* є лінією каркаса поверхні;

2) центр кола має належати лінії *b*;

3) усі лінії каркаса поверхні мають перетинати лінію *c*.

Систематизація поверхонь за виглядом ліній, що утворюють каркас поверхні, чи за законом каркасу дозволяє створити узагальнені алгоритми їх побудови. Найбільш розповсюдженими в інженерній практиці є поверхні з найпростішими лініями каркасу – прямими та колами, які відповідно називають ***лінійчатими*** та ***циклічними***. Деякі поверхні можуть належати як до лінійчатих так і до циклічних. Наприклад, на поверхні циліндра обертання можна визначити як лінійчатий каркас (множина прямолінійних твірних, паралельних до осі), так і циклічний (множина кіл у площинах, перпендикулярних до осі). Основою систематизації поверхонь за законом каркаса може бути вид руху твірної у просторі, якщо каркас поверхні утворюється при звільненні одного параметра твірної. В залежності від характеру переміщення твірної кінематичні поверхні систематизують у окремі групи.

Найпростішими видами руху є обертальний, поступальний та гвинтовий. Поверхні, що утворені обертанням твірної лінії навколо нерухомої осі, називають ***поверхнями обертання.***

Поверхні, що утворюються в результаті поступального руху твірної, називаються ***поверхнями паралельного перенесення,*** а гвинтового руху – ***гвинтовими поверхнями.***

Поверхні можна систематизувати також за іншими ознаками. У разі, коли каркас поверхні утворюється зв'язуванням параметрів множини ліній, що заповнюють простір, систематизація поверхонь за законом каркаса ґрунтується на різних сукупностях ліній, за допомогою яких зв'язуються параметри множини. Такий принцип систематизації лінійчатих поверхонь розглянуто в наступному підрозділі.

Поверхні як і криві лінії часто систематизують за алгебраїчними ознаками. У цьому разі всі поверхні за видом рівняння поділяють на алгебраїчні і трансцендентні. Алгебраїчні поверхні характеризуються порядком – найбільшою кількістю точок перетину поверхні з прямою лінією загального положення. В інженерній практиці частіше за усього використовують поверхні другого порядку – еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, сфери, конуси та циліндри другого порядку. Властивості поверхонь другого порядку детально вивчають в курсі аналітичної геометрії.

**Нерозгортні лінійчаті поверхні**

Лінійчата поверхня утворюється при зв'язуванні трьох параметрів чотирипараметричної множини прямих, що заповнюють простір. Умова перетину прямих лінійчатого простору із заданою лінією зв'язує один параметр множини. Для доведення цього твердження досить визначити множину прямих, які перетинають задану лінію, і порівняти розмірність цієї множини з розмірністю множини прямих, що заповнюють простір. Кожна точка, яка належить площині проекцій, наприклад $\Pi_1$, у парі з довільною точкою $M$ заданої лінії $m$ визначає єдину пряму (рис.3). Всі точки площини $\Pi_1$ у парах з точкою $M$ визначають двопараметричну множину прямих, які проходять через точку $M$. Лінії $m$ належить однопараметрична множина точок, отже, прямі, які перетинають лінію $m$ утворюють трипараметричну множину. Простір заповнюється чотирипараметричною множиною прямих, тому умова перетину прямих із заданою лінією зв'язує один параметр лінійчатого простору.

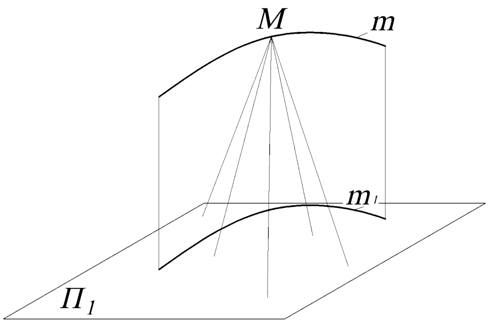



Рис.3

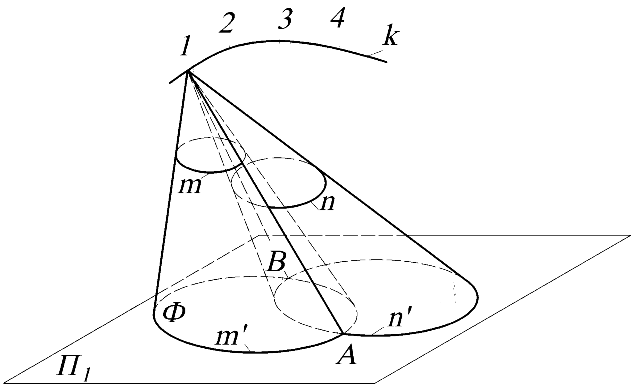



Рис.4

Для утворення поверхні потрібно зв'язати три параметри лінійчатого простору, для чого можна тричі використати умову перетину множини прямих із заданими лініями, наприклад *k, m* та *n* (рис.4). Щоб побудувати дискретний лінійчатий каркас поверхні, слід на одній з ліній (наприклад на лінії *k*) виділити з певним інтервалом точки 1, 2, 3, ... і через них провести твірні поверхні. Для визначення твірних, які проходять через точку 1, будують два конуси із спільною вершиною 1 і напрямними *m* і *n*. Конуси перетинаються з площиною проекцій $П_1$ по лініях $m'$ і $n'$. Точки *A* і *B* перетину ліній $m'$ і $n'$ визначають шукані твірні *A1* і *B1*.

У загальному випадку дві нескінченно близькі твірні лінійчатої поверхні є мимобіжними прямими. Таки поверхні називають нерозгортними. Їх систематизують залежно від виду ліній *k, m* і *n,* які можуть бути кривими і прямими, власними і нескінченно віддаленими.

Поверхню, прямі лінії каркаса якої перетинають три задані мимобіжні прямі, називають ***однопорожнинним гіперболоїдом*** (рис.5). Для полегшення побудови каркаса поверхні одну з прямих задано в проекціювальному положенні. Це дає змогу без додаткових побудов накреслити горизонтальну проекцію дискретного лінійчатого каркаса поверхні. Фронтальну проекцію каркаса будують за вертикальною відповідністю. Особливим випадком однопорожнинного гіперболоїда є гіперболоїд обертання, якій утворюється обертанням прямої твірної навколо мимобіжної з нею осі. На рис.6 відрізок прямої *MN***,** обертаючись навколо горизонтально-проекціювальної осі *l,* утворює лінійчату поверхню. Траєкторіями руху точок *M* і *N***,** є горизонтальні кола, які для побудови дискретного каркаса поверхні поділені на 12 частин. При повороті точки *M* на кут 30° у положення $M'$ точка *N* повернеться на такий самий кут і займе положення $N'$. Горизонтальні проекції точок $M_1'$ і $N_1'$ визначають горизонтальну проекцію твірної *MN* після її повороту на кут 30°. Фронтальну проекцію твірної будують за вертикальною відповідністю. Так саме будують інші положення твірної *MN*. Отримана поверхня обертання є симетричною відносно довільної горизонтально-проекціювальної площини, що проходить через вісь *l*. Тому кожна пряма лінія каркаса повинна мати симетричну їй лінію. Отже, утворена поверхня має дві множини прямих ліній каркаса, що перетинаються між собою (рис.6). Три довільно обрані лінії однієї множини можна взяти як напрямні лінії другої множини.

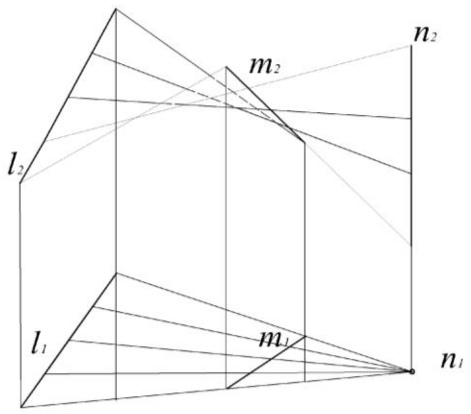



Рис.5

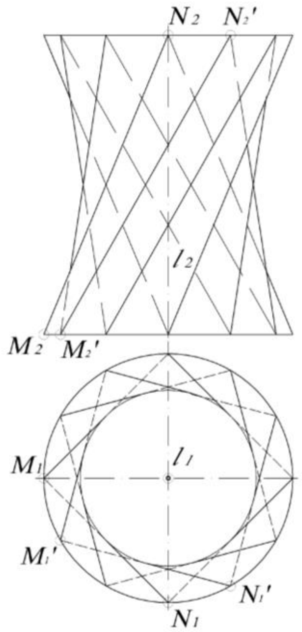



Рис.6

Можна навести численні приклади інженерних споруд, які мають форму гіперболоїда обертання, зокрема башта Аджигольського маяка (Дніпровський лиман, Херсонська область), що побудована за проектом інженера В.Г.Шухова в 1911р. Якщо напрямну ***n*** віддаляти від напрямних *l* і *m* (див. рис.5), то кути між горизонтальними проекціями ліній каркаса будуть зменшуватись до нуля, а мимобіжні лінії каркаса у просторі стануть паралельними площині Г**,** яку називають ***площиною паралелізму*** (рис.7).

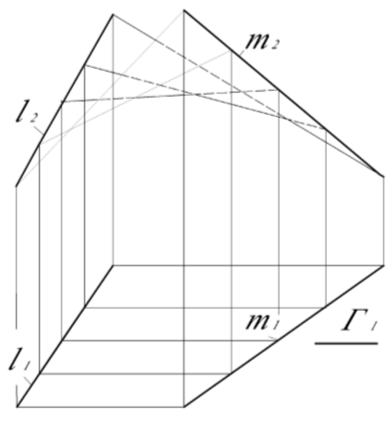



Рис.7

Отже нескінченно віддалена пряма замінюється площиною паралелізму ліній каркаса. Поверхню, утворену множиною прямих, що перетинають дві мимобіжні прямі напрямні і паралельні площині паралелізму називають ***гіперболічним параболоїдом***, або нерозгортною площиною. Лінійчаті поверхні з невласною прямою напрямною, яка замінюється площиною паралелізму, називають ***поверхнями Каталана***. Крім гіперболічного параболоїда до поверхонь Каталана належать ***коноїд*** і ***циліндроїд***. На відміну від гіперболічного параболоїда, в якого дві власні напрямні – прямі, у коноїда напрямними є пряма і крива (рис.8 і 9), а у циліндроїда – дві криві (рис.10). На рис.8 побудовано дві проекції лінійчатого каркасу коноїда, якій має за напрямні: коло *a*, що належить фронтальній площині, пряму *b*, загального положення та горизонтальну площину паралелізму Г. Крок дискретного каркаса поверхні обрано рівномірним уздовж відрізка *AB* напрямної *b*.

Фронтальні проекції ліній каркаса проведено паралельно до площини Г. Горизонтальну проекцію побудовано за вертикальною відповідністю.

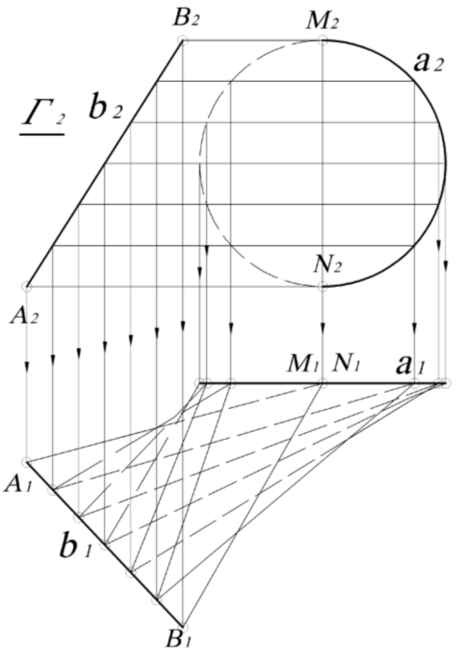



Рис.8

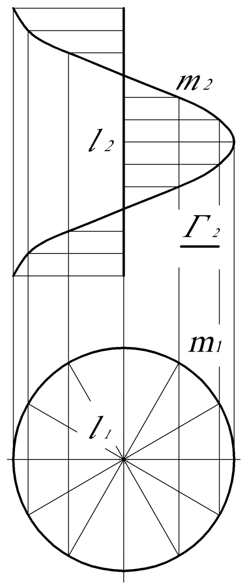



Рис.9

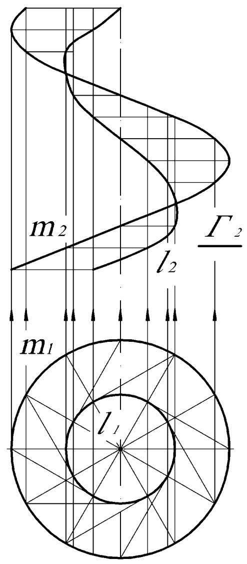



Рис.10

Циліндроїди та коноїди широко застосовують у техніці та будівництві у вигляді гвинтових поверхонь, які утворюються гвинтовим рухом твірної по гвинтовій напрямній лінії. На рис.9 наведено приклад побудови поверхні гвинтового коноїда, який ще називають ***прямим гелікоїдом***. Лінії каркаса поверхні паралельні горизонтальній площині *Г* і перетинають гвинтову лінію *m* (криву напрямну) і вісь гвинтової лінії *l* (пряму напрямну).

На рис.10 показано гвинтовий циліндроїд, двома кривими напрямними якого є дві співвісні гвинтові лінії *m* та *l*, а третьою – горизонтальна площина паралелізму Г. У практиці будівництва у вигляді прямих гвинтових коноїдів (циліндроїдів ) споруджують гвинтові сходи.

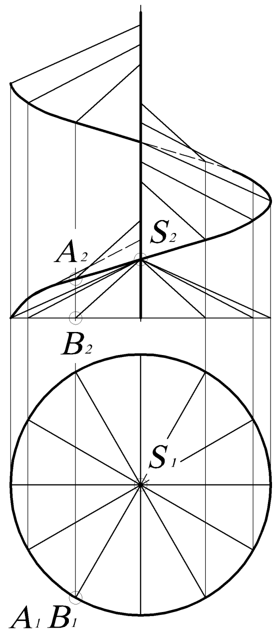



Рис.11

Якщо площина паралелізму ліній каркаса поверхні замінює нескінченно віддалену пряму напрямну, то нескінченно віддалена крива напрямна замінюється напрямним конусом. На рис.11 наведено приклад поверхні з напрямним конусом.

Цю поверхню називають ***нерозгортним гелікоїдом***. Крім напрямного конуса вона має ще дві власні напрямні – гвинтову лінію і вісь гвинтової лінії. Прямі лінії каркаса гелікоїда перетинають власні напрямні і паралельні відповідним твірним напрямного конуса. Для побудови довільної лінії каркаса, яка, наприклад, проходить через точку *A* гвинтової лінії, спочатку визначають твірну *BS* конуса, горизонтальна проекція якої збігається з проекцією лінії каркаса гелікоїда. Фронтальну проекцію лінії каркаса проводять через точку *A* паралельно до твірної *BS* конуса. Нерозгортний гелікоїд обмежує поверхню трикутної різьби.

**Розгортні лінійчаті поверхні**

На відміну від нерозгортних поверхонь, у яких кожна пара нескінченно близьких ліній каркаса є мимобіжними, у розгортних поверхонь вони перетинаються. Розгортну лінійчату поверхню можна уявити як граничне положення гранної поверхні з гранями, ширина яких наближається до нуля. Тому така поверхня може бути, як багатогранник розгорнута на площину. В загальному вигляді розгортна поверхня утворюється як неперервна однопараметрична множина дотичних до просторової кривої лінії m і називається ***торсом*** (рис.12). Криву ***m*** називають ***ребром звороту торса***. Найпростішими окремими випадками розгортної поверхні є конус і циліндр.

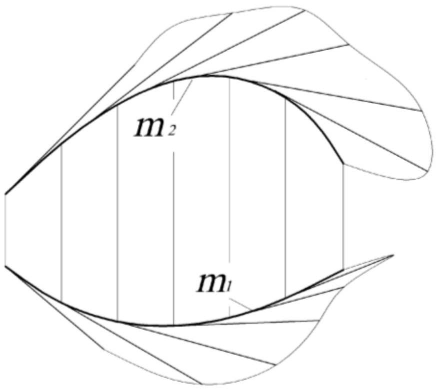



Рис.12

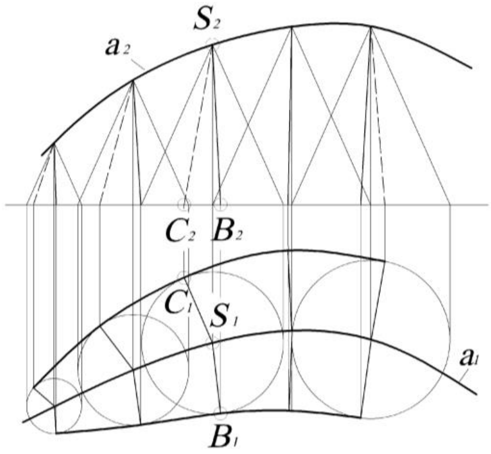



Рис.13

Під час розв’язання задач дорожнього будівництва та вертикального планування місцевості укоси криволінійних ділянок виконують у вигляді торса. Таку поверхню називають ***поверхнею однакового нахилу*** (рис.13). Вона характеризується тим, що всі її твірні мають однакові кути нахилу до горизонтальної площини проекцій. З цієї властивості випливає алгоритм побудови лінійчатого каркаса поверхні.

Задану просторову криву *a* розглядають як множину вершин конусів, твірні яких однаково нахилені до горизонтальної площини проекцій. Поверхню однакового нахилу визначають як обвідну множини конусів. Тільки дві твірні – *SB* і *SC* - кожного конуса є лініями каркаса шуканої поверхні.

Особливим випадком поверхні однакового нахилу є ***розгортний гелікоїд*** (рис.14). Ребром звороту цієї поверхні є циліндрична гвинтова лінія. Поверхня розгортного гелікоїда перетинається з горизонтальною площиною по плоскій кривій – евольвенті кола. Таку властивість розгортного гелікоїда використовують для побудови його лінійчатого каркаса.

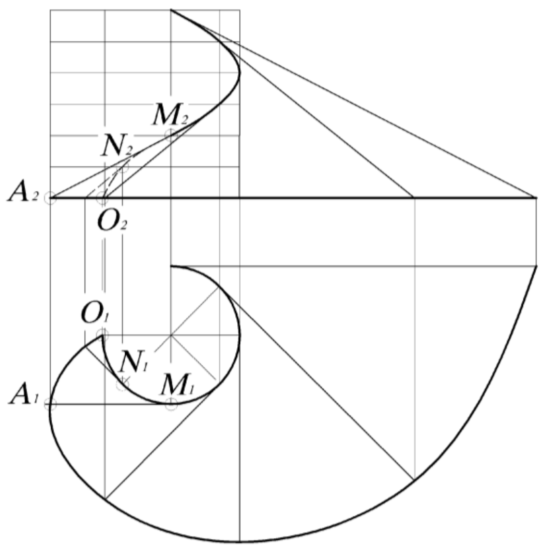


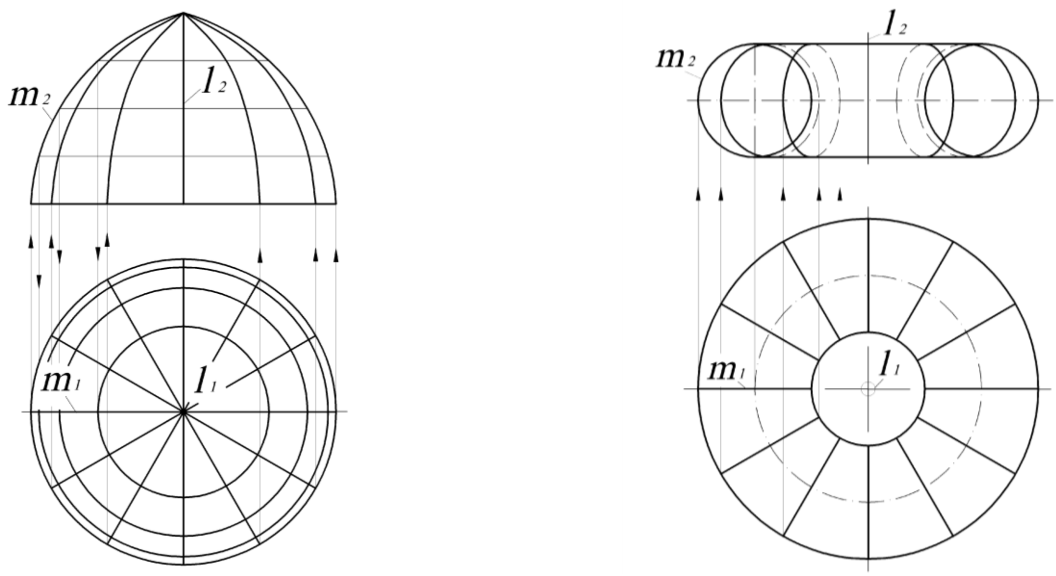
Рис.14

Для цього спочатку будують евольвенту, яка відсікає на дотичних до кола відрізки, що дорівнюють довжині дуги кола між точкою дотику і початковою точкою *O*, наприклад $M_1A_1 = \cup M_1N_1O_1$. Відрізки дотичних між точкою дотику і точкою евольвенти є горизонтальними проекціями каркаса поверхні. Фронтальну проекцію каркаса будують за вертикальною відповідністю.

**Поверхні з кривими лініями каркаса**

Інженерна практика потребує застосування поверхонь з найпростішими лініями каркаса. Такими кривими є криві другого порядку, зокрема коло. Поверхні, на яких існує каркас кіл, називають циклічними. Найпоширеніший спосіб утворення таких поверхонь – кінематичний. Систематизують їх переважно за законом каркаса (законом руху твірної). Поверхні обертання утворюються шляхом обертання прямої або кривої лінії навколо нерухомої осі. Для спрощення побудови каркаса поверхні за вісь обертання приймається вертикальна пряма. Визначником поверхні обертання є ***твірна*** – лінія, що обертається навколо осі, і вісь обертання – нерухома лінія. Кожна точка твірної при обертанні навколо осі окреслює коло з центром, якій належить осі обертання. Ці кола називають ***паралелями***. Паралель найбільшого діаметру називається ***екватором.*** Паралель найменшого діаметру називається ***горлом***. Площини, що проходять через вісь обертання називаються меридіональними площинами, а лінії перетину цих площин з поверхнею обертання - ***меридіанами.*** Січна площина, що проходить через вісь обертання і є паралельною до площини проекцій називається ***головною меридіональною площиною***, а лінія її перетину з поверхнею – ***головним меридіаном.*** Кожна паралель перетинає всі меридіани під прямим кутом. Паралелі і меридіани утворюють на поверхні сітчастий каркас ортогональних ліній.

При заданні поверхні обертання на рисунку вказують проекції осі обертання, фронтальну проекцію головного меридіана і горизонтальну проекцію екватора. Найпростішими прикладами поверхонь обертання є циліндр, конус обертання і сфера. Поверхня обертання кола навколо осі, що належить площині кола, але не проходить через центр кола, називається тором (рис.15а, 15б). Тор буває закритий, якщо вісь обертання перетинає твірне коло (рис.15,а), і відкритим, якщо вісь не перетинає твірне коло (рис.20,б). Всі поверхні обертання належать до циклічних поверхонь.




*а)* *б)*

Рис.15

Із давніх часів поверхні обертання застосовують в архітектурі як поверхні куполів культових і громадських споруд. Поверхні, утворені обертанням кривої другого порядку навколо власної осі, називають поверхнями обертання другого порядку. При обертанні еліпса навколо його осі утворюється еліпсоїд обертання, при обертанні параболи – параболоїд обертання. Гіперболоїд обертання може бути однопорожнинним – при обертанні гіперболи навколо уявної осі, та двопорожнинним, якщо гіпербола обертається навколо дійсної осі.

Гвинтові циклічні поверхні утворюються рухом кола, центр якого ковзає по циліндричній гвинтовій лінії. Якщо площина кола весь час залишається нормальною до гвинтовій лінії, то поверхню називають ***гелікоїдальним циліндром***.

Цю саму поверхню можна утворити як обвідну однопараметричної множини однакових куль, центри яких розміщені на гвинтовій лінії.(Рис.16) Прикладом застосування такої поверхні в техніці є циліндрична пружина. Точку *M* обрису гелікоїдального циліндра називають точкою зникнення видимого контуру. Точність її визначення залежить від розміру кроку твірних куль.

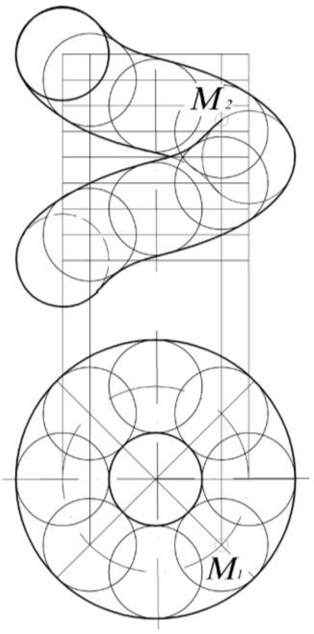



Рис.16

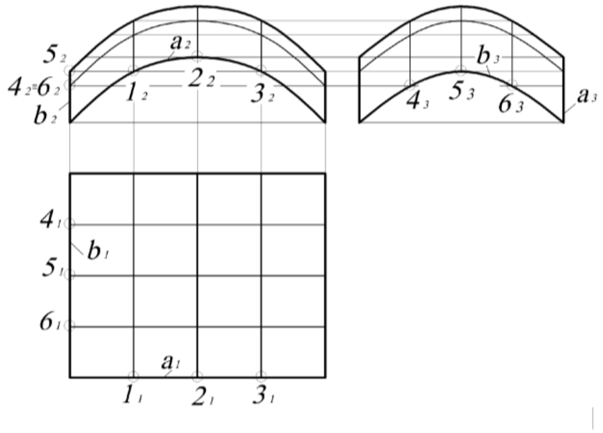



Рис.17

Поверхні паралельного перенесення утворюються поступальним рухом твірної за заданою траєкторією. Геометричною частиною визначника такої поверхні є одна з її твірних і траєкторія будь якої точки твірної.

Якщо задану твірну і траєкторію руху точки твірної поміняти ролями, то утворюється та сама поверхня. Множина твірних і траєкторій точок твірних утворюють на поверхні ***сітку Чебишова*** (названа так за ім'ям російського математика XIX ст., який вивчав властивості цих сіток). Довільна клітина такої сітки має однакові за довжиною протилежні сторони.

На рис.17 показано побудову сітчастого каркаса поверхні перенесення, якщо твірною та напрямною є дуги кіл, розташовані у фронтальній та профільній площинах. Горизонтальна проекція сітчастого каркаса зображується прямокутною сіткою, оскільки лінії каркаса поверхні перенесення розміщені в паралельних площинах. Для побудови фронтальної проекції каркаса спочатку визначають фронтальні проекції точок 5, 4, 6 напрямної *b* за відповідністю з профільною проекцією, через які проходять дуги, що дорівнюють і паралельні твірній *a*. Так само будують профільну проекцію каркаса.

Поверхню перенесення, в якої твірною і напрямною є параболи з паралельними осями, називають ***параболоїдом***. Якщо твірна і напрямна параболи повернуті вершинами в один бік, то утворюється ***еліптичний параболоїд***.(Рис.18), зокрема, коли ці параболи однакові, то утворюється ***параболоїд обертання***. Якщо твірна та напрямна параболи повернуті вершинами в протилежні боки, то утворюється гіперболічний параболоїд.(Рис.19).

Поверхні перенесення широко застосовують в архітектурному проектуванні для утворення оболонок покриттів будівель і споруд.

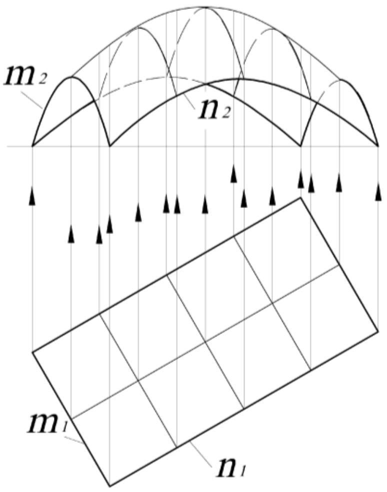



Рис.18

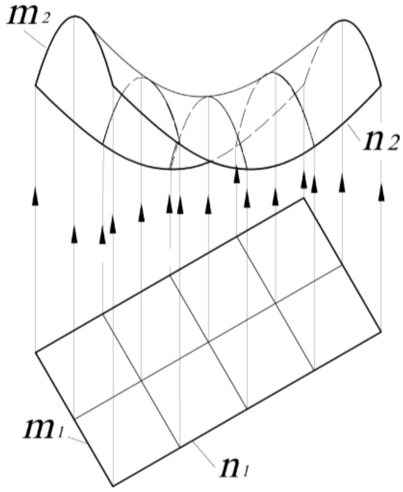



Рис.19

**Дотичні площини**

Якщо на поверхні через будь-яку точку $K$ провести множину кривих, то всі дотичні до цих кривих у точці $K$ належать єдиній площині, яку називають ***дотичною площиною*** (рис.20). Оскільки площина цілком визначається двома прямими, що перетинаються, то для проведення в точці на поверхні дотичної площини слід побудувати дві дотичні прямі до будь-яких двох кривих ліній поверхні, що проходять через цю точку (криві $m$ та $p$ і дотичні $l$ та $q$).

***Нормаллю*** до поверхні називають пряму, проведену перпендикулярно до дотичної площини в точці дотику. Для побудови нормалі в цій точці поверхні досить провести перпендикуляр до двох дотичних ($n$ на рис.20).

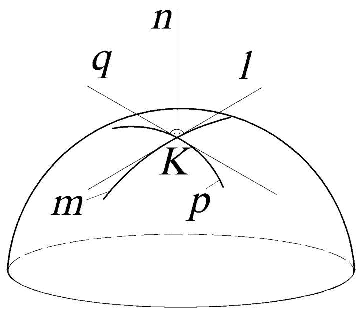



Рис.20

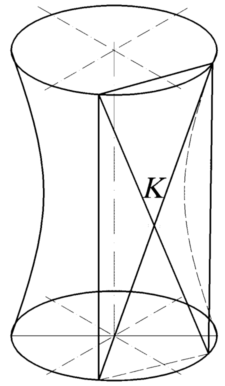



Рис.21

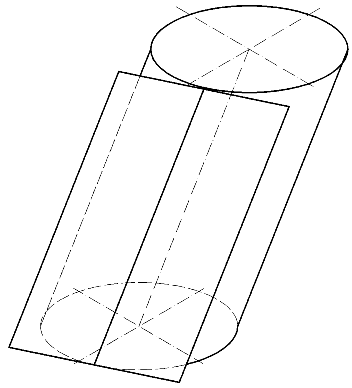


Рис.22

На кривих поверхнях є особливі точки, в яких дотична площина або не визначена, або не є єдиною. До них належать, наприклад,вершина конуса або точки лінії самоперетину поверхні.

Залежно від виду кривої поверхні дотична площина може мати з нею

а) одну спільну точку (рис.20);

б) одну точку дотику та лінію перетину у вигляді двох прямих, прямої та кривої або кривої з вузловою точкою (на рис.21 показано дотичну площину до однопорожнинного гіперболоїда, яка перетинає поверхню по двох прямих);

в) множина точок, що належать одній прямій або кривій лінії поверхні (рис.22).

В усіх випадках точка дотику, що задана на поверхні, цілком визначає єдину дотичну площину, яку для зручності будують у вигляді двох перетинних або паралельних прямих.

На рис.23 показано побудову площини, дотичної до сфери у заданій точці *A*. Площину визначено за допомогою дотичних $h$ і $f$ до горизонтального та фронтального кіл, що є перерізами сфери горизонтальною і фронтальною площинами, проведеними через точку *A***.**

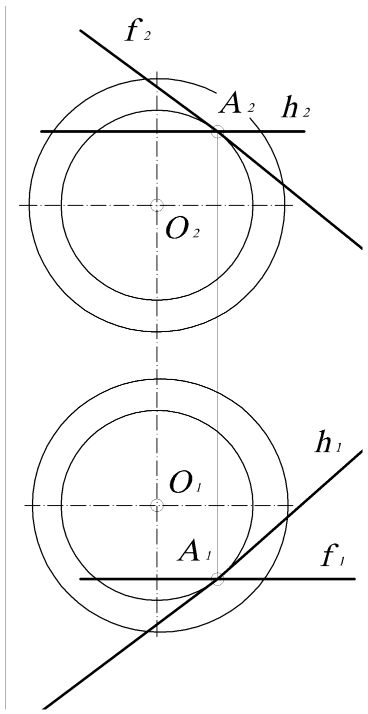



Рис.23

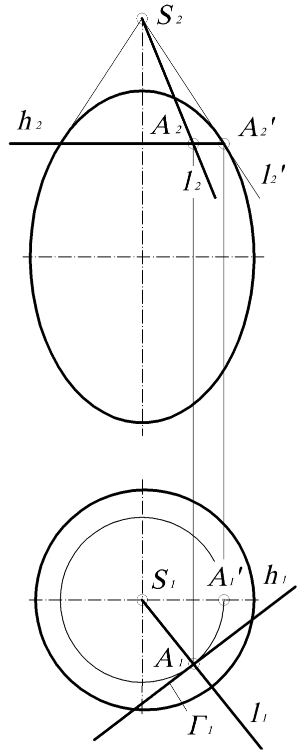



Рис.24

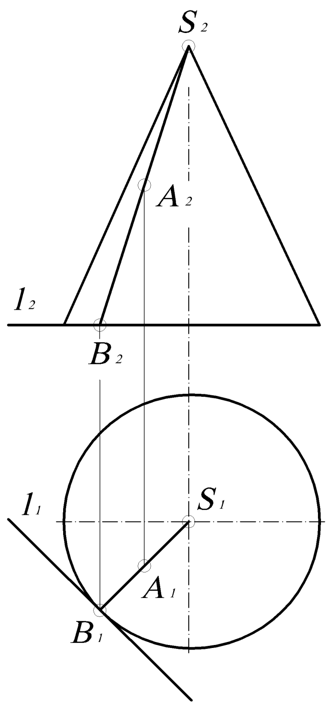



Рис.25

На рис.24 показано побудову площини, дотичної до еліпсоїда обертання в точці *A* на його поверхні. Для побудови дотичних, що визначають шукану площину, використовують паралель і меридіан, які проходять через точку *A*. Дотична $h$ до кола паралелі є горизонталлю. Горизонтальна проекція меридіонального перерізу еліпсоїда площиною Г є прямою лінією, що проходить через горизонтальну проекцію осі еліпсоїда і точку *A*. З цією проекцією збігається горизонтальна проекція $l_1$ дотичної до меридіана. Для побудови фронтальної проекції дотичної *l* до меридіонального перерізу площину Г перерізу повертають навколо осі еліпсоїда у фронтальне положення. Після повороту площини Г точка *A* займе положення $A'$ на контурному меридіані.

Через повернуту точку $A'$ проводять дотичну $l_2$ до контурного меридіана і визначають точку *S* перетину її з віссю еліпсоїда обертання. Всі дотичні до меридіональних перерізів, що проходять через точки кола паралелі, перетинатимуть вісь еліпсоїда у точці *S*, тому фронтальна проекція дотичної до меридіана, яка проходить через точку *A*, зобразиться прямою $A_2S_2$**.** Як видно з рисунка, дотичну площину визначено за допомогою її горизонталі *h* та лінії найбільшого нахилу *l*.

На рис.25 точка *A*, через яку потрібно провести дотичну площину, належить поверхні конуса обертання. Однією з прямих, що визначають дотичну площину, є твірна конуса, яка проходить через вершину *S* і точку *A*. Другу пряму – *l*, дотичну до кола основи конуса, проведено через точку *B* перетину основи з твірною *SA*. Якщо точку дотику не задано, то до поверхні можна провести нескінченну множину дотичних площин. Усі площини, дотичні до нерозгортної поверхні, становлять двопараметричну множину за кількістю точок на поверхні. До розгортної поверхні можна провести лише однопараметричну множину дотичних площин, оскільки в усіх точках кожної прямолінійної твірної дотичною до поверхні є одна спільна площина.

Щоб визначити єдину дотичну площину, потрібно зв’язати всі вільні параметри множини. Тому для побудови площини, дотичної до нерозгортної поверхні, потрібно додатково задати умови, що зв’язують два параметри множини дотичних площин, а для побудови площини, дотичної до розгортної поверхні, - умову, що зв’язує один вільний параметр множини площин. Два параметри можна зв’язати умовою проходження площини через власну або невласну пряму (умова паралельності до заданої площини).

На рис.26 показано приклад проведення дотичної площини до конуса обертання через власну точку *A*. Оскільки всі площини, дотичні до конуса проходять через його вершину, шукана площина має пройти через пряму *SA,* що перетинається з горизонтальною площиною проекцій у точці *M*. Другою прямою, яка визначає дотичну площину, може бути дотична *m* або *l*, проведена через точку *M*

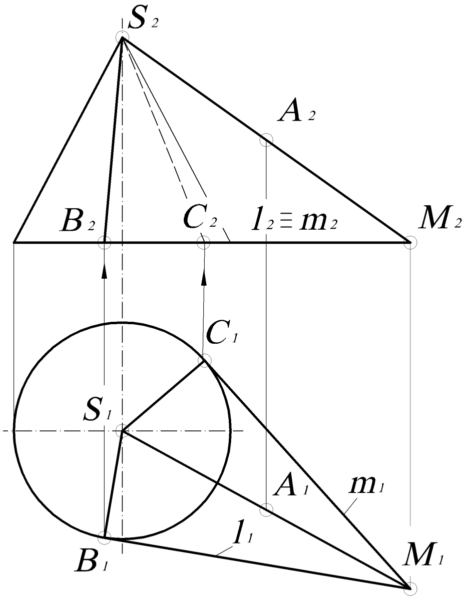



Рис.26

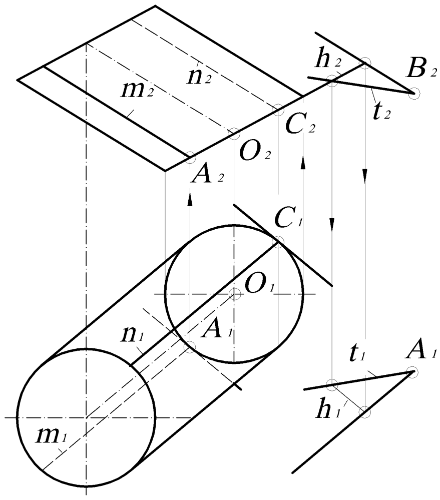



Рис.27

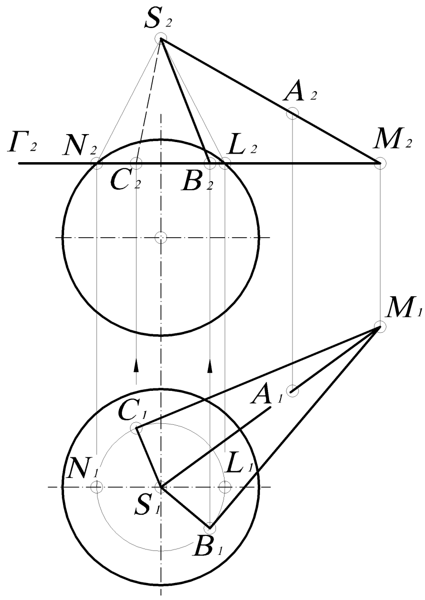



Рис.28

до кола основи конуса. По точках *B* і *C* дотику прямих до основи конуса визначають твірні дотику *SB* і *SC*.

Для побудови площини, яка дотична до циліндра і проходить через невласну точку або паралельно заданому напряму *t* (рис.27), треба врахувати те, що вона має містити твірні циліндра. Через довільно обрану точку *B* на прямій *t* проводять пряму, паралельну твірним циліндра, і отримують площину, паралельну шуканій. Будують слід цієї площини *h* на площині основи циліндра. Дотичні, паралельні цьому сліду, та твірні *m* і *n* дотику визначають дві площини, дотичні до циліндра.

Алгоритм побудови площин, дотичних до циліндра та конуса, є основою для розв’язування складніших задач проведення площин, дотичних до нерозгортних поверхонь другого порядку.

На рис.28 показано проведення через точку *A* двох площин, дотичних до сфери у заданому горизонтальному перерізі площиною Г. Спочатку будують конус, усі прямолінійні твірні якого дотичні до сфери у точках заданого перерізу. Вершину *S* цього конуса визначають як точку взаємного перетину контурних твірних конуса, що дотикаються до контуру сфери в точках *N* і *L* заданого перерізу. Потім через точку *A* проводять дві площини, дотичні до цього конуса, як це було зроблено на рис.26. Площини *MBS* та *MCS* є дотичними до сфери, оскільки прямі *MB* і *MC* дотикаються до горизонтального перерізу сфери, а прямі *SB* і *SC* є твірними конуса. які за побудовою також дотикаються до сфери в точках *B* та *C*.

На рис.29 показано приклад проведення площини, дотичної до сфери. через невласну пряму, яку задано площиною загального положення Г. Площину Г визначено фронталлю *f* та горизонталлю *h*, що перетинаються в точці *B*. Спочатку будують циліндр, твірні якого є паралельними до *f* і дотичними до сфери. Множина точок дотику твірних циліндра до сфери утворює коло в площині Δ. Площини, дотичні до цього циліндра і паралельні прямій *h*, є шуканими. Площина Ω перерізує циліндр по еліпсу. горизонтальною проекцією якого є коло, що збігається з горизонтальним контуром сфери. Твірні *m* і *n* дотику шуканих площин до циліндра будують так само, як було показано на рис.28. Точки дотику *M* і *N* площин до сфери визначають як точки перетину твірних *m* і *n* з площиною Δ.

На рис.30 побудовано площину, дотичну до тора, яка паралельна заданій площині *ABC*. Тор і площину *ABC* повертають навколо осі тора таким чином, щоб

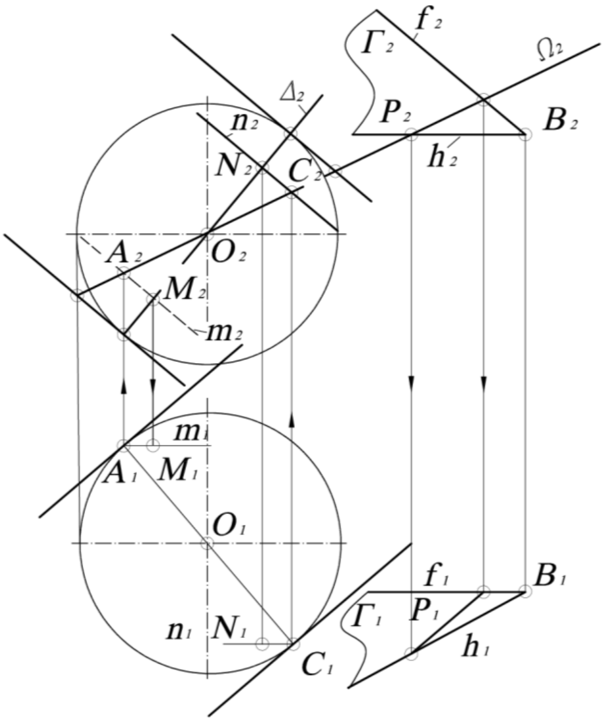



Рис.29

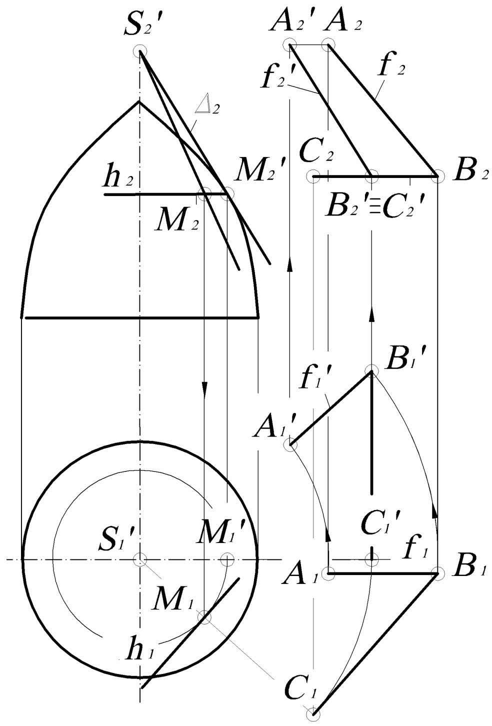



Рис.30

горизонталь ***BC*** площини *ABC* стала перпендикулярною до фронтальної площини проекцій. Після повороту контур фронтальної проекції тора не змінюється, а площина *ABC* стає фронтально проекціювальною. У цьому положенні паралельно $A_2'B_2'$ проводять фронтальний слід дотичної площини і визначають точку дотику $M_2'$. Вихідне положення точки *M* отримують поворотом тора у зворотному напрямі. Дотичну площину визначають горизонталлю *h* та лінією найбільшого нахилу *SM* .