

Лекція 12

ПРОЕКЦІЇ З ЧИСЛОВИМИ ПОЗНАЧКАМИ

В процесі проектування в будівництві вирішується питання розташування споруди на конкретній місцевості, для чого необхідна інформація про її рельєф. Незакономірна форма поверхні землі не дає можливості її зображення в звичайних ортогональних проекціях на взаємно перпендикулярних площинах, а також в аксонометрії та в перспективі. Основним зображенням є горизонтальна проекція (план місцевості), на якій показують окремі точки, розташовані на певній висоті, та лінії, що з'єднують точки з однаковою висотою. Висоти показують у вигляді чисел (позначок), тому метод зображення отримав назву – **проекції з числовими позначками**. Додатковими зображеннями, як правило, є розрізи. Для отримання розрізів використовують вертикальні площини, які разом із отриманими зображеннями на них суміщають із основною горизонтальною площиною.

Положення точок у просторі визначають відносно горизонтальної площини Π_1 , яку будемо називати **площиною нульового рівня**, або **нульовою Π_0** (рис.1, а). За одиницю довжини зазвичай приймають один метр і показують у вигляді лінійного масштабу. Точка може знаходитись над площиною або під нею. Відстані від точок до нульової площини є їх висотними позначками.

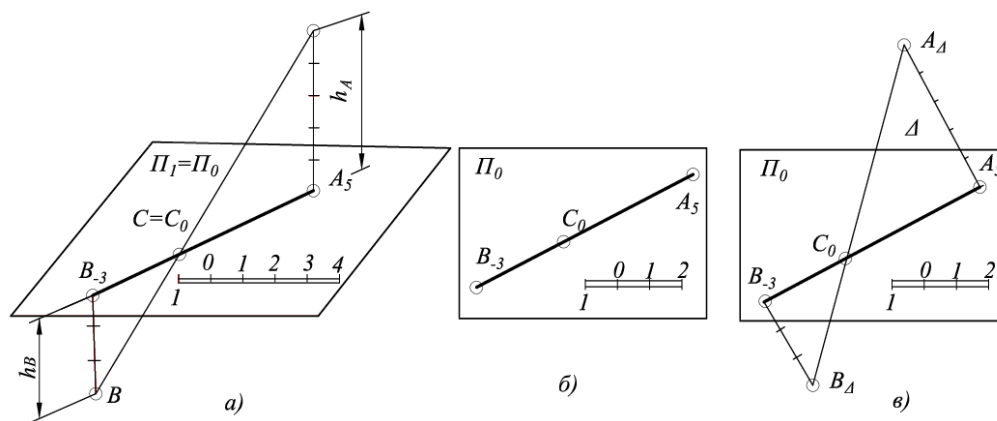


Рис.1

Із рисунка видно, що точки A і B мають висотні позначки відповідно 5 м і мінус 3 м, що і зазначають на зображеннях прямокутних проекцій точок у вигляді A_5 і $B_{.3}$ (рис.1, б). На рис.1, в показано також проекції точок A , B , C на додаткову вертикальну площину Δ , проведену через пряму AB та суміщену із Π_0 .

Раніше аналогічну побудову у вигляді заміни площин проєкцій використовували при розв'язанні метричних та позиційних задач.

За необхідністю положення площини Π_0 можна обирати так, щоби всі точки об'єкта мали додатні значення позначок.

Проекції прямої

На рис.2, а показано відрізок AB , його проєкції на Π_0 (A_6B_3) та на додаткову вертикальну площину Δ , паралельну AB . Комплексне зображення прямої AB на площинах Π_0 та Δ дано на рис.2, б. Для скорочення побудов площину Δ поводять безпосередньо через пряму AB (рис.2, в, 1, в).

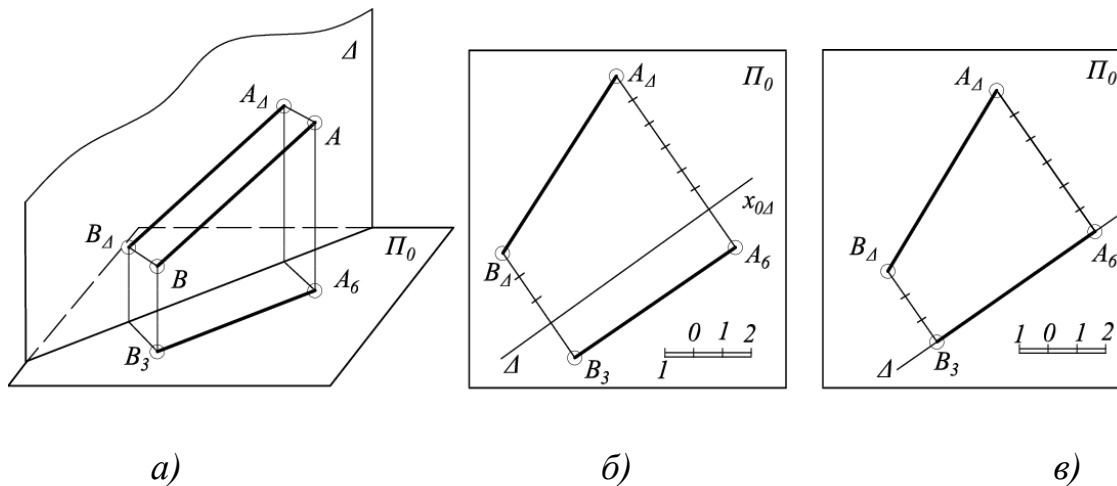


Рис.2

Розглянемо деякі характеристики прямої лінії (рис.3). Довжину горизонтальної проєкції відрізка, що задає пряму, називають **закладенням** (L). Величина i (**уклон**) визначається відношенням різниці позначок кінцевих точок відрізка до закладення: $i = (h_A - h_B) : L = \text{tg} \alpha$, где α – кут нахилу прямої до горизонтальної площини.

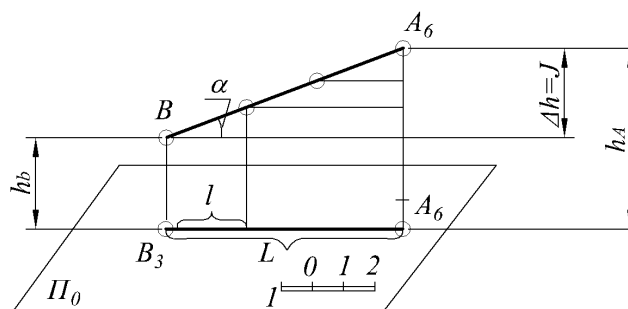


Рис.3

J – підйом відрізка дорівнює різниці позначок кінців відрізка $h_A - h_B$.

l – інтервал прямої – величина закладення на підйомі, що дорівнює одиниці, тобто $l = L : J$. Оскільки $J = \Delta h$, то уклон $i = J : L = 1 : l$, звідки виходить, що інтервал і уклон – величини взаємно обернені.

На рис.4, а, б показано у порівнянні два відрізки AB і CD проєкціями з числовими позначками A_1B_2 і C_2D_1 . Додаткові зображення відрізків на вертикальних площинах Δ , паралельних відрізкам, показують наочно їх підйом (AB) і падіння (CD) на дві одиниці.

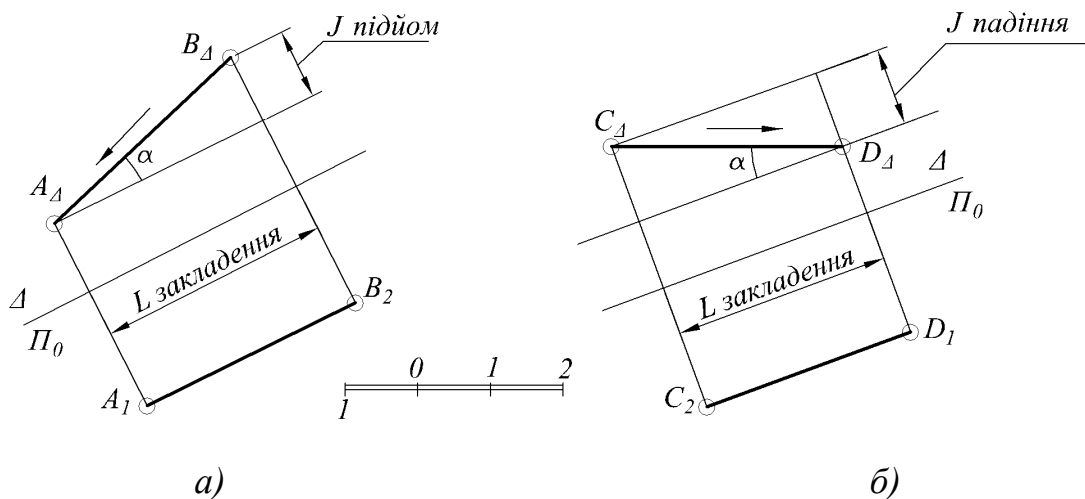


Рис.4

Розглянуті властивості прямої лінії дозволяють визначати характеристики прямої безпосередньо на проєкціях із числовими позначками. Для відрізка C_7D_9 (рис.5, а) закладення L , як показує лінійний масштаб, дорівнює 5, а уклон $i = J : L = (9 - 7) : 5 = 2 : 5 = 1 : 2,5$. Якщо відома величина i , пряму можна задати так, як це показано на рис.5, б, або, визначивши кут α , - як на рис.5, в, що також дозволяє підрахувати інші характеристики прямої. На рис.5, г зображено горизонтальну пряму, а на рис.5, д – вертикальну пряму.

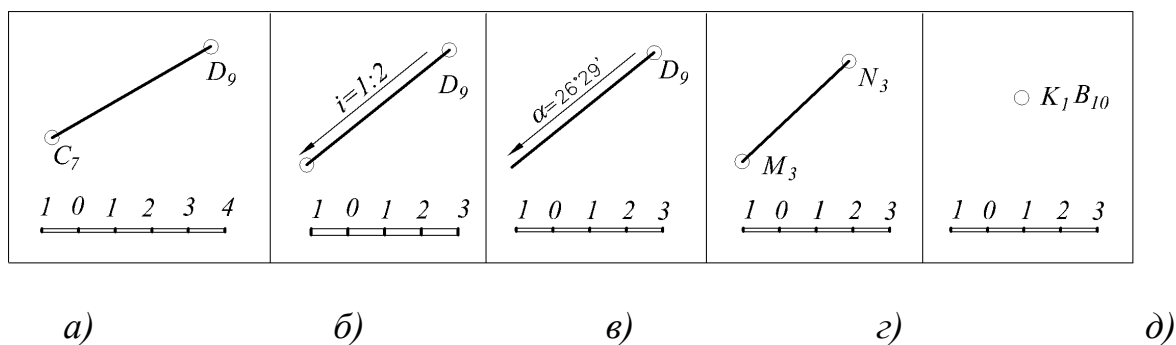


Рис.5

Коли пряма задана двома точками, висотні позначки яких виражені не цілими числами – $A_{5,3}$ $B_{2,4}$ (рис.6, а), виникає необхідність у визначенні на цій прямій точок із цілими числами. В такому разі виконують операцію «градуювання» прямої (або її інтерполяцію). Для цього достатньо побудувати проекцію прямої $A_{5,3}B_{2,4}$ на додаткову вертикальну площину (Δ проходить через AB), де відповідно до лінійного масштабу нанесено ряд необхідних горизонталей (2,3,4,5,6) з інтервалом в одну одиницю висоти. У проекційному зв'язку на відповідному рівні показують зображення точок, отримують зображення відрізка, а на його перетині з лініями рівня визначають положення точок із цілими значеннями висот C, D, M , а потім їх зображення на плані - C_5, D_4, M_3 .

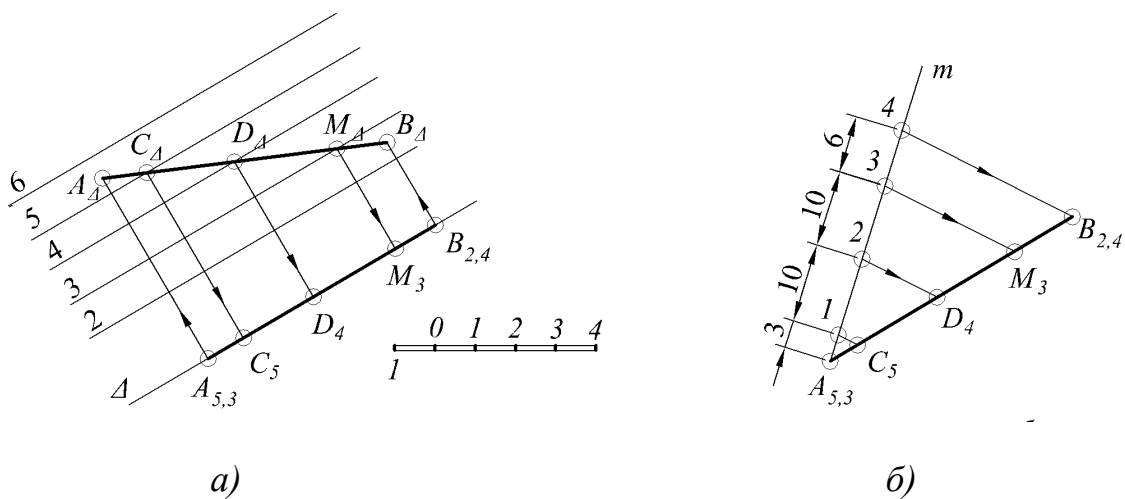


Рис.6

Те ж градування може бути виконано з використанням пропорційного поділу відрізка, прийнятого за сторону довільного кута, на другій стороні якого – m показують точки, відстані між якими мають співвідношення : $A_{5,3} - 1 : 1 - 2 : 2 - 3 : 3 - 4 = 0,3 : 1 : 1 : 0,6 = 3 : 10 : 10 : 6$. На прямій $A_{5,3} - B_{2,4}$ отримаємо точки C_5, D_4, M_3 .

Проекції двох прямих

При всій повноті інформації в проекціях з числовими позначками для наочності зображення його доповнюють ще одним, як це було показано на попередніх кресленнях. Так, на рис.7 показано проекції паралельних відрізків $A_{1,5}B_5$ і C_4D_9 . Їх зображення на вертикальній площині Δ також паралельні. Це означає, що і у просторі AB і CD - паралельні. Проекції C_4D_9 і P_8S_3 перетинаються в точці T , висоту якої можна підрахувати, але в даному прикладі побудовано додаткові проекції відрізків $C_\Delta D_\Delta$ і $P_\Delta S_\Delta$ та точку їх перетину T_Δ , яка відповідна точці T . Це означає, що прямі CD і PS перетинаються. У перетині проекцій $A_{1,5}B_5$ і $P_8 S_3$ знаходиться зображення двох точок – R на AB та Q на

PS . Висновок – AB та PS – мимобіжні прямі. Читачеві пропонується самостійно визначити взаємне розташування прямих $N_1L_{2,3}$ та P_8S_3 .

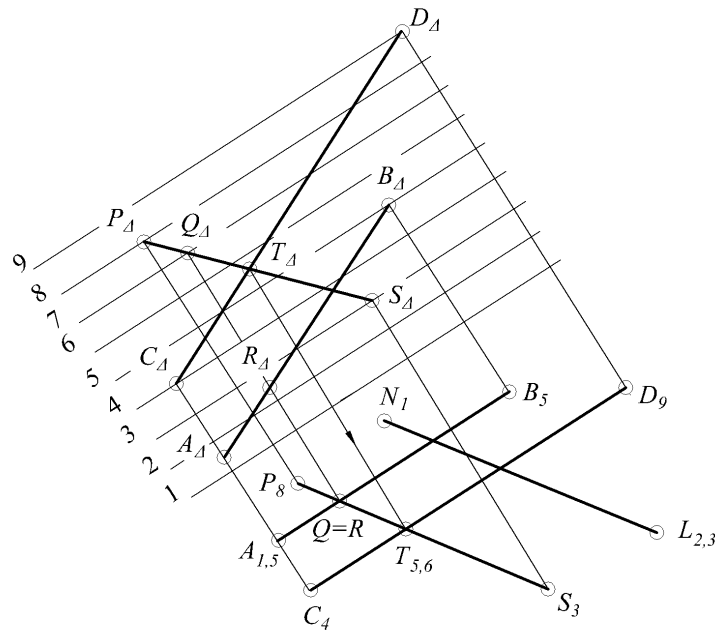


Рис.7

Проекції площини

Завдання площини трьома точками, точкою і прямою, двома прямими, тощо не є зручним в проекціях із числовими позначками, оскільки визначення головних характеристик площини потребує додаткових побудов. Тому завдання площини також має свою специфіку. На рис.8 показано площину P загального положення. h_0 - її горизонтальний слід. В цій площині через точку A проведено пряму p перпендикулярно h_0 . Як відомо, це лінія найбільшого нахилу площини P . Кут падіння лінії $p - \alpha$. Горизонтальні прямі $I (h_1)$, $II (h_2)$ утворені на площині P в результаті перетину P з горизонтальними площинами, проведеними з рівним по висоті інтервалом, що дорівнює одиниці (січні площини на рисунку не показано). Проекції горизонталей I і II на Π_0 показано штриховими лініями (також з рівним інтервалом), що проходять через точки 1 і 2 на проекції p_i прямої p . Кут α , утворений лінією p та її проекцією p_i , є кутом найбільшого нахилу площини P (або кутом падіння площини). Лінія p може бути проведена в будь-якому місці площини (наприклад, через точку B). Вона приймається за масштаб уклону і позначається подвійною лінією (товстою і тонкою). На зображені площини в проекціях із числовими позначками показують проекцію лінії p – пряму p_i із нанесеними перпендикулярно до неї проекціями горизонталей I і II – прямими, що проходять через точки 1 і 2 з рівним

інтервалом, як це показано на рис.9, *а*. Скорочене зображення цієї ж площини представлено на рис.9, *б*, де показана проградуйована лінія найбільшого нахилу p_i площини P , через позначки якої можуть бути накреслені проєкції необхідних горизонталей.

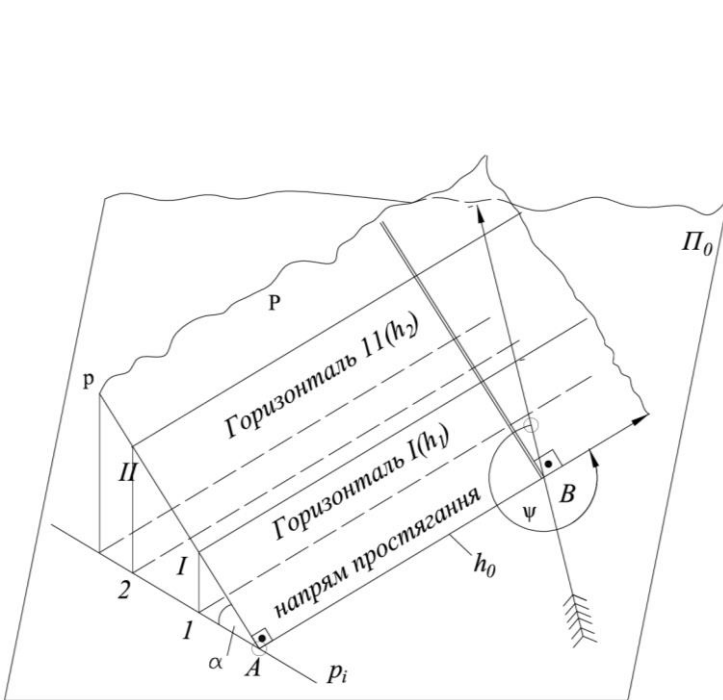


Рис.8

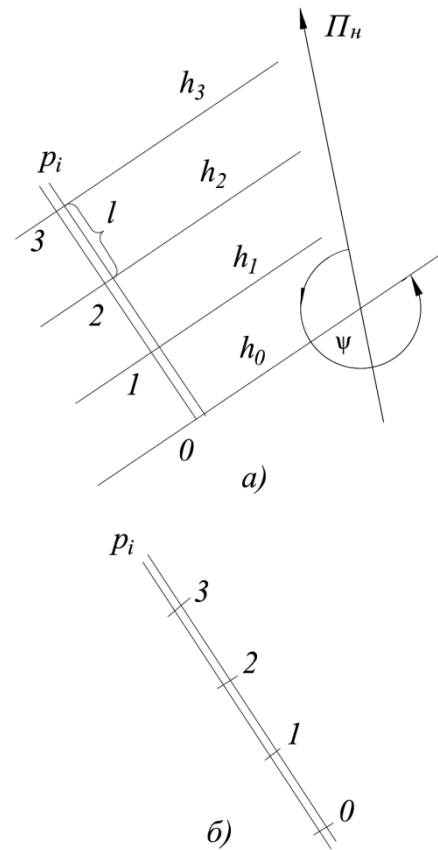


Рис.9

В геодезії, картографії тощо буває необхідним визначення **напрямку** та **кута простягання** площини за сторонами світу. Напряг простягання спрямовується вправо, якщо на площину дивитись в напрямі наростання позначок. На рис.8 і 9, *а* показано кут простягання ψ , який вимірюється в горизонтальній площині між північним напрямом меридіана (північний кінець магнітної стрілки) та напрямом простягання (проєкції горизонталей) проти ходу годинникової стрілки.

Проєкції поверхонь

В проєкціях із числовими позначками можна задати також будь-яку поверхню, якщо відомі висотні координати точок поверхні, або лінії, що з'єднують точки з однаковими числовими позначками. На рис.10, *а* показано прямий круговий конус, поверхня якого перетинається горизонтальними площинами, проведеними з рівними інтервалами по висоті. Горизонтальна

проекція конуса може представляти конічну поверхню в системі проєкцій з числовими позначками, якщо круговим горизонталям та вершині надати відповідні номери. Довільна твірна конуса виконує роль градуйованої прямої конічної поверхні. На рис.10, б показано циліндричну поверхню з горизонтальними твірними, розташованими з рівним інтервалом по висоті. Аналогічно представлена горизонтальна проєкція сфери (рис.10, в).

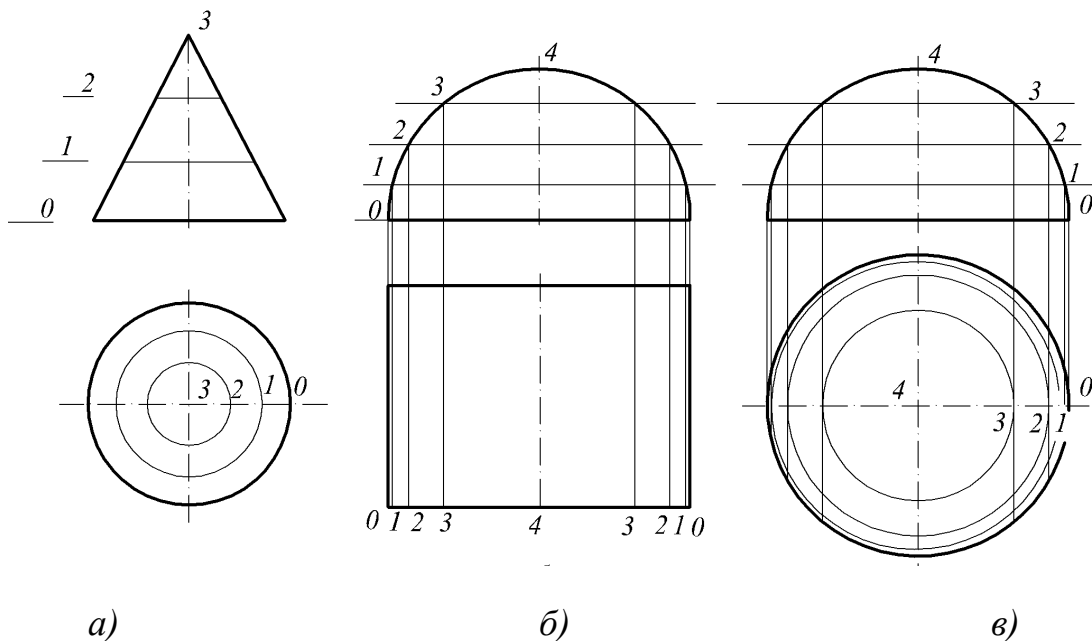


Рис.10

В інженерній практиці, пов'язаній із земляними роботами, часто зустрічається поверхня однакового нахилу (рис.11), утворення якої теоретично пов'язане з рухом прямого кругового конуса, за умови що його вісь залишається вертикальною, а вершина належить напрямній кривій m (плоскій, або просторовій). Кожна горизонталь поверхні однакового нахилу є кривою, дотичною до однойменних горизонталей конусів.

Поверхня землі має незакономірний характер, тому завдання її можливе тільки у вигляді горизонталей – ліній, які проходять через точки з однаковими позначками. На рис.12, а, б представлено два приклади такої поверхні. Номери горизонталей дають повну інформацію про підвищення рельєфу у напрямі центра, або його падіння. В обох прикладах додатково побудовано перерізи вертикальними січними площинами, які додають зображенням наочності.

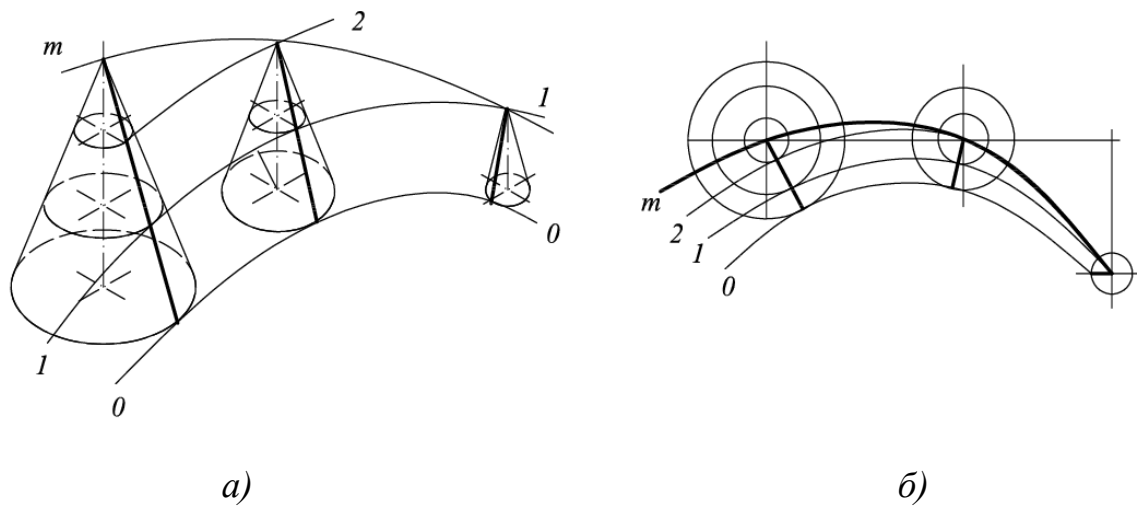


Рис.11

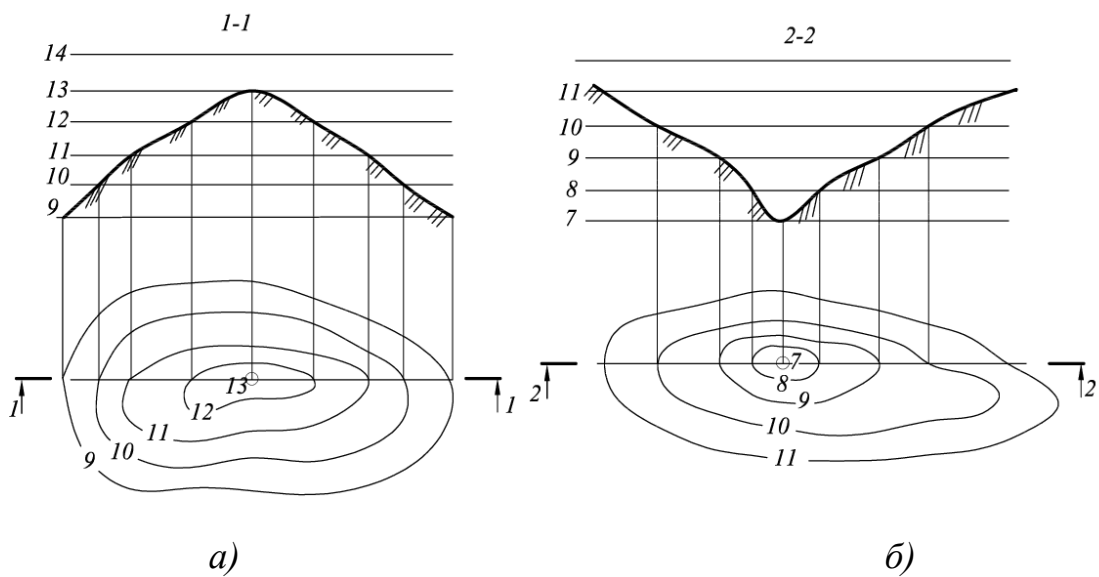


Рис.12

ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ. Перетин двох площин

На рис.13, *a* показано дві площини загального положення Σ і Δ , Лінія перетину яких проходить через точки перетину однойменних горизонталей. Положення горизонталей, що перетинаються, визначено за допомогою допоміжних горизонтальних січних площин Γ і Ω . Горизонталі *a* і *b* перетинаються в точці *M*, *c* і *d* – в точці *N*. Через точки *M* і *N* проходить шукана лінія перетину (пряма). На рис. 13, *б* такий приклад показано в проекціях з числовими позначками, де площини Σ і Δ задано масштабами уклонів. Точки *M*

(перетин горизонталей 25) і N (перетин горизонталей 24) визначають лінію перетину. Зрозуміло, що і точка K (перетин горизонталей 23) має належати лінії перетину (прямій). Якщо масштаб уклонів площин Σ і Δ однаковий (тобто задані площини мають однаковий кут нахилу до горизонтальної площини), то лінія їх перетину буде проєкціюватися бісектрисою кута між однойменними горизонталями.

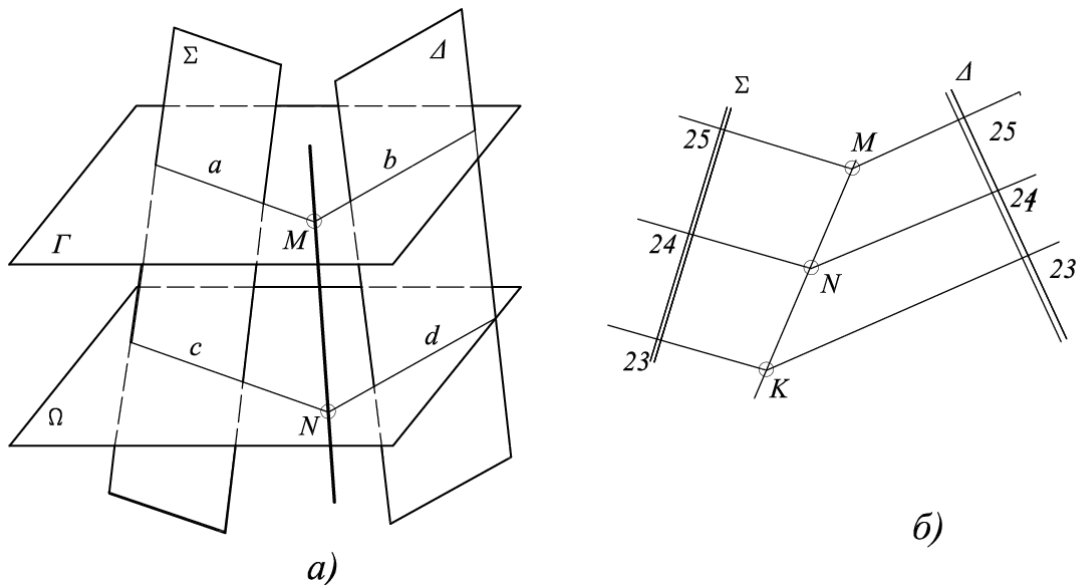


Рис.13

Перетин прямої і площини

Для побудови точки перетину прямої A_2B_5 з площиною Σ (рис.14) використано допоміжну вертикальну січну площину Γ , проведену через AB . Площини Γ і Σ перетинаються по прямій C_2D_6 . Прямі AB і CD перетинаються в точці M , яка є точкою перетину прямої A_2B_5 з площиною Σ .

Перетин поверхні з площиною. Взаємний перетин поверхонь

На рис.15 показано лінію перетину конічної поверхні з площиною Σ . Шукана лінія – крива, яка проходить через точки перетину горизонталей поверхні конуса з однойменними горизонталями площини Σ . На рис. 16 показано топографічну поверхню і площину, лінія перетину яких з'єднує точки перетину однойменних горизонталей. Аналогічно побудовано лінію перетину конічної та топографічної поверхонь (рис. 17).

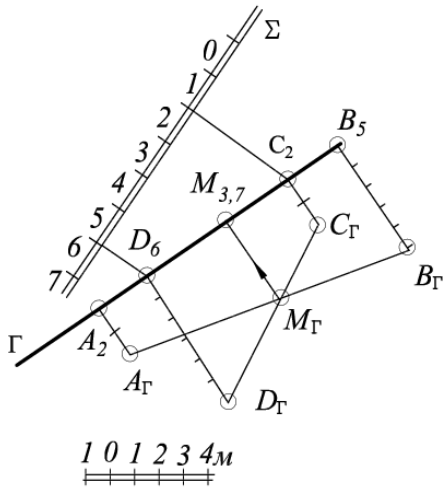


Рис.14

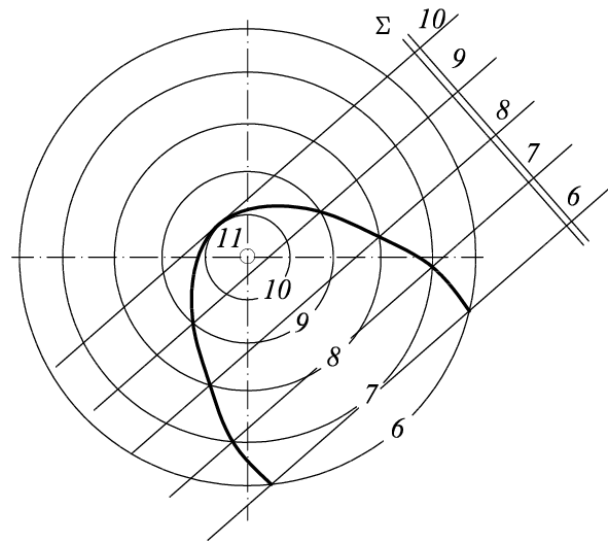


Рис.15

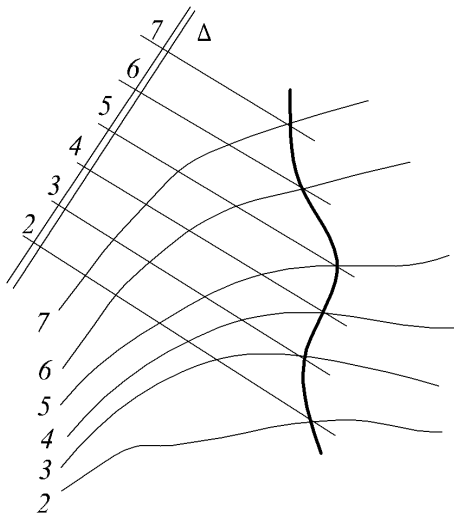


Рис.16

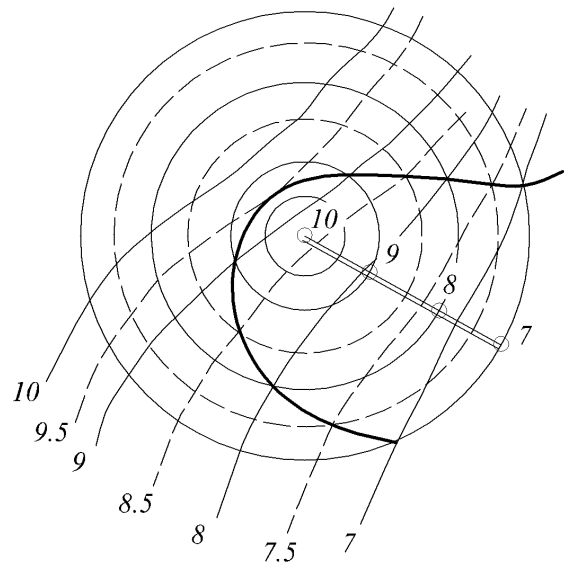


Рис.17

Розглянемо декілька задач практичного змісту.

Приклад 1. Спроектувати горизонтальний майданчик із контуром у вигляді трикутника ABC на висоті $+6$ (див. Рис.18). Місцевість – горизонтальна площина на висоті $+2$. Процес проектування передбачає утворення насипу – в даному разі – зрізаної пірамідальної поверхні, основа якої трикутник MNK на висоті $+2$, та трикутник ABC - на висоті $+6$. Для кожної бічної грані задано кут нахилу. На контурі AB величина $i_1 = 1:1,5$; на контурі BC - $i_2 = 1:0,6$; на контурі AC - $i_3 = 1:1$. Величини укосів у вигляді графіків показано на рис.18, б, де на осях L і J відкладено в масштабі креслення відрізки довжиною 1 м та визначено інтервали l_1 ,

l_2, l_3 кожної площини укосів, які відкладено вздовж перпендикулярів до ліній контуру AB, BC, AC майданчика. Лінії AB, BC, AC є горизонталями укосів на висоті $+6\text{м}$. Через точки, які нанесено з відповідним інтервалом вздовж ліній i_1, i_2, i_3 , перпендикулярно до них проведено горизонталі з позначками 2, 3, 4, 5. Однойменні горизонталі продовжено до взаємного перетину в точках, через які проведено лінії перетину укосів. Останні горизонталі з позначкою $+2$ утворюють трикутник MNK – лінію перетину сконструйованих укосів з горизонтальною поверхнею землі на висоті $+2$.

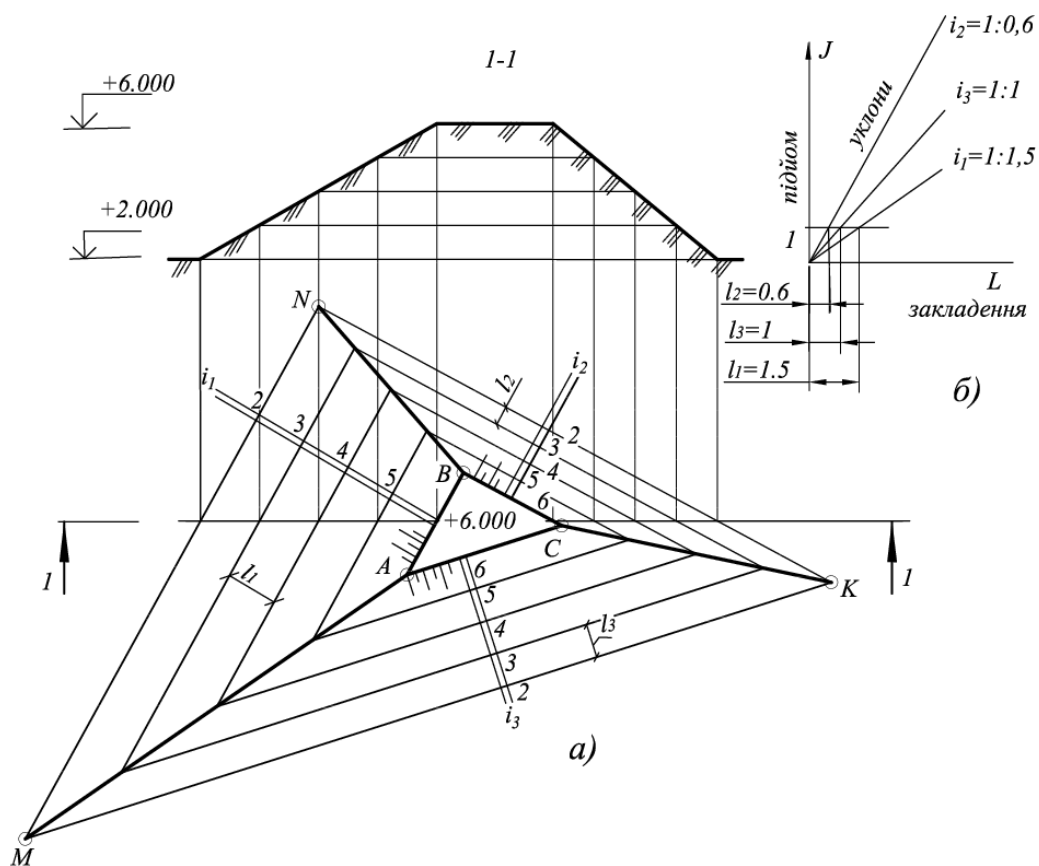


Рис.18

Бергштрихи – символічні лінії найбільшого нахилу, нанесені перпендикулярно до сторін трикутника ABC . Бергштрихи показують напрям нахилу кожного укосу та сприяють наочності зображень в наведених прикладах. Розріз сконструйованого майданчика виконано вертикальною площиною $1-1$.

В розглянутому прикладі площини укосів мають довільні за величиною кути нахилу до горизонтальної площини. В реальних умовах в межах однієї споруди величини кутів залежать від природних властивостей ґрунту. Вони можуть бути меншими, якщо ґрунт «зрізається» (кут виїмки), або більшими, якщо

грунт «насіпається» (кут насипу). Наприклад, в останньому прикладі, де сконструйовано насип, площини укосів в реальних умовах мали б однакові уклони, інтервали, а лінії їх перетину проєкціювались би бісектрисами відповідних кутів між горизонталями.

Приклад 2. На місцевості у вигляді похилої площини, яку задано горизонталями ((паралельні прямі 4 – 14 з однаковим інтервалом), спроектувати горизонтальний майданчик прямокутної форми (чотирикутник $ABCD$) на висоті +6 (рис. 19).

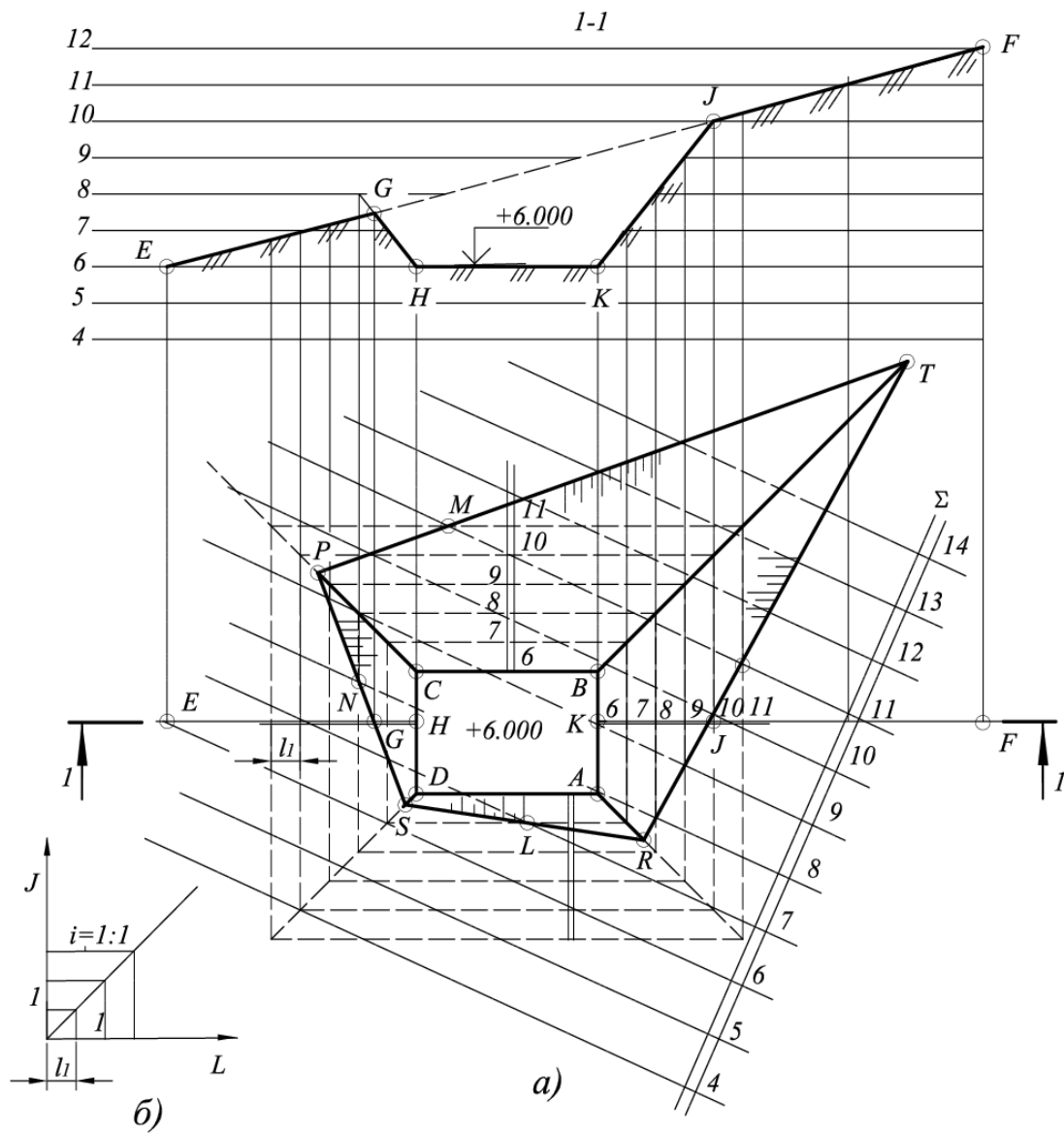


Рис.19

Із умови видно, що рівень майбутнього майданчика нижче горизонталей місцевості. Тому всі укоси мають вигляд виїмки, а величина i буде однаковою, та

дорівнює, наприклад, $1:1$, що показано на графіку (рис. 19 ,б). Лінії перетину укосів проєкціюються бісектрисами кутів з вершинами A, B, C, D . На лініях найбільшого нахилу кожної площини укосу відкладено однакові відрізки l . Через отримані точки паралельно AB, BC, CD і AD проведено проєктні горизонталі 7, 8, 9, У перетині проєктних горизонталей з однойменними горизонталлями місцевості отримано точки, через які проходять лінії перетину укосів з рельєфом місцевості (граничі виїмки котловану). Площина укосу на контурі AB перетинає площину місцевості Σ по лінії, яка з'єднує точки перетину однойменних горизонталей та продовжується до границь укосу (в точках R і T). Оскільки місцевість також є площиною, то перетин із нею площини укосу є пряма RT , що проходить через точки перетину інших однойменних горизонталей). Це означає, що для побудови границі укосу на контурі BC достатньо знайти одну точку M перетину однойменних горизонталей (наприклад, № 11), через яку провести пряму TMP в межах укосу. Аналогічно побудовано границі укосів на контурі CD (PNS) та на контурі AD (SLR). На розрізі $1-1$ показано профіль місцевості (пряма EF) та профіль ($GHKJ$) котловану під майданчик.

Приклад 3. На місцевості, заданій горизонталлями 13 – 20, спроектувати майданчик у вигляді горизонтального прямокутника $ABCD$ на висоті +16 (рис.20).

Із креслення плану майданчика, суміщеного з планом місцевості, видно що на контурі $NABM$ необхідно конструювати укоси виїмки ($i_1 = 1:1$), а на контурі $NDCM$ – укоси насипу ($i_2 = 2:3$). M і N – точки перетину проєктної горизонталі $ABCD$ із позначкою +16. MN – лінія нульових робіт (рис.20, а). Із побудованого графіка уклонів (рис.20,б) визначаємо величини інтервалів l_1 на контурі $NABM$ та l_2 - на $NDCM$. Для зручності побудов зображення ліній найбільшого нахилу площин укосів виїмки та насипу об'єднано показано на границях контурів (точки M і N). Через позначки проводимо відповідні горизонталі між лініями перетину укосів, які проєктуються бісектрисами кутів незалежно від величини інтервалів. На відміну від попереднього прикладу, де лінії перетину площин укосів з рельєфом місцевості (площиною) були прямими, лінії перетину проєктних горизонталей із горизонталлями топографічної поверхні - криві, які з'єднують точки перетину однойменних горизонталей. Так, крива лінія, яка проходить на контурі CD через точки T_{14} і S_{15} , має бути теоретично продовжена до точки P_{13} і Q_{16} , а практично обмежена точками V і U на границях укосу. Побудови границь укосів на інших ділянках видно із рисунка 20, в. На розрізі $1-1$ показано профіль топографічної поверхні ($E_{13} - F_{20}$) і проєктні профілі горизонтального майданчика, а також укосів виїмки на контурі AB (до точки H) та насипу на контурі CD (до точки G).

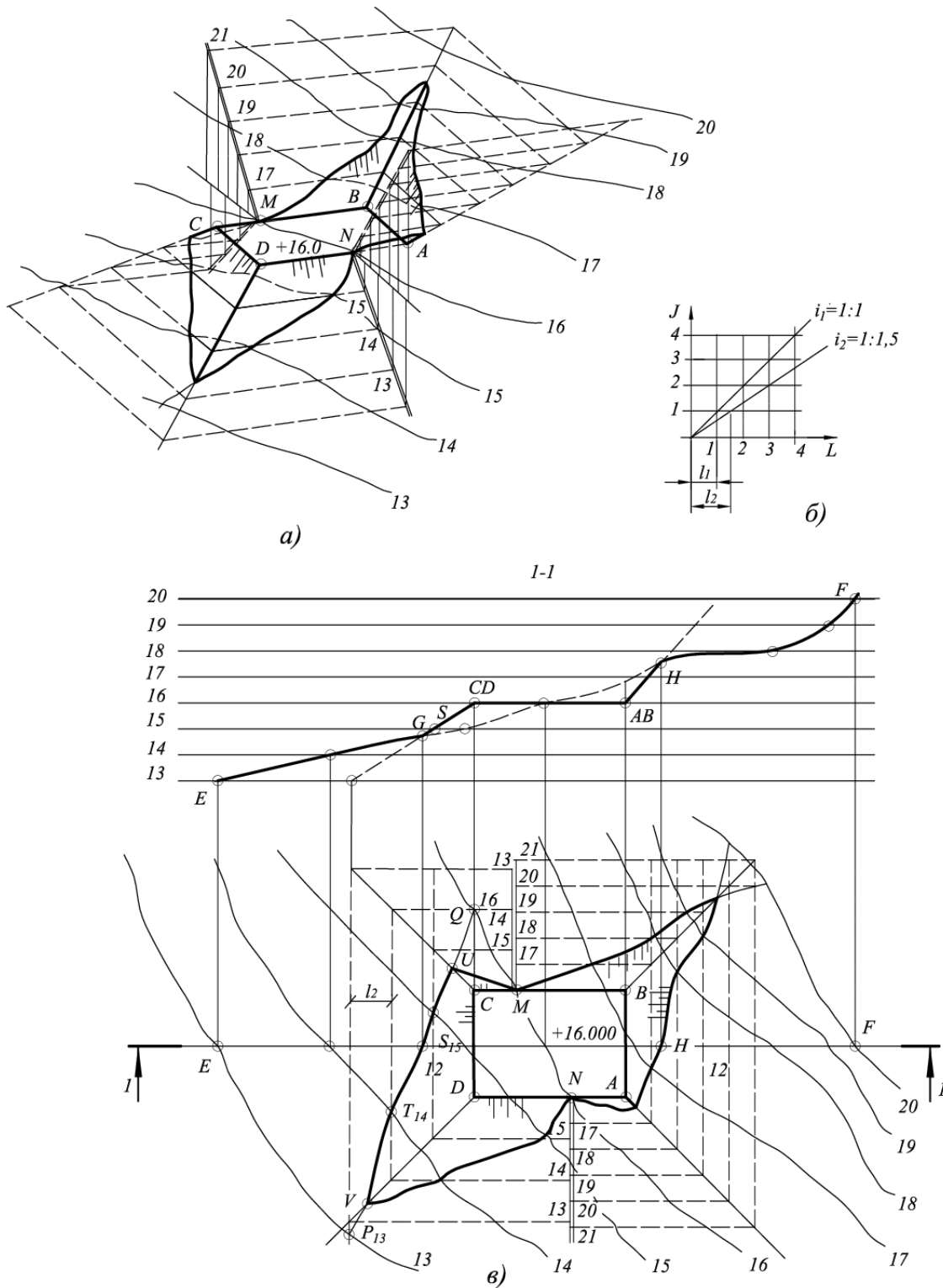


Рис.20

Приклад 4 (рис.21). На місцевості, заданій горизонталями 9 – 21, спроектувати горизонтальний майданчик, контур якого складається із прямокутника $ABCD$, половини кола DFE та прямокутної смуги між прямими AK і EH . Проектна позначка зазначеного контуру $+15$ (рис.21, а). Задано уклон виїмки $i_v = 1:1$ та уклон насипу $i_n = 1:1,5$. За значеннями уклонів будуюмо їх графіки (рис.21, б), за якими визначаємо величини інтервалів l_v та l_n . На границях

виїмки і насипу в точках M і N показуємо суміщені зображення ліній найбільшого нахилу для площин і конічних поверхонь, на яких відкладаємо величин відповідних інтервалів. Через точки із значеннями 16 – 21 проводимо проектні горизонталі виїмки, а через точки із значеннями 14 -10 – проектні горизонталі насипу. Перетин укосів на контурі $MBCD$ відбувається вздовж бісектрис кутів з вершинами B і C . Лінія перетину укосів на контурах CD (площина) і DFN (конічна поверхня) має форму конічного перерізу.

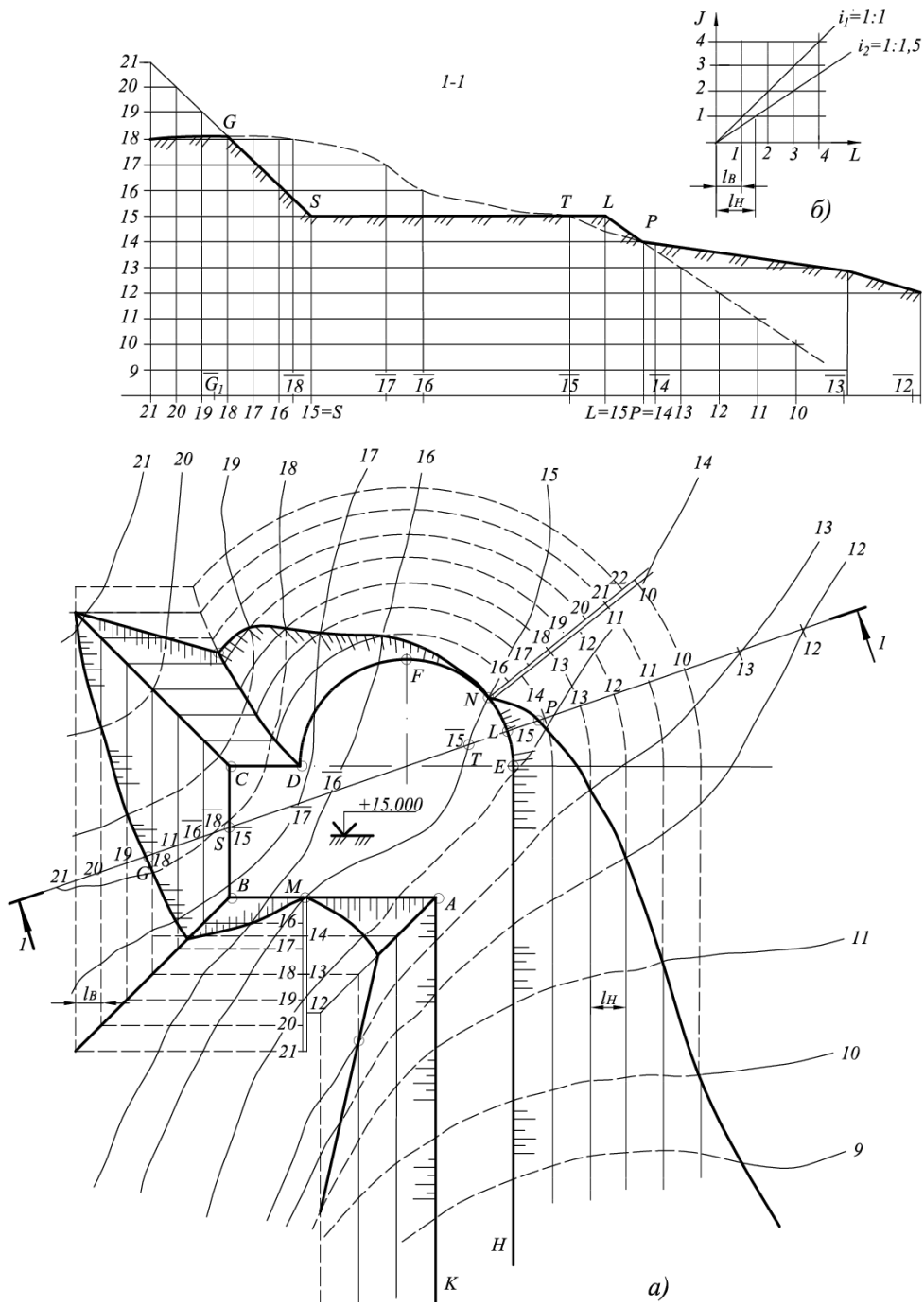


Рис.21

Вона проходить через точки перетину однойменних горизонталей. На контурі NE горизонталі конічної поверхні мають інтервал l_H , та кожна з них

плавно переходить в пряму – відповідну горизонталь площини укосу на контурі EH . З таким же інтервалом побудовано горизонталі на контурі $МАК$ (бісектриса кута з вершиною A) та лінія перетину двох укосів на цьому контурі. Залишається визначити точки перетину проектних горизонталей із однойменними горизонталями місцевості, а через побудовані точки провести лінії – границі укосів. На перерізі $I - I$ (рис. 21, в) показано профіль місцевості (крива лінія), профіль майданчика (горизонтальна пряма SL) та профілі виїмки (GS) і насипу (LP). Лінія LP в даному випадку – пряма, оскільки січну площину $I-I$ проведено через вісь конуса. Наочно показано обсяги виїмки («трикутник» GST) і насипу («трикутник» TLP). Видно також, що за межами укосів – до точки G зліва та після точки P справа залишилась задана місцевість.

Приклад 5. Майданчик $ABCD$ має підйом від нуля до позначки $+3$ (рис.22). Такі похилі насипи або виїмки зустрічаються при виконанні земляних споруд і носять назву *апарелей*. На графіку показано величини $i_1 = 1:1$ для укосів AD і BC та $i_2 = 3:2$ для укосу AB . Показано також величини закладення укосів при висоті 3 одиниці: для укосу на контурі AB – у вигляді відрізка $3'-a = r_1$, а для бокових укосів – у вигляді відрізка $3'-b = r_2$. Бокові укоси – площини, які проходять через прямі AD і BC та є дотичними до прямих кругових конусів з вершинами в точках A і B та твірними із нахилом $1:1$.

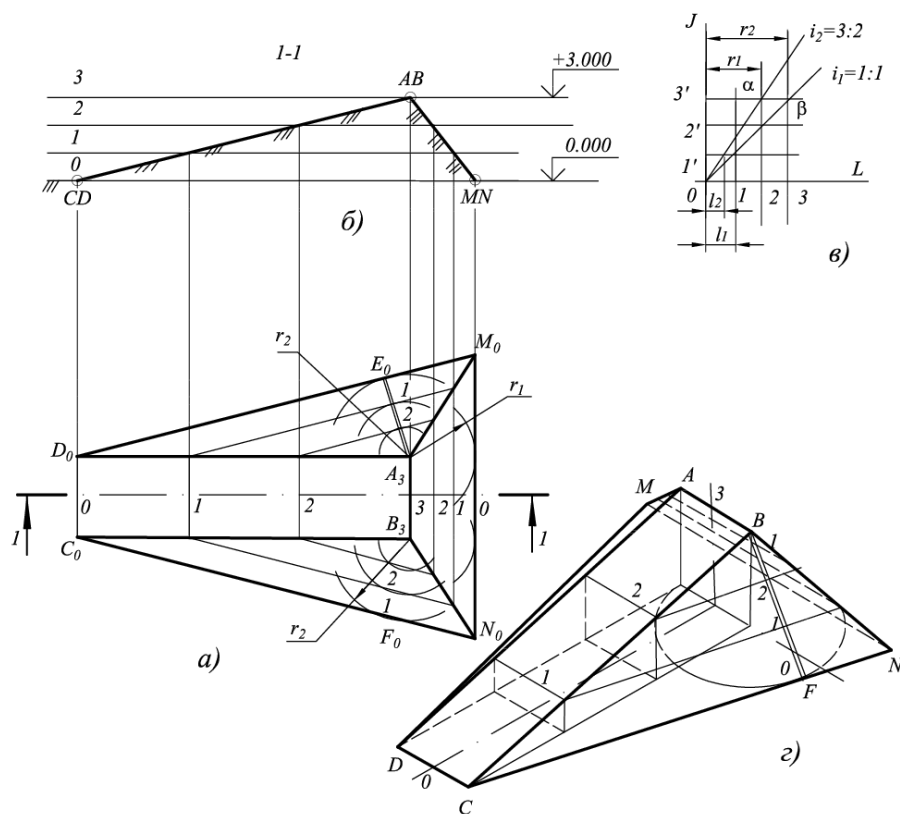


Рис.22

На рисунку показано штриховими лініями частини основ конусів (горизонталі на нульовій висоті – кола радіусу r_2), дотичними до яких є горизонтальні сліди CF і DE площин бічних укосів. Аналогічно побудовано площину укосу на контурі AB .

Горизонтальний слід цього укосу - пряма, дотична до прямих кругових конусів з вершинами в тих же точках A і B , але з нахилом твірних $3:2$. На рисунку для останніх конусів показано частини горизонталей на нульовій висоті – кіл радіуса r_1 . Побудована дотична перетинає продовження дотичних DE і CF в точках M і N . З'єднання останніх точок з A і B дає можливість побудувати лінії перетину (AM і BN) укосів. Для проведення горизонталей побудованих укосів достатньо проградуювати площину на контурі AB , провести горизонталі до перетину з границями укосу (прямими AM і BN) в точках, через які потім провести горизонталі бічних укосів паралельно горизонталям D_0M_0 і C_0N_0 . Горизонталі бічних укосів пройдуть через точки з позначками 1 і 2 на лініях бровки AD і BC .

Приклад 6. На рис. 23, *a* показано побудову укосів насипу криволінійної апарелі, нижня горизонталь якої - нуль, а верхня – плюс 4. Рівномірному під'йому майданчика відповідають рівні відстані між горизонталями $0 - 4$. Уклони насипу вздовж криволінійних контурів AC і BD $i_1 = 1:1$, на контурі CD $i_2 = 5:3$. На графіку уклонів (рис. 23, *б*) визначено l_1 , і разом із ним - величини радіусів кіл, які дорівнюють $l_1, 2l_1, 3l_1, \dots$

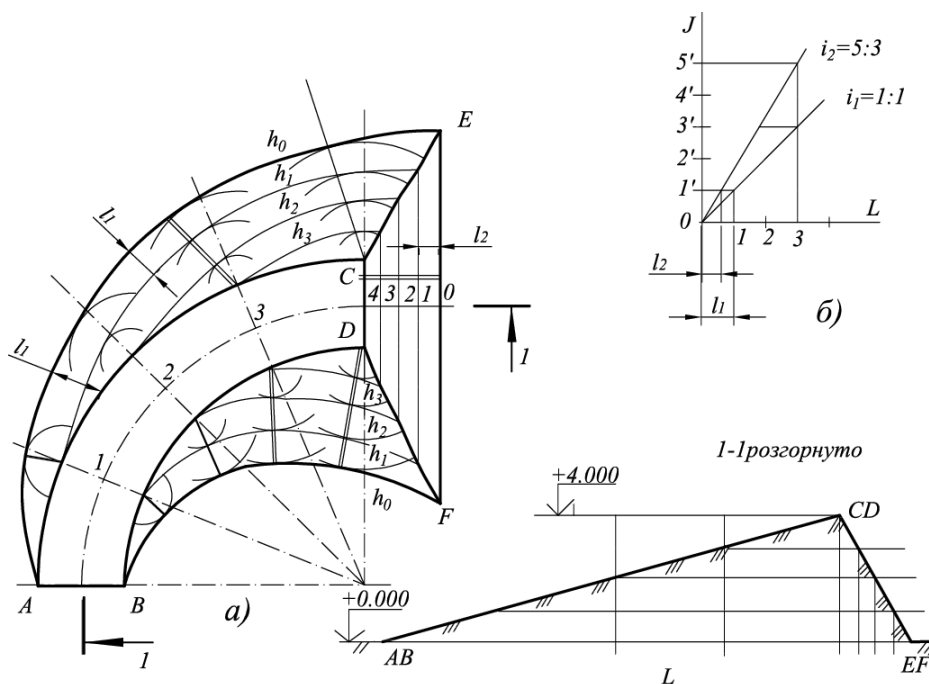


Рис.23

Кола є горизонталями конусів обертання, твірні яких утворюють поверхні однакового скату на ділянках AC і BD . Криві (h_0, h_1, h_2, h_3), які дотичні до одноіменних горизонталей конусів, є горизонталями утворених поверхонь насипів. Побудови на ділянці CD зрозумілі із попереднього прикладу. Лінії CE і DF проходять через точки перетину одноіменних горизонталей утворених скатів (в загальному випадку це – криві). На рис.23, в показано переріз $I-I$ отриманої споруди вертикальною циліндричною поверхнею і площиною. Результат перерізу на зображенні «розгортається», що і вказано в його назві.