

## Лекція 9.

### ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Позиційні задачі передбачають геометричні побудови, пов'язані із взаємним положенням геометричних фігур. Прикладами найпростіших позиційних задач можуть бути визначення точки перетину прямої і площини або побудова лінії перетину двох площин. Більш складні позиційні задачі пов'язані з гранними і кривими поверхнями. При перерізанні поверхні площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні з січною площиною. Для побудови точок перерізу можна застосувати способи допоміжних січних площин або способи перетворення проєкцій. Допоміжні січні площини здебільшого обирають проєкціювальними, що дає можливість визначати множину точок ліній перетину плоских ліній каркаса поверхні із заданою площиною. Способи перетворення проєкцій дають змогу перевести площину чи поверхню, що перетинається, в проєкціювальне положення і, таким чином, спростити розв'язання задачі. Отже обидва способи ґрунтуються на алгоритмах побудови перерізу поверхні проєкціювальною площиною.

#### **Переріз поверхні проєкціювальною площиною**

На рис.1 наведено побудову перерізу сфери проєкціювальною площиною  $\Sigma$ , перпендикулярною до площини проєкцій, на якій вона зображується прямою лінією. Цю проєкцію називають *виродженою*. Одна з проєкцій лінії перерізу поверхні завжди збігається з виродженою проєкцією проєкціювальної січної площини. Отже задача побудови лінії перерізу зводиться до пошуку її другої проєкції або до визначення другої проєкції множини точок, що належать поверхні. Другу проєкцію точки, що належить будь - якій лінії, будують просто за вертикальною відповідністю, тому для побудови другої проєкції лінії перерізу досить задати поверхню у вигляді множини простих ліній каркаса, проєкції яких можна накреслити інструментально без додаткових побудов. Відсутню проєкцію кожної точки лінії перерізу визначають як проєкцію точки, що належить відповідній лінії каркаса.

На рис.2 наведено побудову перерізу конуса обертання фронтально проєкціювальною площиною  $\Omega$ .

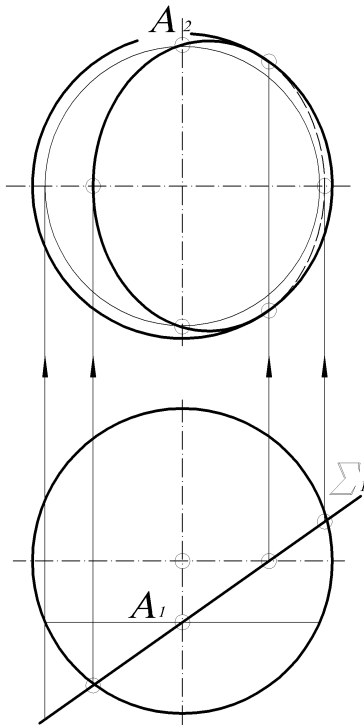


Рис.1

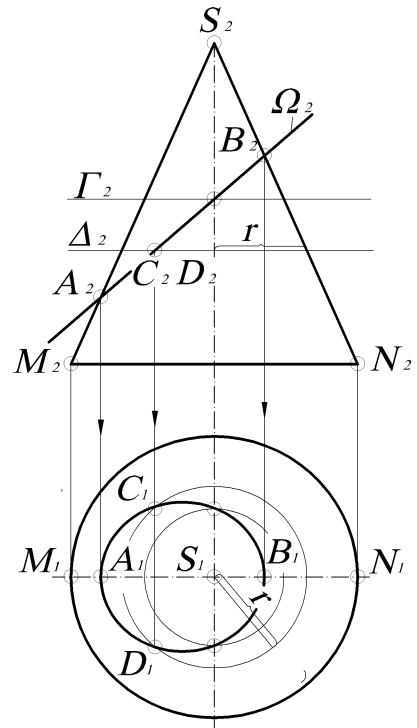


Рис.2

Фронтальна проекція перерізу збігається з проекцією  $\Omega_2$  площини  $\Omega$ . Точки горизонтальної проекції будують за вертикальною відповідністю, як проекції точок, що належать лініям каркаса конуса. Це можуть бути кола горизонтальних перерізів чи прямолінійні твірні. На рис.2 точки  $A$  і  $B$  знайдено як результат перетину площини з твірними  $SM$  і  $SN$ . Для побудови точок  $C$  і  $D$  проводять допоміжну горизонтальну площину  $\Delta$ , яка перерізає поверхню по колу. Це коло перетинає площину  $\Omega$  в шуканих точках  $C$  і  $D$ , фронтальні проекції яких визначають безпосередньо. Горизонтальні проекції  $C_1$  і  $D_1$  визначають за вертикальною відповідністю на горизонтальній проекції того самого кола перерізу. Таким чином можна побудувати безліч точок лінії перерізу, яка в цьому випадку є еліпсом.

### Спосіб косокутного допоміжного проєкціювання

Беручи до уваги простоту визначення лінії перерізу поверхні проєкціювальною площиною, доцільно подати задану площину загального положення як проєкціювальну. Це можна зробити, якщо обрати за напрям проєкціювання довільну пряму, що належить цій площині. На додатковій проєкції, що утворюється при цьому, січна площина проєкціюється прямою, тому точки її перетину з проєкціями ліній каркаса поверхні визначають безпосередньо на цій проєкції. Основні проєкції точок лінії перерізу будують за відповідністю з

допоміжними проекціями точок перетину ліній каркаса з площиною. За площину допоміжних проекцій обирають площину, що забезпечує простоту побудов.

На рис.3 наведено побудову перерізу конуса обертання площиною загального положення, що задана слідами  $f$  і  $h$ . Напрямок допоміжного проєкціювання обрано паралельним горизонтальному сліду  $h$  площини, а допоміжну проєкцію побудовано на фронтальній площині проєкцій. Косокутною проєкцією площини є її фронтальний слід  $f$ , з яким збігається косокутна проєкція перерізу. Фронтальну і горизонтальну проєкції точок лінії перерізу будують за відповідністю з допоміжними проєкціями точок перерізу.

На рис.4 наведено побудову перерізу циліндра другого порядку площиною загального положення, що задана паралельними прямими  $m$  і  $n$ .

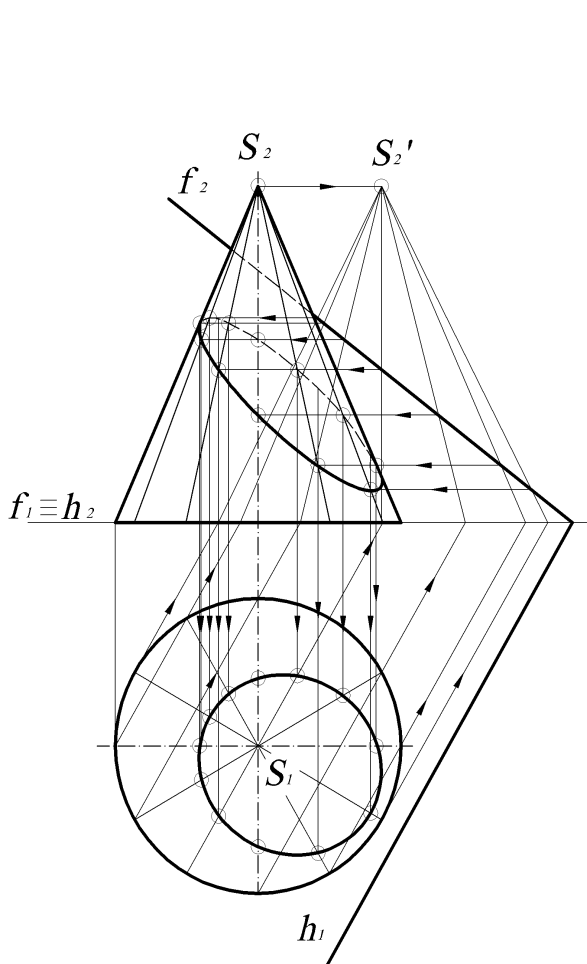


Рис.3

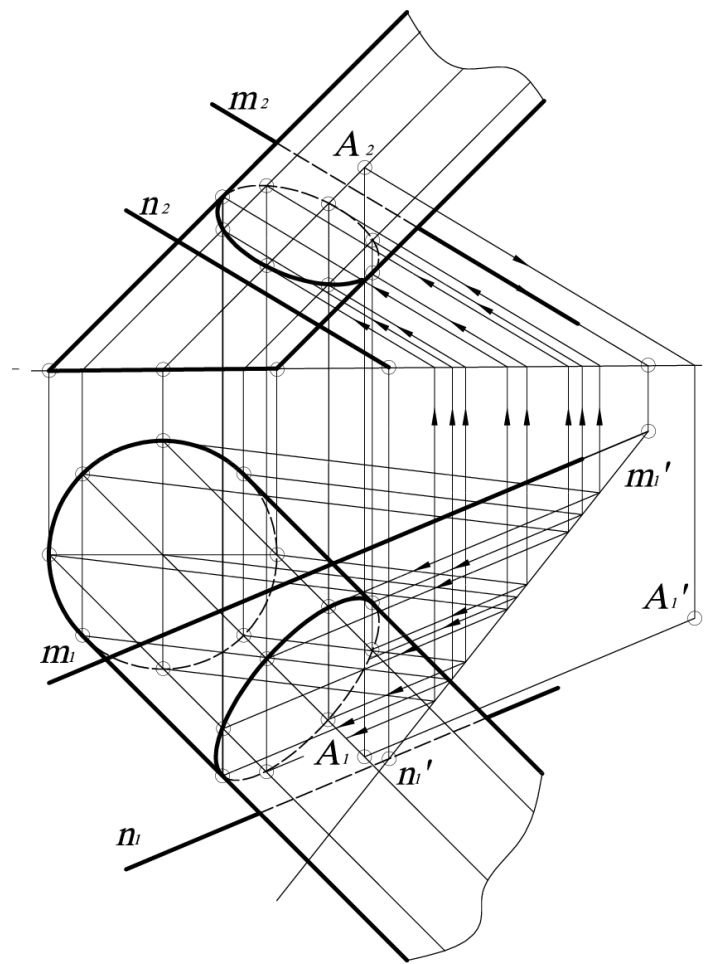


Рис.4

За напрям проєкціювання обрано задані прямі  $m$  і  $n$ , а за площину допоміжних проєкцій – площину основи циліндра. Такий вибір зменшує кількість операцій побудови, оскільки косокутна проєкція основи циліндра збігається з її горизонтальною проєкцією. Косокутні проєкції твірних циліндра зберігають паралельність. Тому для визначення напрямку допоміжних проєкцій твірних

циліндра будують допоміжну проекцію лише однієї точки  $A$ , що належить осі циліндра, визначають напрям допоміжної проекції осі, паралельно якій проводять проекції твірних. Допоміжна проекція лінії перерізу збігається з виродженою допоміжною проекцією площини  $mn$ , що дає змогу визначити допоміжні проекції шуканих точок на твірних циліндра. Основні проекції точок лінії перерізу визначають косокутним проекціювання у зворотному напрямі.

Допоміжна проекція дає можливість наочно визначити видимість фігур, що перетинаються. Якщо подивитися на допоміжну проекцію в напрямі, протилежному косокутному проекціювання, то можна побачити, яка частина циліндра знаходиться поза січною площиною на основних проекціях.

### Спосіб січних площин

На рис.5 наведено побудову перерізу поверхні обертання площиною загального положення за допомогою січних площин. Будь-яка допоміжна січна площина перерізає задану площину по прямій лінії, а поверхню – по лінії її каркаса. Ці дві лінії, перетинаючись між собою, визначають точки, спільні для поверхні та заданої площини. Використання множини січних площин дає змогу побудувати множину точок лінії перерізу. Отже, розв'язування задачі зводяться до того, щоб вибрати множину допоміжних площин, що перетинають поверхню по простих лініях каркаса (прямих або колах), які можна накреслити інструментально без допоміжних побудов.

Площина перерізу на рис.5 задана фронталлю  $f$  і горизонталлю  $h$ . Для розв'язування задачі використовують допоміжні січні горизонтальні площини  $\Sigma$  і  $\Omega$ , що перерізають поверхню по паралелях, та горизонтально проекціювальні площини  $\Gamma$  та  $\Delta$ , які перерізають поверхню по меридіанах. Спочатку визначають характерні точки проекцій перерізу – точки на контурному меридіані, а також найвищу та найнижчі точки лінії перерізу.

Для визначення точок 1 і 2 перерізу, що лежать на контурному меридіані, проводять допоміжну фронтальну площину  $\Gamma$ , що проходить через вісь поверхні та перерізає її по цьому меридіану. Задана площина перетинається з допоміжною площиною  $\Gamma$  по фронталі  $t$ , горизонтальна проекція якої збігається з  $\Gamma$ , а фронтальна проекція паралельна  $f_2$  і проходить через точку  $A$  перетину горизонталі  $h$  з  $t$ . Горизонтальні проекції точок 1 і 2 знаходять за вертикальною відповідністю в площині  $\Gamma$ .

Щоб визначити найвищу точку 3 перерізу, через вісь проводять допоміжну січну площину  $\Delta$ , перпендикулярну до горизонталі  $h$ . Площина  $\Delta$  перетинає задану площину по лінії найбільшого нахилу  $BC$ , а поверхню – по меридіану. Отримані

лінії перетину повертають у фронтальне положення обертанням навколо осі поверхні. У повернутому положенні меридіан перерізу поверхні площиною  $\Delta$  збігається з фронтальною проекцією контуру поверхні, а лінія  $BC$  перетину площини переміщується в положення  $B'C'$ . Точку  $3'$  перетину прямої  $B'C'$  з контуром поверхні повертають у вихідне положення площини  $\Delta$ . Таким чином визначають основні проекції точки  $3$ .

Проміжні точки шуканого перерізу визначають за допомогою горизонтальних січних площин  $\Sigma$  і  $\Omega$ , кожна з яких перетинає задану площину по горизонталях, а поверхню – по колу. Коло і горизонталь, які належать одній допоміжній площині, перетинаються в двох точках шуканого перерізу. На рис.9.6 показано побудову перерізу гіперболічного параболоїда площиною загального положення, яку задано трикутником. Переріз визначають як множину точок перетину твірних поверхні із заданою площиною. Через кожен твірну проводять допоміжну горизонтально проекціювальну січну площину. Знайдені фронтальні проекції лінії перетину допоміжних площин із площиною  $ABC$ , перетинаючись з відповідними твірними, визначають точки шуканого перерізу.

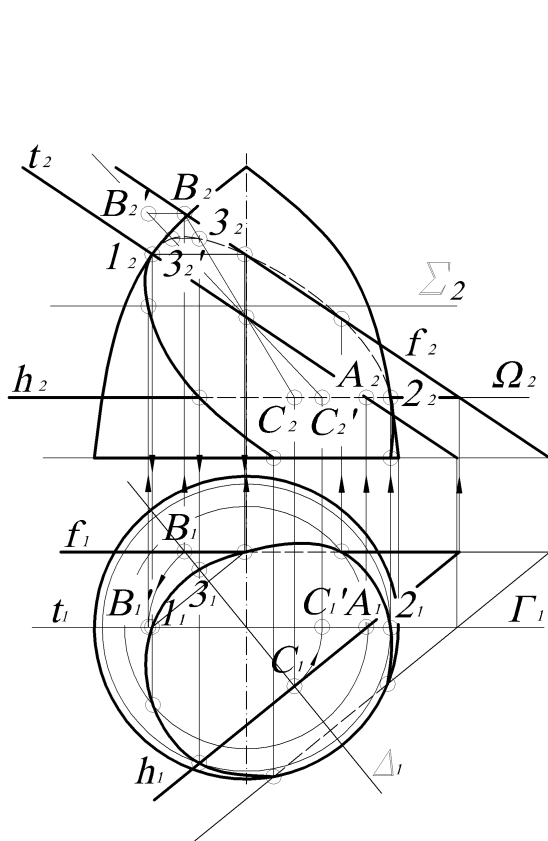


Рис.5

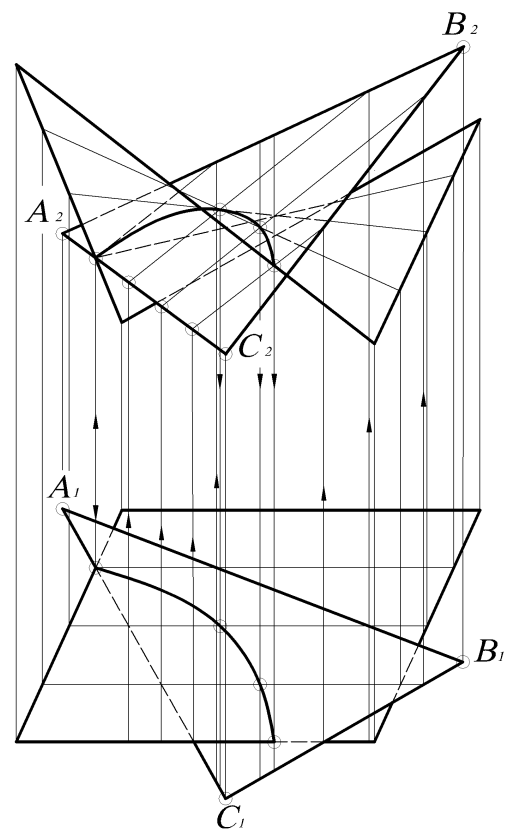


Рис.6

## Перетин поверхонь другого порядку з прямою лінією

Пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках. Точки перетину прямої  $m$  з проекціювальним циліндром другого порядку (рис.7,б) визначають на виродженій проекції циліндра як результат перетину двох ліній. Другу проекцію точок визначають за вертикальною відповідністю.

Для побудови точок перетину прямої  $AB$  з циліндром другого порядку загального положення можна побудувати допоміжну проекцію, де циліндр зображується лінією, і тоді визначити шукані точки, як показано на рис.7,а. Таку проекцію будують косокутним проекціюванням. На рис.7,б точки 1 і 2 перетину прямої  $AB$  з поверхнею циліндра побудовано допоміжним проекціюванням поверхні та прямої на площину основи циліндра в напрямі, паралельному твірним циліндра. При цьому кожна твірна поверхні буде проекціювальною, а допоміжна проекція поверхні збігатиметься з колом основи циліндра. Допоміжною проекцією прямої  $AB$  є пряма  $A_1'B_1'$ . Точки  $1_1'$  і  $2_1'$  перетину основи циліндра з прямою  $A_1'B_1'$  - допоміжні проекції шуканих точок, їх основні проекції визначають косокутним проекціюванням у зворотному напрямі.

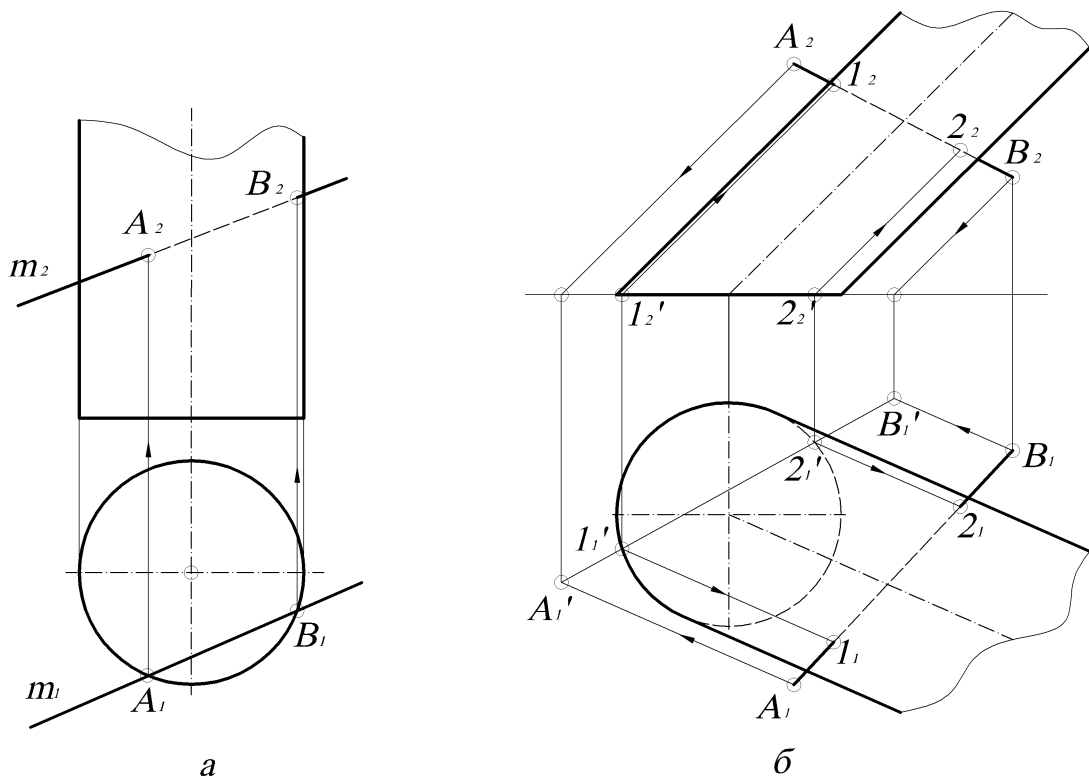


Рис.7

Точки перетину прямої з конічною поверхнею можна побудувати так само, але треба мати на увазі, що для побудови виродженої проекції конуса всі його твірні мають стати проекціювальними, а паралельним проекціюванням цього зробити не можна. При розв'язанні цієї задачі застосовують центральне допоміжне

проекціювання, як показано на рис.8. Центр проекціювання обирають у вершині  $S$  конуса, і кожна твірна стає проекціювальною прямою, а допоміжна проекція поверхні конуса збігається з колом його основи. Допоміжні проекції шуканих точок утворюються в результаті перетину кола основи конуса та допоміжної проекції

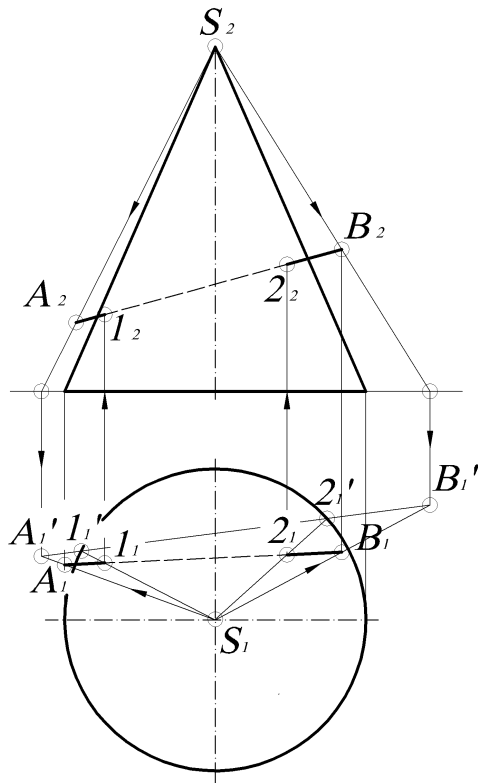


Рис.8

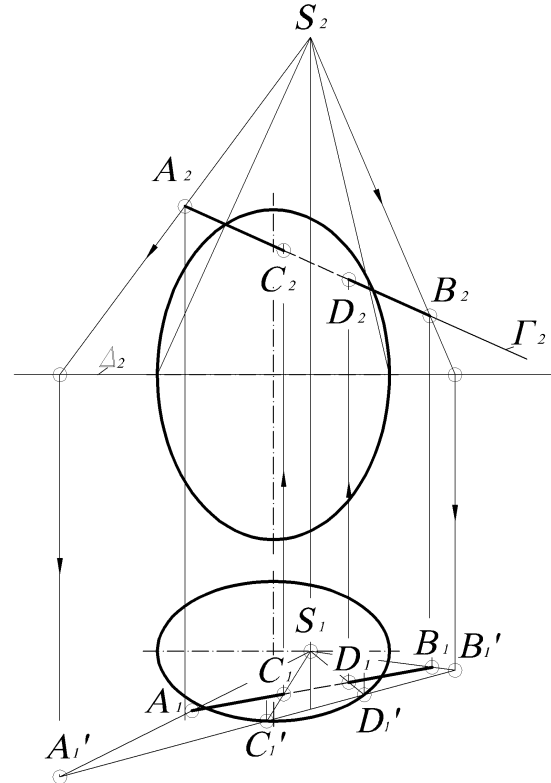


Рис.9

$A_1B_1$  прямої  $AB$ . Основні проекції точок  $1$  і  $2$  визначають зворотнім проекціюванням допоміжних проекцій  $1_1'$  і  $2_1'$  з вершини  $S$  на пряму  $AB$ .

Щоб побудувати точки перетину прямої з довільною поверхнею другого порядку, потрібно знати таку властивість: *через два довільні перерізи поверхні другого порядку можна провести поверхню конуса або циліндра.*

На рис.9 наведено побудову точок перетину тривісного еліпсоїда з прямою  $AB$  за допомогою центрального допоміжного проекціювання. Через пряму  $AB$  проводять фронтально проекціювальну площину  $\Gamma$ , яка перетинає поверхню по еліпсу. Без побудови цього еліпса визначають вершину конуса, твірні якого проходять через точки двох перерізів еліпсоїда площинами  $\Gamma$  і  $\Delta$ . Точки  $C$  і  $D$  перетину прямої  $AB$  з поверхнею конуса визначають так само, як у попередньому прикладі (див. рис.8). Переріз конуса площиною  $\Gamma$  є також перерізом еліпсоїда, тому знайдені точки  $C$  і  $D$  є шуканими.

## **Побудова лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проєкціювальна**

Найпростішим випадком взаємного перетину двох багатогранних або кривих поверхонь є такий, коли одна з поверхонь займає проєкціювальне положення. Проєкціювальними можуть бути призматична або циліндрична поверхні, грані або твірні яких перпендикулярні до площин проєкцій. Згідно з властивостями проєкціювальних фігур одна проєкція лінії перетину двох поверхонь збігається з виродженою проєкцією проєкціювальної поверхні, і задача зводиться до побудови другої проєкції лінії перетину за принципом її належності геометричній фігурі.

На рис.10 показано перетин двох трикутних призм, коли одна з них знаходиться в особливому положенні – її грані є горизонтально проєкціювальними площинами. Лінія взаємного перетину складається з двох замкнених ламаних – трикутника та просторового багатокутника. Фронтальні проєкції точок  $1, 2, 3, 4, 6$  і  $8$ , які належать ребрам  $l, m$  і  $n$ , знаходять за вертикальною відповідністю на фронтальних проєкціях цих ребер. Для побудови точок  $5$  і  $7$ , які належать ребру  $c$  призми  $abc$ , у гранях  $lm$  і  $ln$  проводять прямі  $6M$  і  $8M$ . Фронтальні проєкції точок  $5$  і  $7$  визначають у результаті перетину прямих  $6M$  і  $8M$  з ребром  $c$ . При сполученні точок ламаної слід брати до уваги належність їх певній грані. Наприклад, можна сполучати точки просторової ламаної: точку  $6$ , яка належить грані  $bc$ , з точками  $5$  і  $8$ , які належать цій самій грані, проте точку  $7$  не можна сполучати з точкою  $6$  через те, що вони належать різним граням призми  $lmn$ . Точка  $4$  сполучається з точками  $5$  і  $7$ , а точка  $8$  – з точкою  $6$ . Видимість точок і відрізків ламаних визначають за видимістю граней. Видима частина ламаної може належати видимим граням обох призм.

На рис.11 показано побудову лінії взаємного перетину горизонтально проєкціювального циліндра обертання з гіперболічним параболоїдом, що заданий напрямними  $AB$  і  $CD$  та площиною паралелізму  $\Gamma$ . Горизонтальна проєкція лінії перетину збігається з виродженою проєкцією циліндра. Тому безпосередньо на горизонтальній проєкції можна визначити точки перетину твірних гіперболічного параболоїда з поверхнею циліндра. Фронтальні проєкції цих точок визначають за вертикальною відповідністю на фронтальних проєкціях твірних параболоїда.

Характерними точками лінії перетину є точки  $G$  і  $H$  на контурних твірних циліндра. Вони відділяють видиму частину лінії перетину від невидимої. Тому для побудови фронтальних проєкцій цих точок через їхні відомі горизонтальні проєкції додатково проводять твірні  $MN$  і  $PQ$  параболоїда. Невидима частина шуканої лінії четвертого порядку належить невидимій частині поверхні циліндра.



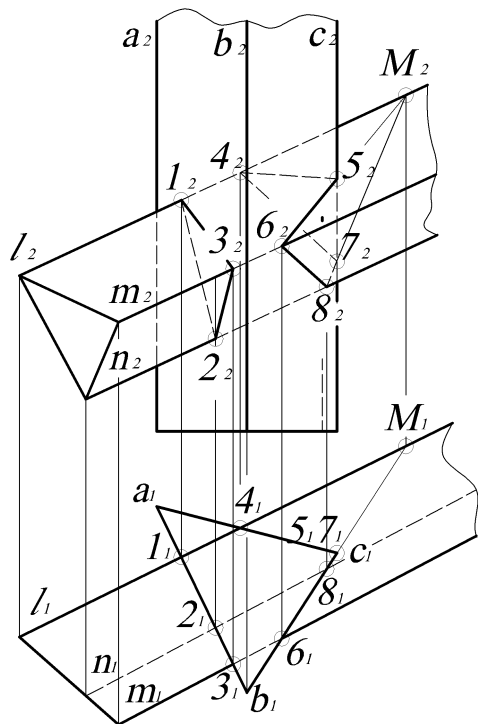


Рис.10

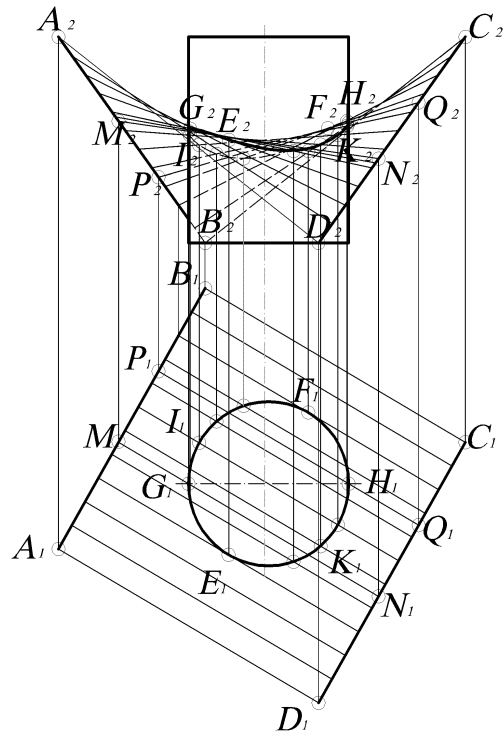
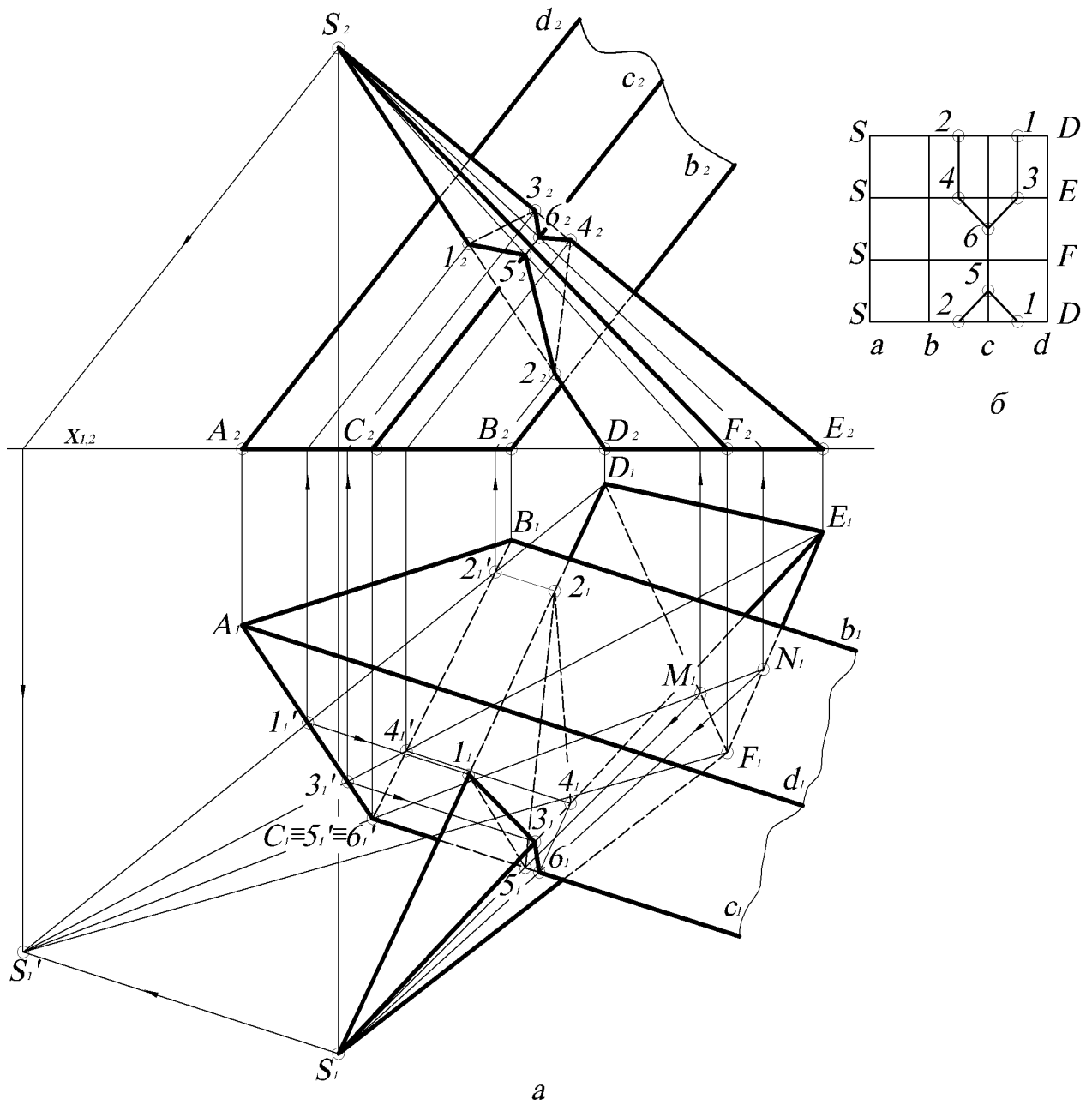


Рис.11

**Побудова ліній взаємного перетину способом допоміжного проєкціювання**

Спосіб допоміжного проєкціювання дає найбільший ефект, якщо поверхнями, що перетинаються, є призми, піраміди, циліндри та конуси загального положення. Суть способу полягає в тому, щоб побудувати допоміжну вироджену проєкцію однієї з поверхонь, що значно спрощує розв'язання задачі, як було показано в попередньому підрозділі. Для побудови виродженої проєкції призматичної або циліндричної поверхні використовують косокутне допоміжне проєкціювання вздовж ребер призми або прямолінійних твірних циліндра. Вироджену проєкцію піраміди або конуса будують за допомогою центрального проєкціювання, центр якого суміщають з вершиною поверхні. Площину для побудови допоміжної проєкції обирають з міркувань простоти побудов. Найчастіше - це площина основи поверхні.

На рис.12, а показано побудову лінії взаємного перетину трикутних призми та піраміди загального положення.



a

Рис.12

Для розв'язування цієї задачі застосовують косокутне допоміжне проєкціювання обох фігур у напрямі ребер призми на горизонтальну площину їхніх основ. За такого проєкціювання призма спроекціюється трикутником своєї основи  $A_1B_1C_1$ , а піраміда – фігурою  $S'_1D_1E_1F_1$ , оскільки косокутні проєкції основ збігаються з їх горизонтальними проєкціями. Із розгляду допоміжних проєкцій призми та піраміди видно, що ламана лінія перетину належить двом граням призми –  $AC$  і  $BC$ . Горизонтальні і фронтальні проєкції точок 1, 2, 3 і 4 отримані зворотнім проєкціюванням їхніх допоміжних проєкцій на відповідні ребра піраміди у напрямі протилежному допоміжному проєкціюванню. Ребро  $c$  перетинає грані  $DFS$  і  $EFS$  у

точках 5 і 6. Для побудови основних проекцій цих точок через них проведено прямі  $SM$  і  $SN$ , що належать граням піраміди.

Певні труднощі викликає процес сполучення знайдених точок на основних проекціях. Запобігти цим труднощам допомагає спеціальний граф (схема сполучення), наведений на рис.12,б. Ребра призми та піраміди подають у вигляді сітки в порядку їх обходу навколо основ багатогранників. Проміжки між лініями сітки відповідають бічним граням фігур. На лінії сітки наносять знайдені точки перетину. Наприклад, точку 2, яку дістали в результаті перетину ребра  $SD$  піраміди з гранню  $bc$  призми, наносять на лінію  $SD$  у проміжку  $bc$ . Точки, нанесені на сітку, сполучають попарно тільки в межах кожної ділянки сітки. Отримана ламана визначає послідовність сполучення точок лінії перетину багатогранників. Видимі елементи лінії перетину належать видимим граням фігур.

На рис.13 показано взаємний перетин двох похилих конусів другого порядку. Для побудови лінії їх взаємного перетину застосовують спосіб центрального проєкціювання з вершини конусів на площину їхніх основ. Спочатку обидва конуси проєкціюють з вершини  $T$ . Вищий конус проєкціюється своєю основою, а нижчий – множиною твірних, обмежених дотичними із точки  $S'_1$  до основи нижчого конуса. Допоміжна проєкція лінії взаємного перетину збігається з частиною кола, яке є основою вищого конуса. Щоб побудувати точки перетину довільної твірної конуса  $S$  з поверхнею конуса  $T$  слід провести допоміжну проєкцію цієї твірної до перетину з колом основи конуса  $T$ . Отримані точки проєкціюють з центра  $T$  у зворотному напрямі на відповідні твірні конуса  $S$ . Наприклад, для визначення точок 5 і 6 перетину твірної  $AS$  з конусом  $T$  будують центральну проєкцію  $A_1S'_1$  твірної  $AS$ , знаходять центральні проєкції  $5'_1$  і  $6'_1$ , які повертають на основні проєкції твірної  $AS$  проєкціюванням з центра  $T$ . Якщо обидві поверхні спроекціювати з центра  $S$ , то проєкція конуса  $S$  буде виродженою і злілється з його основою, а центральною проєкцією конуса  $T$  буде множина прямих, що перетинаються в точці  $T'_1$ . Використовуючи центральну допоміжну проєкцію з вершини  $S$ , можна визначити точки перетину будь-яких твірних конуса  $T$  з поверхнею конуса  $S$ . Отримавши достатню кількість точок, можна провести плавну криву лінію перетину двох конусів. Вона матиме четвертий порядок.

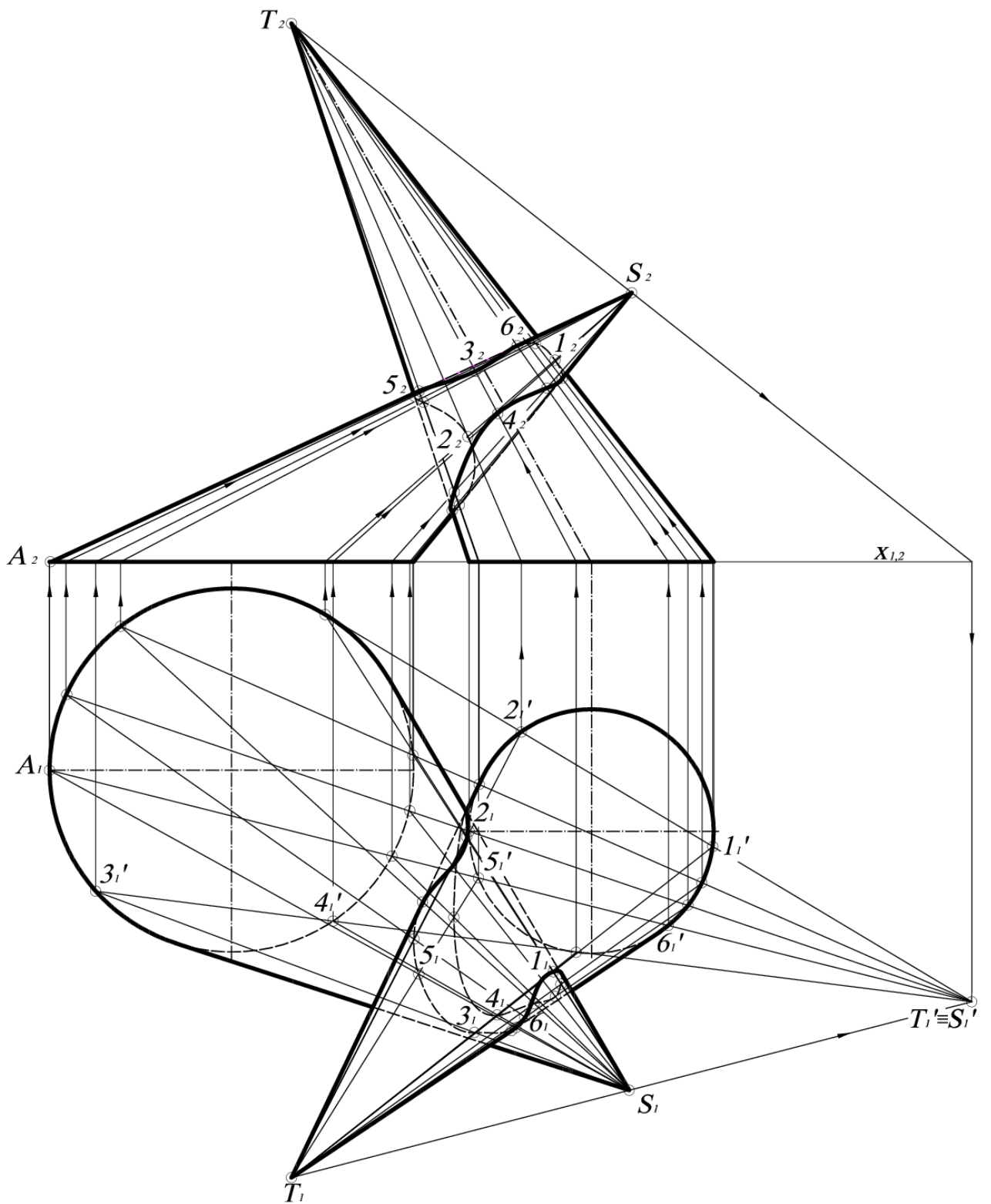


Рис.13

На рис.14 побудовано лінію перетину конуса обертання з гіперболічним параболоїдом. Напрямними параболоїда є профільні прямі  $a$  і  $b$ , а площина паралелізму  $\Gamma$  – фронтальна. Задачу розв'язують способом центрального допоміжного проєкціювання обох поверхонь з центра  $S$  (вершини конуса) на горизонтальну площину проєкцій. Центральною проєкцією конуса є коло його

основи. Для побудови центральної проекції лінійчатого каркаса гіперболічного параболоїда спочатку знаходять допоміжні проекції точок його напрямних. Прямі лінії, які відповідно сполучають проекції цих точок, є центральними проекціями ліній каркаса поверхні. Точки перетину допоміжних проекцій твірних конуса та ліній каркаса параболоїда повертають на основі проекції ліній каркаса зворотним проєкціонуванням із центра  $S$ .

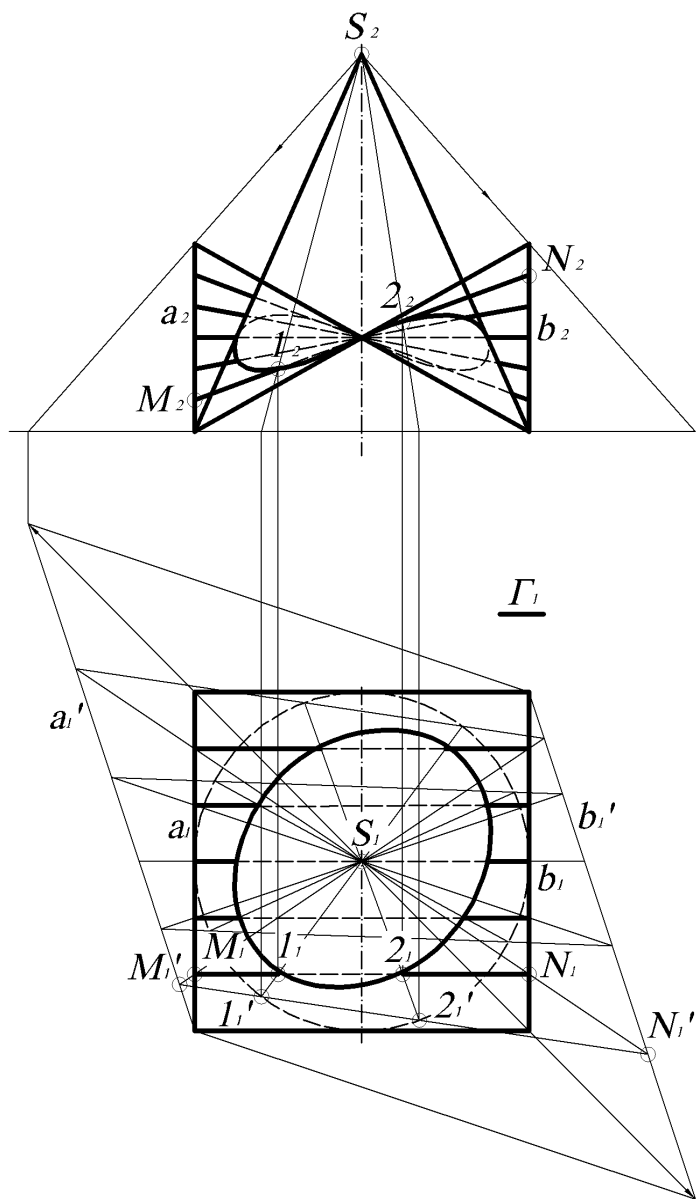


Рис.14

Наприклад, центральна проекція  $M_1'N_1'$  лінії  $MN$  каркаса гіперболічного параболоїда перетинає коло основи конуса в точках  $1_1'$  і  $2_1'$ , які є центральними проекціями точок  $1$  і  $2$  шуканої лінії перетину, яка також має четвертий алгебраїчний порядок.

### Спосіб допоміжних перерізів

Для визначення лінії взаємного перетину двох поверхонь способом допоміжних перерізів їх перетинають третьою поверхнею  $\Omega$  – посередником (рис.15).

Лінії  $m$  і  $n$  допоміжної поверхні, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії перетину. Виконуючи таку операцію декілька разів, можна отримати потрібну кількість точок для проведення кривої взаємного перетину. Допоміжні січні поверхні слід обирати так, щоб лінії  $m$  і  $n$  були прямими або колами і не потребували додаткових побудов. Найчастіше за січні поверхні беруть площини та сфери. В цих випадках спосіб допоміжних перерізів називають способами *допоміжних січних площин*, або *допоміжних січних сфер*.

На рис.16 показано визначення лінії взаємного перетину прямого гелікоїда (гвинтового коноїда) і конуса обертання. Основа конуса та горизонтальна проекція гелікоїда збігаються. Щоб визначити точки, які належать лінії взаємного перетину двох поверхонь, доцільно скористатися множиною горизонтальних площин, кожна з яких перетинає конус по колу певного радіуса, а гелікоїд – по прямолінійній твірній.

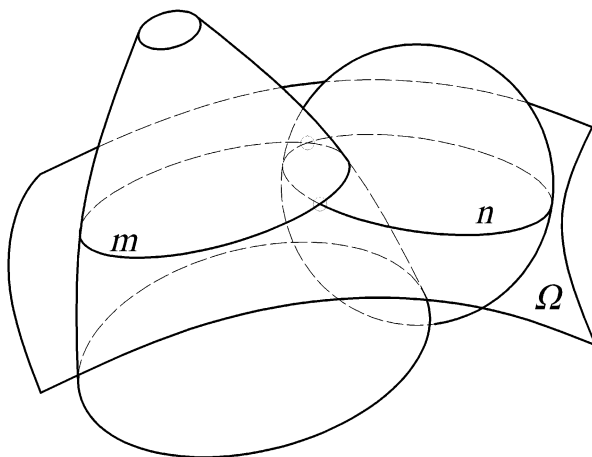


Рис.15

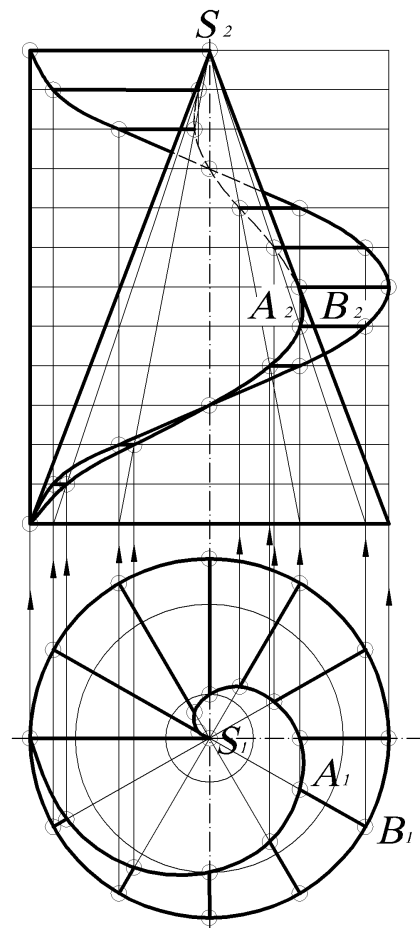


Рис.16

Коло та пряма, які належать одній січній площині, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії. Результатом перетину двох поверхонь є конічна гвинтова лінія. На рис.17 перетинаються дві поверхні: половина тора та сфера. Центр сфери належить площині вищої паралелі тора. Для визначення точок лінії взаємного перетину використовують множину горизонтальних січних площин, кожна з яких перерізає сферу по колу, а тор – по двох колах, за винятком вищої і нижчої площин, кожна з яких дотикається до тора по одному колу.

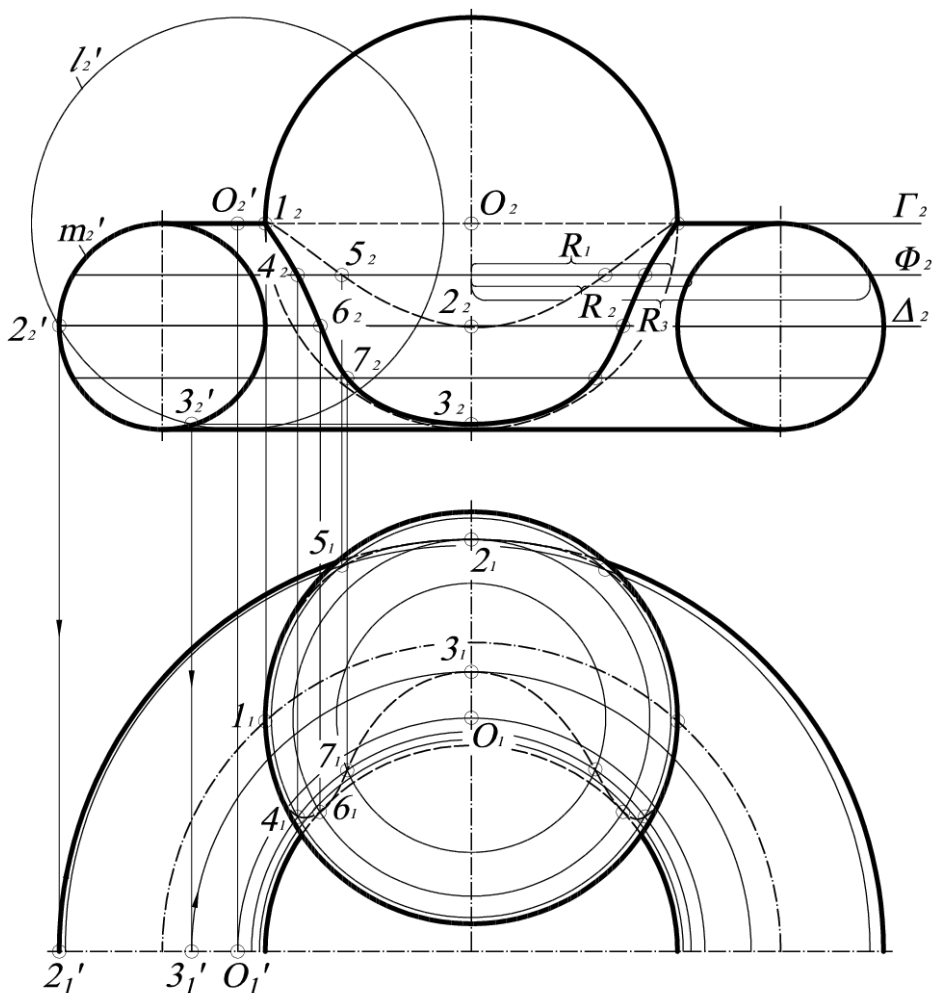


Рис.17

Наприклад, горизонтальна площина  $\Gamma$  дотикається до тора по вищому колу, а сферу перерізає по екватору. В результаті перетину цих двох кривих визначають горизонтальну проекцію точки  $1$ , фронтальну проекцію якої будують за вертикальною відповідністю в площині  $\Gamma$ . Горизонтальна січна площина  $\Phi$  перерізає сферу по колу радіуса  $R_1$ , а тор – по колах радіусів  $R_2$  і  $R_3$ . Перетин цих кіл дає горизонтальні проекції точок  $4$ , і  $5$ , які належать лінії взаємного перетину поверхонь. Характерні точки  $2$  і  $3$  визначають за допомогою профільної січної площини, що проведена через центр сфери. Коло, по яких ця площина перерізає

сферу і тор, збігаються з проекціями січної площини, і точки 2 та 3 перетину цих кіл безпосередньо на проекціях визначити не можна. Тому площину повертають у фронтальне положення навколо вертикальної осі тора. Коло, по якому ця площина перерізає сферу, матиме вигляд  $l'_2$ , а коло перетину цієї площини з тором зобразиться колом  $m'_2$ . У цьому положенні визначають точки  $2'_2$  і  $3'_2$ , які повертають у вихідне положення 2 і 3.

Спосіб січних сфер поділяють на прийоми концентричних сфер, коли всі сфери мають спільний центр, і ексцентричних січних сфер, коли їх центри різні.

Концентричні січні сфери застосовують в особливому випадку, коли осі двох поверхонь обертання перетинаються і паралельні одній з площин проекцій. Цей прийом ґрунтується на тому, що поверхня обертання, вісь якої проходить через центр сфери, перетинається зі сферою по колах. Якщо вісь поверхні обертання розміщена паралельно одній з площин проекцій, то ці кола зображуються прямими лініями.

на рис.18 показано побудову лінії перетину циліндра обертання з частиною тора.

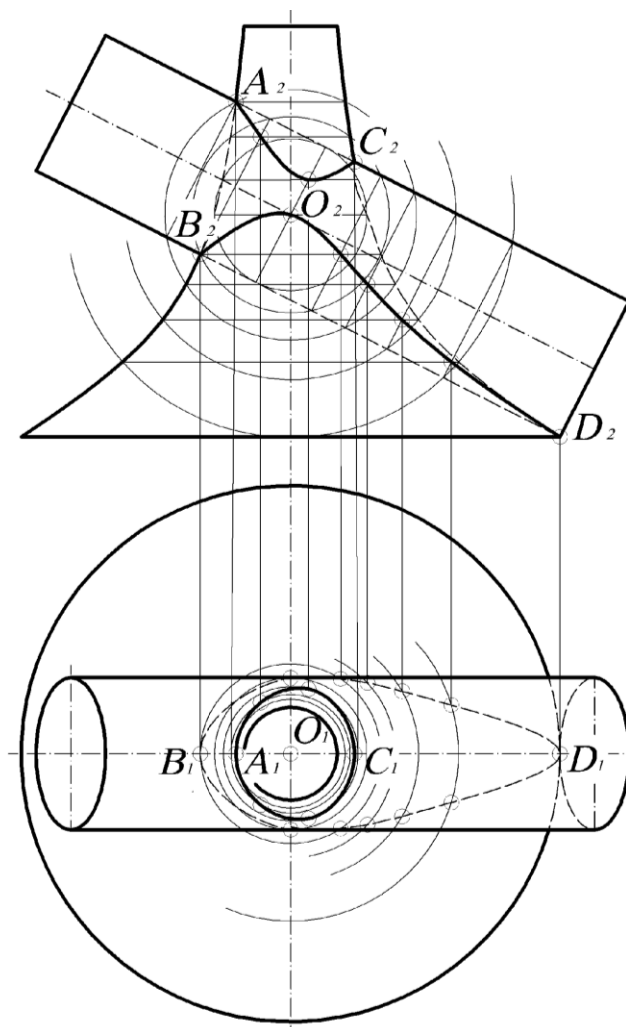


Рис.18



Осі обох поверхонь паралельні фронтальній площині проєкцій і перетинаються в точці  $O$ . Чотири точки –  $A, B, C$  і  $D$  – знаходять безпосередньо в результаті перетину контурних твірних поверхонь. Для визначення проєкцій будь-яких проміжних точок проводять допоміжну сферу з центром у точці  $O$  перетину осей. Сфера перетинається з поверхнями по колах. Точки взаємного перетину кіл належать шуканій лінії. Для визначення горизонтальних проєкцій точок лінії перетину спочатку будують горизонтальні проєкції кіл, по яких сфера перетинає тор, а потім за вертикальною відповідністю визначають проєкції точок.

На рис.19 наведено приклад застосування прийому січних ексцентричних сфер. Перетинаються тор та однопорожнинний гіперboloїд обертання. Колова вісь тора перетинається з віссю обертання гіперboloїда, обидві осі належать одній горизонтальній площині. Через прямолинійну вісь тора у зоні орієнтованого перетину поверхонь проведено січну площину  $\Gamma$ , яка перерізає тор по колу з центром  $T$ . На осі гіперboloїда визначають положення центра  $S_1$  січної сфери, що перерізає тор по колу з центром  $T$ . Ця сфера перерізає гіперboloїд по двох

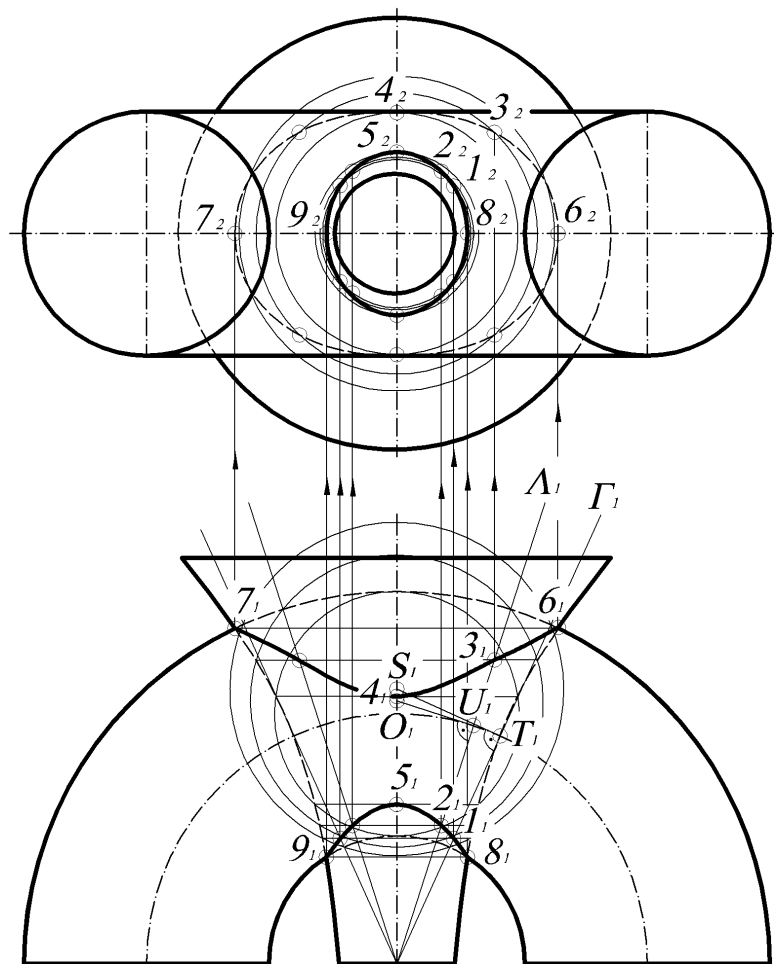


Рис.19

фронтальних колах. Менше коло перетинається з перерізом тора в точці  $1$ . Ще одна січна площина  $\Lambda$  перерізає тор по колу з центром  $U$ , через якій проводять перпендикуляр до перетину віссю гіперболоїда в точці  $O$ . Ця точка є центром другої січної сфери, за допомогою якої визначають точки  $2$  і  $3$ . Точки  $6, 7, 8$  і  $9$  лінії перетину визначають безпосередньо як точки перетину горизонтальних контурів поверхонь. Шукана лінія перетину має дві замкнені частини, симетричні відносно профільної площини, що проходить через вісь гіперболоїда.

### Особливі випадки взаємного перетину поверхонь другого порядку

При перетині двох алгебраїчних поверхонь лінія перетину має порядок, який дорівнює добутку порядків поверхонь, які перетинаються. Тому дві поверхні другого порядку в загальному випадку перетинаються по просторовій кривій четвертого порядку. Просторові криві четвертого порядку можуть набирати різної форми. Види перетину поверхонь другого порядку систематизують за виглядом лінії перетину.

1. Якщо лінія перетину має одну замкнену гілку без особливих точок, то перетин поверхонь називають частковим урізуванням (див.рис.13)

2. Повне проникнення – це випадок перетину, коли просторова крива має дві замкнені гілки (рис.20).

3. Однобічне внутрішнє стикання відбувається, коли поверхні, що перетинаються мають в одній точці (точка  $M$  на рис.9.21) спільну дотичну площину. Крива лінія перетинає сама себе у точці дотику.

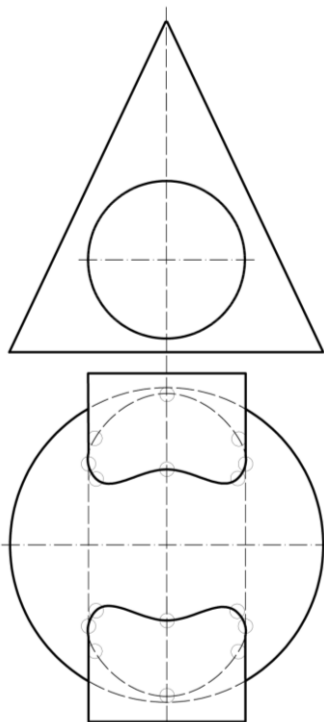


Рис.20

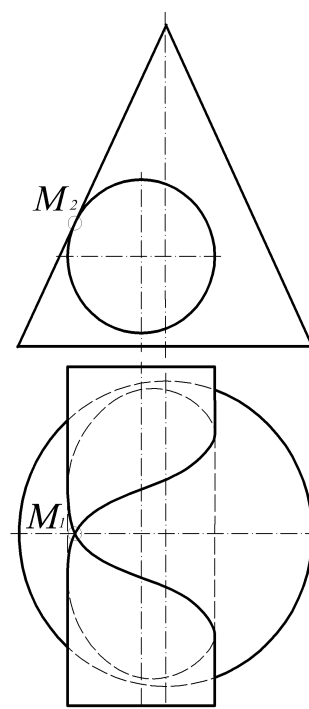


Рис.21

4. Подвійне стикання – це особливий випадок перетину поверхонь, які мають дві спільні дотичні площини. У цьому разі просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, які перетинаються в точках дотику  $M$  і  $N$  (рис.22).

Загальний випадок, коли просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, визначає теорема Монжа: *якщо дві поверхні другого порядку можна вписати в третю поверхню другого порядку або описати навколо неї, то перші дві перетинаються по двох плоских кривих другого порядку.*

На рис.22 показано сферу, яка вписана у два циліндри обертання. Сфера дотикається до вертикального циліндра по колу, розташованому в горизонтальній площині, яке проходить через точки  $M$  і  $N$ . Площина кола, по якому сфера дотикається до горизонтального циліндра, є вертикальною і також проходить через точки  $M$  і  $N$ .

На рис.23 показано лінію взаємного перетину конуса та циліндра обертання, які огинають спільну сферу. Ця умова відповідає теоремі Монжа про розпад лінії перетину поверхонь другого порядку. Отже, лінія перетину цих поверхонь розпадається на дві плоскі криві другого порядку (еліпси), розміщені у фронтально проєкціювальних площинах  $\Sigma$  і  $\Theta$ . Горизонтальні проєкції вершин еліпсів визначають за вертикальною відповідністю. Еліпси можна побудувати відомими способами за двома осями.

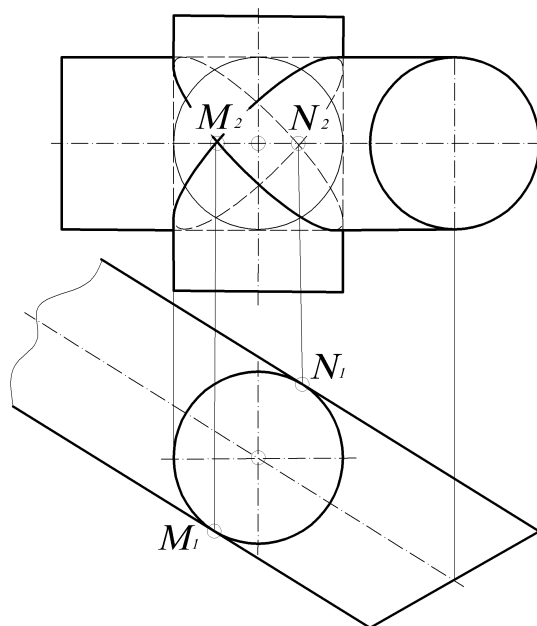


Рис.22

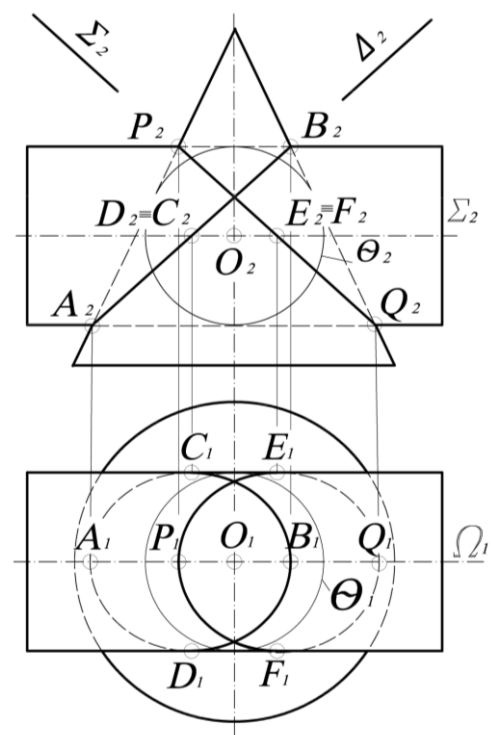


Рис.23