РОЗДІЛ 2

ДЕЯКІ НЕМЕХАНІЧНІ ЗАДАЧІ, ЯКІ РІШАЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вступ

Протягом останнього сторіччя математичні методи почали бурхливо застосовуватися в різноманітних областях науки, раніше далеких від математики. Сюди відносяться екологія, економіка, біологія, медицина і багато чого іншого. Виникла навіть ілюзія загальної математизації науки. Існувала, а частково існує і по дійсний момент, думка, що будь-яка наука стає "справжньою" тільки після того, як вона описана строгою математичною мовою. Подібна «математична ейфорія» підсилилася ще і завдяки загальній комп'ютеризації суспільства.

Насправді усі обстоїть далеко не так просто. Зовнішня складність математичних методів створює враження про їхню всемогутність, особливо в людей, далеких від математики (на жаль, і в деяких математиків). У той же час, досвід показує, що застосування математики завжди зв'язано зі спрощенням дійсності. Це добре видно навіть на задачах механіки, у рамках яких математичні методи одержали найбільший розвиток. Основний закон механіки – другий закон Ньютона – сформульований для матеріальної точки, тобто для загадкового об'єкта, що має масу, але не має розмірів. Тверді тіла в класичній механіці не деформуються. Лінійний осцилятор (рис. 1.5.1) складається з матеріальної точки (хоча і зображеної, чомусь, у виді прямокутника) і пружини, що має жорсткість, але не має маси. У математичного маятника (рис. 1.5.2) вантаж не має розмірів, а нитка нерозтяжна і не має маси.

Перелік подібних прикладів можна продовжувати нескінченно. Головний висновок тут той, що закони механіки в їхньому математичному вираженні записані не для реальних матеріальних тіл, а для деяких спрощених моделей цих тел. Саме таке спрощення і дозволяє застосовувати строгу математичну мову для опису механічного руху. Але практика завжди розкриває наближеність математичного опису. Наприклад, артилеристи добре володіють математикою, намагаються врахувати усі фактори, що впливають на політ снаряда, але прекрасно знають, що снаряди падають із розсіюванням, тобто різні снаряди, випущені при, здавалося б, тих самих умовах, летять не однаково.

Дійсність нескінченно складна, а будь-яка модель «вириває» із цієї нескінченності кінцеву безліч параметрів, зневажаючи іншими. Ефективність математичних методів завжди зв'язана з відносно простими моделями. Чим складніше досліджуване явище, тим менше шансів описати його за допомогою математики. Але зате складні явища непогано описуються... чисто чи словесно, виражаючи сучасною науковою мовою – за допомогою вербальних моделей (verb – дієслово). Поводження такої надскладної системи, як Наташа Ростова прекрасно описав могутній талант Лева Толстого, але навряд чи можна (і потрібно!) складати в цьому випадку комп'ютерну математичну модель. Щонайменше, можна гарантувати, що нічого гарного з цього не вийде!

Усе це не виключає застосування математики в різних традиційних і нетрадиційних областях науки. Просто для того, щоб математичні методи були ефективні, необхідно в кожнім конкретному випадку знати область застосування відповідної моделі. Тому в розглянутих нижче задачах мова диференціальних рівнянь буде застосовуватися в сполученні з аналізом вірогідності одержуваних результатів.

2.1. Динаміка популяції

Розглянемо деяке співтовариство живих істот – популяцію. Позначимо чисельність популяції, тобто кількість істот, що входять у неї, через n. Зрозуміло, n є цілим числом і може змінюватися тільки стрибкоподібно, як мінімум, на одиницю. Однак при великих значеннях n ці стрибки можна вважати досить малими, у порівнянні з обсягом популяції, що дозволяє вважати число n таким, що змінюється безперервно.

Подібна заміна цілих чисел на дійсні досить широко поширена в механіці й фізиці. Наприклад, вивчаючи міцність і деформацію металевих виробів, вважають їх суцільними, зневажаючи тим, що сплави насправді мають складну структуру. Цей підхід називається феноменологічним. Його зміст полягає в тім, що замість детального вивчення мікроскопічних ефектів розглядаються деякі усереднені характеристики, що значно спрощує задачу.

Вивчимо процес розмноження популяції. Тут виникає проблема усереднення за часом. Очевидно, що потомство з'являється на світ не безперервно, а через кінцеві проміжки часу. Більшість диких тварин дає потомство один раз у рік. Інакше кажучи, час у живій природі змінюється дискретно, стрибками. Однак на великих інтервалах можна робити усереднення по часу, вважаючи його безперервним.

Після всіх зроблених застережень, вважаючи й обсяг популяції, і час величинами безперервними, можна застосувати до вивчення питання про зміну чисельності популяції теорію диференціальних рівнянь. Швидкість зміни безперервної функції безперервного часу n=n(t) знаходиться як похідна: dn/dt. Залишається з'ясувати, від чого залежить ця швидкість. Почнемо з припущення, що швидкість зміни обсягу популяції пропорційна цьому обсягу. Інакше кажучи, кількість нащадків пропорційно кількості батьків. Позначаючи коефіцієнт пропорційності через m маємо:

$$\frac{dn}{dt} = mn \qquad (2.1.1)$$

Це одне з найпростіших і відомих диференціальних рівнянь; його рішення буде:

$$n = n_0 e^{mt}, \tag{2.1.2}$$

де n_0 – початковий обсяг популяції.

Проаналізуємо отриманий результат. Розглянемо довільний момент часу t і якесь збільшення часу Δt. Обчислимо наступне відношення:

$$\frac{n(t+\Delta t)}{n(t)} = \frac{n_0 e^{m(t+\Delta t)}}{n_0 e^{mt}} = \frac{n_0 e^{mt} e^{m\Delta t}}{n_0 e^{mt}} = e^{m\Delta t} = k \tag{2.1.3}$$

Таким чином, через рівні проміжки часу Δt обсяг популяції змінюється однаковим образом у k раз. Графічно цей результат (при m=ln2 і n_0=1) представлений на рис. 2.1.1. Цей, зовні простий, результат заслуговує на глибоку увагу. Почнемо з дуже древньої і досить добре відомої легенди про шахівницю. Нібито мудрецю, що винайшов шахову гру, індійський раджа запропонував будь-яка винагороду. Мудрець виявився людиною скромним, і попросив усього лише невелику кількість зерен пшениці, що виходить у результаті наступної процедури. Нехай на першу клітку шахівниці покладуть одне зерно, на другу – удвічі більше, тобто два, на третю – удвічі більше, тобто чотири, на четверту – вісім і т.д. Раджа дуже розгнівався, довідавшись, яку незначну нагороду зажадав мудрець, але розрахунки придворних рахівників показали, що сумарної кількості зерна, що виходить, не в змозі вродити вся територія земної кулі.

Ця красива легенда демонструє багатство можливостей шахової гри, невичерпність її варіантів. Але в той же час той же закон (2.1.2) описує і ланцюгову реакцію, що відбувається при вибуху атомної бомби. Саме в такий спосіб розмножуються нейтрони.

Якщо повернутися до екології, то відомі випадки екологічних катастроф, викликаних подібним «вибухоподібним» розвитком популяції. Наприклад, уперше завезені білими колоністами в Австралію кролики, не зустрічаючи природних ворогів, за короткий термін заповнили весь континент і поставили під погрозу функціонування сільського господарства, тобто життєзабезпечення колоністів. Ситуацію удалося виправити тільки надзвичайними заходами.

Відомі і деякі сучасні проблеми, зв'язані з отриманими результатами. Звернемо увагу, що час на рис. 2.1.1 змінюється за законом арифметичної прогресії: 0, 1, 2, 3,..., а обсяг популяції – за законом геометричної прогресії: 1, 2, 4, 8,...

Уперше подібну екологічну взаємодію двох прогресій – арифметичної і геометричний – помітив англійський священик і філософ Мальтус, що жив у дев'ятнадцятому столітті. Він звернув увагу на те, що обсяг населення Землі росте в геометричній прогресії (тобто за законом (2.1.2)), а зростання виробництва продуктів харчування – у кращому випадку в арифметичній прогресії, тобто набагато повільніше. Звідси Мальтус зробив природний висновок про неприпустимість безконтрольного збільшення населення Землі, що неминуче спричиняє масовий голод і інші проблеми перенаселення. У якості «природного» регулятора чисельності населення Мальтус запропонував... війни.

Що можна сказати з приводу таких «божественних» ідей (нагадаємо, що Мальтус був священиком)? Воєн, що пройшли за останнє сторіччя, було більше, ніж досить, але проблем демографічної катастрофи вони аж ніяк не вирішили. Стрімке зростання населення Землі наприкінці двадцятого століття давно уже вийшло з під контролю і є однієї із самих серйозних проблем дійсного часу. Усі прогнози Мальтуса, на жаль, виправдалися. Світове співтовариство не приймає, фактично, ніяких істотних заходів для рішення цієї проблеми (крім, хіба що, звичного ведення воєн), а обсяг населення Землі давно уже вийшов за всякі розумні межі, що не обіцяє, у найближчому майбутньому, ніяких гарних перспектив.

Ми зробили тільки першу, найпростішу, спробу застосування апарата диференціальних рівнянь до рішення екологічної задачі, і отримані результати виявилися цілком вражаючими і достовірними. Це показує обґрунтованість обраного підходу моделювання і перспективність його подальшого розвитку.

2.2. Вплив смертності на динаміку популяції

Повернемося до рецепта, запропонованого Мальтусом для рішення демографічних проблем. Інакше кажучи, обмеженню чисельності популяції за рахунок смертності (краще, звичайно, природної, а не за рахунок воєн).

Дійсно, у моделі, описаної в попередньому параграфі, смертність не враховувалася, тобто передбачалося одночасне існування предків і нащадків незалежно від віку. Крім того, малося на увазі, що предки будь-якого віку продовжують створювати потомство нарівні зі своїми дітьми.

У зв'язку з цим варто згадати одну з подорожей Гулливера, у якій він, з волі Джонатану Свифта, зустрівся з безсмертними людьми. Ці безсмертні, доживши до глибокої старості і отримавши всі характерні старечі властивості, у тому числі повну втрату розуму, продовжували жити без кінця, страждаючи самі і спричиняючи масу незручностей навколишнім. Слава Богу, у Свифта вони хоч не створювали потомства.

Повернувши зі світу фантазії у світ реальний спробуємо скорегувати запропоновану вище модель. Нехай коефіцієнт пропорційності в (2.1.1) має вид: $m = \alpha - \beta$. Позитивну його частину α будемо називати *коефіцієнтом народжуваності*, негативну: $-\beta$ *коефіцієнтом смертності.*

Якщо α і β – константи, то таке структурування коефіцієнта m мало що змінює. При $\alpha>\beta$ маємо $m>0$ і колишній експонентний ріст обсягу популяції. Це випадок, коли народжуваність перевищує смертність. При $\alpha<\beta$ буде $m<0$ і рішення (2.1.2) опише нову ситуацію – експонентне убування обсягу популяції. Це випадок переваги смертності над народжуваності. Відповідний приклад графічно зображений на рис. 2.2.1.

Розглянемо більш складну і, у той же час, природну ситуацію. При надмірному росту обсягу популяції виникають проблеми життєзабезпечення, зв'язані, наприклад, з недостачею продовольства чи чогось ще, не менш важливого. Тому коефіцієнт смертності може зростати зі збільшенням чисельності популяції. Припустимо, наприклад, що він пропорційний n, тобто $\beta = r\,n$. Тоді $m = \alpha - r\,n$ і замість рівняння (2.1.1) одержуємо:

$$\frac{dn}{dt} = (\alpha - r\,n)n \qquad (2.2.1)$$

Це рівняння вже трохи більш складне, чим (2.1.1). І хоча його інтегрування усе ще достатнє просто, корисно попередньо розглянути фазовий портрет. Оскільки ми маємо одне диференціальне рівняння першого порядку, то в осях $n, \dot{n} = dn/dt$ саме це рівняння і є формулою фазової кривої (рис. 2.2.2). Це парабола, що перетинає вісь n у точках n_1=0 і $n_3=\alpha/r$. Для порівняння зображена і фазова крива при відсутності смертності (r=0), тобто пряма $\dot{n} = \alpha n$. Відповідно до цієї прямої швидкість росту обсягу популяції росте разом з величиною обсягу. Наявність смертності обмежує швидкість максимальним значенням $\dot{n}_{max} = \alpha^2 / (4r)$, що досягається при $n_2 = \alpha /(2r)$. З подальшим збільшенням n швидкість росту починає падати, обертаючись в нуль при $n_3 = \alpha /r$. Це значення обсягу є рівноважним. При $n<n_3$ маємо $\dot{n} > 0$, а при $n>n_3$ – $\dot{n} < 0$. Отже, при будь-яких відхиленнях від значення $n=n_3$ обсяг популяції прагне повернутися до цього значення. З цього витікає, що це стійке положення рівноваги.

Як бачимо, і тут фазовий портрет подає значну інформацію про поводження системи. Наявність цієї інформації полегшує і дослідження рішення рівняння (2.2.1). Розділяючи в (2.2.1) перемінні й інтегруючи одержуємо:

$$n = \frac{\alpha}{r + \left(\frac{\alpha}{n_0} - r\right)e^{-\alpha t}}, \tag{2.2.2}$$

де n_0 – як і раніше початкове значення n при $t_0=0$.

На рис. 2.2.3 приведені відповідні криві для ряду значень n_0. При $n_0<n_3$ спостерігається ріст, а при $n_0>n_3$ – зменшення n. В усіх випадках маємо асимптотичне наближення n до значення n_3.

S-образні криві, зображені на рис. 2.2.3, уперше досліджував Ферхюльст, у зв'язку з чим їх називають логістичними кривими Ферхюльста.

Власне, S-образною є тільки нижня з кривих, зображених на рис. 2.2.3. Розглянемо її докладніше. При малих значеннях n_0 коефіцієнт пропорційності m приблизно дорівнює α n (рис. 2.2.2). Це забезпечує експонентний ріст обсягу популяції (ділянка 1 на рис. 2.2.3). Він характерний тим, що ресурси популяції практично цілком витрачаються на відтворення. З ростом n стає помітної смертність. Інакше кажучи, частина популяції втрачає репродуктивні властивості. В околі максимального значення швидкості $\dot{n}$ графік n=n(t) здобуває приблизно прямолінійну форму (ділянка 2 на рис. 2.2.3). З подальшим збільшенням n швидкість росту наближається до нуля й обсяг популяції стабілізується поблизу значення n_3 (ділянка 3). Тепер смертність врівноважує народжуваність.

Ці результати цілком відповідають отриманим при розгляді фазового портрета. Вони наочно показують різні фази розвитку популяції.

Стабілізацію забезпечує зменшення коефіцієнта пропорційності m до нуля.

Звернемо увагу на те, що отримані результати можна інтерпретувати по різному. При постійному коефіцієнті народжуваності α стабілізація забезпечується тим, що коефіцієнт смертності $\beta = rn$ росте разом з n. Таким чином, з ростом обсягу популяції, вимирає усе більша відносна частка цієї популяції (наприклад, від недостачі продовольства). Інакше кажучи, живі істоти створюють явно надлишкову кількість потомства і значна частина цього потомства гине.

Замість цього можна вважати, що формула $m = \alpha - rn$ відбиває не ріст коефіцієнта смертності, а зменшення коефіцієнта народжуваності. Популяція обмежує свій обсяг цілеспрямовано, зменшуючи кількість нащадків не за рахунок їхньої смерті, а за рахунок регулювання народжуваності. У цьому випадку досягається той же результат стабілізації обсягу популяції, але зовсім іншими, ніж пропонував Мальтус, методами.

2.3. Система «хижак-жертва»

Розвиваючи ідеї попередніх параграфів, перейдемо до розгляду більш складної задачі про взаємодію двох популяцій. Нехай обсяг однієї популяції дорівнює n_1, а іншої – n_2. Складемо диференціальні рівняння для обох популяцій:

$$\frac{dn_1}{dt} = m_1 n_1; \quad \frac{dn_2}{dt} = m_2 n_2 \tag{2.3.1}$$

Нехай перша популяція складається з хижаків, а друга – з жертв. Єдиним джерелом харчування хижаків є жертви, тому їхній коефіцієнт народжуваності пропорційний кількості жертв: $\alpha_1 = a_{12} n_2$. Коефіцієнт природної смертності хижаків постійний: $\beta_1 = a_{11}$. У підсумку сумарний коефіцієнт пропорційності буде: $m_1 = \alpha_1 - \beta_1 = a_{12} n_2 - a_{11}$.

У жертв є якесь своє джерело харчування, що забезпечує їм постійний коефіцієнт народжуваності: $\alpha_2 = a_{22}$. Жодна з жертв не умирає своєю смертю; усі вони поїдаються хижаками; тому коефіцієнт смертності жертв пропорційний кількості хижаків: $\beta_2 = a_{21} n_1$. Сумарний коефіцієнт пропорційності для жертв дорівнює: $m_2 = a_{22} - a_{21} n_1$.

З урахуванням отриманих виражень для m_1 і m_2 одержуємо з (2.3.1):

$$\frac{dn_1}{dt} = (a_{12}n_2 - a_{11})n_1; \quad \frac{dn_2}{dt} = (a_{22} - a_{21}n_1)n_2 \qquad (2.3.2)$$

Ця система двох взаємозалежних рівнянь була вперше отримана італійським ученим Вольтерра́ і має його ім'я.

Рівняння Вольтерр á є нелінійними, тому їхнє рішення зв'язане з деякими проблемами. Застосуємо, у зв'язку з цим, чисельний метод інтегрування даних рівнянь. Проведемо, попередньо, найпростіший аналіз рівнянь. Розглянемо питання про існування стаціонарного рішення, тобто постійних значень n_1 і n_2. У цьому випадку похідні в правих частинах рівнянь (2.3.2) обертаються в нуль і рівняння приймають вид:

$$(a_{12}n_2 - a_{11})n_1 = 0; \quad (a_{22} - a_{21}n_1)n_2 = 0 \qquad (2.3.3)$$

Алгебраїчні рівняння (2.3.3) мають два рішення:

1) $n_1 = 0;\ n_2 = 0$; 2) $\hat{n}_1 = \dfrac{a_{22}}{a_{21}};\ \hat{n}_2 = \dfrac{a_{11}}{a_{12}}$. (2.3.4)

Рівняння (2.3.2) мають класичну форму рівнянь Гамильтона, тому природно застосування в цьому випадку методу фазової площини. Два стаціонарних рішення (2.3.4) відповідають двом особливим точкам на цій площині. З'єднаємо ці точки відрізком, розіб'ємо його на кілька частин і використаємо точки розбивки як початкові значення при чисельному інтегруванні рівнянь (2.3.2).

Відповідний фазовий портрет зображений на рис. 2.3.1. Ми бачимо на цьому рисунку дві добре знайомі по задачах механіки особливі точки. Рішенню 1) (2.3.4) відповідає особлива точка типу сідло, а рішенню 2) (2.3.4) – фокус.

Розглянемо докладно поводження системи відповідно до самої зовнішньої фазової кривої з приведених на рис. 2.3.1. Вона відповідає малим початковим значенням n_1 і n_2, тобто старту системи з околу рішення 1) (2.3.4). Відповідні залежності $n_1=n_1(t)$ і $n_2=n_2(t)$ приведені на рис. 2.3.2.

Якщо в початковий момент часу мало і хижаків і жертв, то перевага на стороні жертв. Їх майже не знищують, і вони починають стрімко розмножуватися. Точка, що зображує, на фазовій площині віддаляється від початку координат, що показує нестійкий характер стаціонарного стану 1) (2.3.4). При майже незмінній і навіть злегка убутній кількості хижаків кількість жертв швидко росте. Однак, коли ця кількість стає досить великою, створюються умови для швидкого розмноження хижаків. Тепер різко зростає кількість хижаків, а кількість жертв починає убувати.

Але у деякий момент часу створюється катастрофічна ситуація для хижаків, коли їх стає дуже багато, а жертв – дуже мало, і хижаки починають вимирати від голоду. Усе повертається в початкову точку.

Розглянемо тепер фазову криву, найбільш близьку до точки, що відповідає рішенню 2) (2.3.4). Ця крива локалізована в околі стаціонарного рішення, що говорить про стійкий характер цього рішення. Відповідні залежності $n_1=n_1(t)$ і $n_2=n_2(t)$ також приведені на рис. 2.3.2. Вони, як і фазова крива, показують невеликі коливання системи поблизу стаціонарного рішення.

З теоретичної точки зору приведений аналіз, що спирається на чисельне інтегрування рівнянь (2.3.2), не можна вважати цілком строгим. Пізніше ми повернемося до питання про поводження механічних і будь-яких інших систем поблизу особливих точок. У тому числі буде проведене і додаткове теоретичне дослідження рівнянь Вольтерр á . Однак у даному випадку можна вважати проведений аналіз цілком змістовним і таким, що дав досить повну інформацію про властивості і поводження досліджуваної системи хижак-жертва.

Відзначимо, що досить високий рівень вірогідності чисельних результатів і можливість виконання на їхній основі якісного аналізу обумовлені попереднім аналітичним знаходженням двох стаціонарних рішень. Тобто навіть у такій найпростішій формі аналітичне дослідження передувало чисельному і забезпечило його ефективність.

2.4. Видозмінений варіант системи «хижак-жертва»

У рівняннях Вольтерра́ (2.3.2) коефіцієнти смертності як для хижаків, так і для жертв не залежать від власних обсягів цих популяцій. Тобто не врахований той ефект, що відігравав істотну роль при дослідженні одиночної популяції в параграфі 2.2. Уведемо відповідні доданки, одержуючи, замість (2.3.2), рівняння:

$$\frac{dn_1}{dt} = (a_{12}n_2 - r_1 n_1 - a_{11})n_1; \quad \frac{dn_2}{dt} = (a_{22} - a_{21}n_1 - r_2 n_2)n_2 \qquad (2.4.1)$$

Знову почнемо з пошуку стаціонарних рішень:

$$(a_{12}n_2 - r_1 n_1 - a_{11})n_1 = 0; \quad (a_{22} - a_{21}n_1 - r_2 n_2)n_2 = 0 \qquad (2.4.2)$$

Одне з рішень системи (2.4.2) залишається, як і колись, нульовим: $n_1 = 0$; $n_2 = 0$. Інше розшукується як рішення системи лінійних рівнянь:

$$r_1 n_1 - a_{12}n_2 = -a_{11}; \quad a_{21}n_1 + r_2 n_2 = a_{22} \qquad (2.4.3)$$

Звідси:

$$\hat{n}_1 = \frac{a_{12}a_{22} - a_{11}r_2}{r_1 r_2 + a_{12}a_{21}}; \quad \hat{n}_2 = \frac{r_1 a_{22} + a_{11}a_{21}}{r_1 r_2 + a_{12}a_{21}} \qquad (2.4.4)$$

Таким чином, кількість стаціонарних точок залишилося колишньою. Однак характер рішення тепер змінюється. На рис. 2.4.1 і 2.4.2 приведені результати чисельного інтегрування рівнянь (2.4.1) при r_1=0.1, a_{11}=1, a_{12}=1, r_2=0.1, a_{21}=1, a_{22}=1. Видно, що поводження системи істотно відрізняється від попереднього випадку наявністю загасання коливань. Якими б ні були початкові умови, обсяги обох популяцій прагнуть до стаціонарних значень (2.4.4).

Такий результат виглядає більш природно, ніж незатухаючі коливання, отримані в попередньому параграфі. Дійсно, у природних умовах важко уявити собі постійне розгойдування обсягів популяцій з великою амплітудою. Більш реальною є поступова стабілізація цих обсягів навколо якихось рівноважних значень, що і вийшло в даному випадку.

2.5. Автоколивання. Граничний цикл

У природних і штучних системах часто створюються умови, коли постійна сила, постійний приплив енергії породжують коливальний процес. Таке явище одержало назву автоколивань. Найпростіший приклад автоколивань зв'язаний із системою, зображеною на рис. 2.5.1. Одномірний осцилятор поміщений на конвеєр, що рухається. Стрічка конвеєра захоплює, за рахунок тертя, вантаж, але потім він починає прослизати і, під дією пружини, повертається назад, після чого процес відновляється.

Аналогічні явища мають місце в звичайних маятникових годинниках, у яких вага гирі підштовхує, за допомогою нескладного механізму, маятник, створюючи його незатухаючі з постійною амплітудою коливання. Те ж саме відбувається в електричних генераторах змінного струму.

Відомі коливальні процеси, що самопідтримуються, у хімії (реакція Белоусова-Жаботинского), а також у біології й економіці.

Розглянемо математичну модель подібних коливань. Диференціальне рівняння загасаючих гармонійних коливань має вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (2.5.1)$$

Тут середній доданок описує силу тертя, пропорційну швидкості. Рішення рівняння (2.5.1) при малій силі тертя буде:

$$x = ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha); \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}; (n < \omega) \qquad (2.5.2)$$

Відповідні графіки приведений на рис. 2.5.2, 2.5.3.

У випадку «негативного» тертя, що підштовхує систему із силою, пропорційною швидкості, замість (2.5.1) маємо рівняння:

$$\ddot{x} - 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (2.5.3)$$

рішення якого:

$$x = ae^{nt}\sin(\omega_1 t + \alpha); \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}; \quad (n < \omega) \qquad (2.5.4)$$

описує коливання зі зростаючою амплітудою (рис. 2.5.4, 2.5.5).

Фазові портрети на рис. 2.5.3, 2.5.5 називаються, за аналогією з рис. 1.7.2, фокусами.

Якщо створити систему, у якій тертя негативне при малих амплітудах і позитивне при великих, то така система буде автоматично підтримувати коливання з постійною амплітудою, парируючи відхилення від цієї амплітуди. Така система називається системою з негативним зворотним зв'язком.

На відміну від цього, у системах з позитивним зворотним зв'язком з ростом відхилення від якогось стану росте і сила, що веде з цього стану. На цьому принципі влаштована, наприклад, пастка для ведмедя. На вершині дерева поміщають принаду (мед), а нижче підвішують на мотузці колоду. Ведмідь лізе на дерево за медом (нагадаємо, що слово ведмідь і означає – мед відає, тобто фахівець з меду) і наштовхується на колоду. Штовхаючи колоду, він одержує зворотний удар, штовхаючи ще сильніше, одержує ще більш сильний удар... і т.д. до логічного завершення. На відміну від меду, в автоколивальних системах ведмідь не фахівець.

Типовим прикладом системи з негативним зворотним зв'язком є полум'я свічі. У момент запалювання язичок полум'я малий, але далі він росте за рахунок ресурсів палива, подаваних по ґноті, і кисню (негативне тертя). Однак, при досягненні занадто великих розмірів виникає недостача палива через обмежену пропускну здатність ґнота (позитивне тертя) і розміри полум'я зменшуються. У цілому розміри полум'я коливаються поблизу деякого рівноважного стану без надмірного чи зменшення збільшення.

Розглянемо такий важливий приклад системи з негативним зворотним зв'язком, як ламповий генератор (рис. 2.5.6). Після його включення в коливальному контурі виникнуть коливання. При відсутності «підштовхування» вони загаснли б через сили опору. Однак контур з'єднаний, за допомогою трансформаторного зворотного зв'язку, з ламповим тріодом. Коливання струму в контурі викликають коливання напруги на сітці і, отже, коливання струму, що йде через лампу. У підсумку лампа служить джерелом збудливої сили, що підтримує коливання в контурі.

Але при надмірно великій амплітуді таких коливань негативні напруги на сітці гасять струм, що йде через лампу. У підсумку коливання в контурі зменшуються. Таким чином, лампа відіграє роль негативного тертя при малій амплітуді коливань у контурі і позитивного тертя – при великій амплітуді.

Диференціальне рівняння, що описує роботу генератора, називається рівнянням Ван-дер-Поля і має вид:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - y^2)\frac{dy}{d\tau} + y = 0 \qquad (2.5.5)$$

Тут y – деяка величина, що характеризує силу струму (чи напругу) у контурі; τ – умовний час. Використання умовних величин y і τ застосовується для спрощення форми запису рівняння. У реальних фізичних одиницях рівняння Ван-дер-Поля виглядає більш складно; однак перехід, за допомогою замін перемінних, до рівняння (2.5.5) робить його більш зручним для аналізу, не змінюючи змісту.

Середній доданок у (2.5.5) негативний при малих значеннях у і позитивний при великих значеннях у, тобто описує негативний зворотний зв'язок, що підтримує коливання з фіксованою амплітудою. Коефіцієнт ε характеризує величину зворотного зв'язку.

Перетворимо (2.5.5) до виду:

$$\frac{dy}{d\tau} = v; \quad \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon(1 - y^2)v - y \tag{2.5.6}$$

Вирішуючи рівняння (6) чисельним методом одержуємо результати, відбиті на рис. 2.5.7,...,2.5.10. З цих рисунків видно, що при будь-яких початкових умовах фазова крива системи «намотується» на деяку фіксовану криву. Ця крива називається граничним циклом.

При малих значеннях ε граничний цикл близький до еліпса, а відповідні закони $y = y(\tau)$ і $v = v(\tau)$ близькі до гармонійного. Стабілізація процесу, тобто його наближення до граничного циклу, відбувається відносно повільно.

З ростом ε стабілізація відбувається набагато швидше, але при цьому граничний цикл спотворюється, і відповідні коливання вже далекі від гармонійних. Крім того, як видно з рис. 2.5.10, при відносно великих значеннях ε спостерігається помітний змін фаз стаціонарних коливань, отриманих при різних початкових умовах.

Порівняємо ще отримані тут результати з результатами параграфа 2.3. Рівняння Вольтерра́ також приводили до замкнутих фазових кривих. Однак там вид кривих залежав від початкових умов. Важлива особливість граничних циклів, розглянутих тут, полягає в тім, що вони є внутрішньою характеристикою системи, що не залежить від вибору початкових умов.

2.6. Автоколивання в системі «хижак-жертва»

Повернемося до системи «хижак-жертва». Результати, приведені в параграфі 2.3, показують, що в цій системі можуть існувати незатухаючі коливання. У параграфі 2.4 були розглянуті загасаючі коливання тієї ж системи. Очевидно, що нескладно одержати і коливання з «негативним» тертям. Формально (поки не зупиняючись на змісті результатів) досить замінити на протилежні знаки коефіцієнтів r_1, r_2 у рівняннях (2.4.1). При цьому виходять графіки такі, як приведені на рис. 2.6.1 і 2.6.2.

Таким чином, у системі «хижак-жертва» присутні всі ті ж явища, що обговорювалися в попередньому параграфі. Можливі коливання як з убутної, так і зростаючою амплітудою. Отже, можна чекати і наявності автоколивань. Розглянемо умови їхнього виникнення.

Запишемо рівняння Вольтеррá у наступній формі:

$$\frac{dn_1}{dt} = (a_{12}n_2 - a_{11})n_1; \quad \frac{dn_2}{dt} = \left[\alpha(n_2) - a_{21}n_1\right]n_2 \tag{2.6.1}$$

Таким чином, перше з рівнянь залишилося в класичній формі (2.3.2), а в другому коефіцієнт народжуваності став величиною, що залежить від кількості жертв. Стаціонарну кількість жертв одержуємо, як і колись, дорівнюючи до нуля праву частину першого з рівнянь (2.6.1):

$$\hat{n}_2 = \frac{a_{11}}{a_{12}} \tag{2.6.2}$$

Припустимо, що в околі цього значення n_2 діє «негативне тертя», тобто при невеликих відхиленнях n_2 від значення (2.6.2) коефіцієнт народжуваності жертв росте. З подальшим відхиленням від значення (2.6.2) коефіцієнт народжуваності починає падати, і тертя стає «позитивним», тобто приводить до загасання. Цього можна домогтися, записавши функцію $\alpha(n_2)$ у виді:

$$\alpha(n_2) = a_{22} + r_1(n_2 - \hat{n}_2) - r_2(n_2 - \hat{n}_2)^3 \qquad (2.6.3)$$

Нескладно підібрати таку комбінацію параметрів, при якій буде реалізований режим автоколивань. Відповідні графічні результати, отримані в результаті чисельного інтегрування рівнянь (2.6.1), приведені на рис. 2.6.3 і 2.6.4.

На рис. 2.6.3 знову видний граничний цикл, на який «намотуються» фазові криві при будь-якому виборі початкових умов як усередині, так і зовні граничного циклу.

На рис. 2.6.4 приведені графіки відповідних залежностей $n_1 = n_1(t)$ і $n_2 = n_2(t)$. Ці графіки нагадують графіки, приведені на рис. 2.5.10. Добре видна стабілізація режиму коливань, однак результати, що відповідають різним початковим умовам, відрізняються зрушенням фаз.

Зрозуміло, отримані результати уразливі з біологічної точки зору і вимагають змістовного обговорення фахівцями. Головною метою дослідження в даному випадку була наочна демонстрація спорідненості математичного апарата, що описує зовсім різні, зовні зовсім не схожі явища. Далі перелік немеханічних прикладів, вивчення яких можливо на основі методів, уперше застосованих у механіці, буде продовжений.

2.7. Односекторна динамічна модель Леонтьева

Перейдемо від екології до інший, не менш актуальної, темі – економіці. Тут також можливе застосування теорії диференціальних рівнянь. Одним з перших це зробив американський економіст російського походження Леонтьев. Розглянемо спочатку найпростіші моделі, побудовані відповідно до ідей Леонтьева.

Нехай x=x(t) – обсяг виробництва якоїсь галузі економіки (виражений, для зручності, у грошовому еквіваленті). Динаміку цієї галузі можна описати за допомогою диференціального рівняння:

$$x = ax + \nu\frac{dx}{dt} + C \qquad (2.7.1)$$

Подібні рівняння називаються балансовими чи моделями типу «витрата-випуск». Рівняння (2.7.1) показує, на що витрачаються отримані в даній галузі економіки кошти. Повний результат поділяється на наступні три частини. Перший доданок праворуч показує, яка частина прибутку йде на самовідтворення (наприклад, на заповнення амортизаційних утрат, закупівлю сировини і т.п.). Коефіцієнт $a<1$ називається технологічним коефіцієнтом.

Другий доданок відбиває кількість коштів, що направляється на розширення даної галузі, тобто на інвестиції. Коефіцієнт ν називається фондомісткістю.

Третій доданок показує обсяг позавиробничих витрат (заробітна плата, витрати на соціальну сферу, інвестиції в інші галузі економіки і т.д.).

Перетворимо рівняння (2.7.1) до форми:

$$\nu\frac{dx}{dt} = bx - C; \quad (b = 1 - a) \qquad (2.7.2)$$

Результати рішення цього рівняння істотно залежать від виду величин ν, b і C. При постійних ν, b, C фазова площина має вид, зображений на рис. 2.7.1. Точці x=C/b відповідає стан нестійкої рівноваги. При x<C/b буде $\dot{x} < 0$ (при ν>0); при x>C/b – $\dot{x} > 0$, тобто будь-яке відхилення від положення рівноваги веде до подальшого наростання цього відхилення.

Рішення рівняння (2) у цьому випадку має вид:

$$x = \frac{C}{b} + \left(x_0 - \frac{C}{b} \right) e^{\frac{b}{\nu} t}, \quad (2.7.3)$$

де x_0 – початкове значення x при t_0=0. Відповідні графіки приведені на рис. 2.7.2. На них добре видна зазначена вище роль точки x=C/b. При x_0>C/b маємо експонентний ріст x, а при x_0<C/b – експонентне убування.

Очевидно, що експонентна зміна величини x може відбуватися тільки на якомусь початковому етапі функціонування системи. З ростом (чи убуванням) x повинні відбуватися якісь якісні зміни, що відбиваються, зокрема, на коефіцієнтах рівняння (2.7.2). Розглянемо, у першу чергу, фондомісткість ν. З ростом x, як правило, стає усе сутужніше підтримувати постійну швидкість росту обсягів виробництва. Це зв'язано з обмеженістю ресурсів, насичуваністю ринку й іншими об'єктивними причинами. Тому можна вважати, що величина ν росте разом з x.

Розглянемо, для початку, лінійну залежність:

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 x \tag{2.7.4}$$

Тоді рівняння (2.7.2) можна переписати у виді:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{bx - C}{\nu_0 + \nu_1 x} \tag{2.7.5}$$

Відповідний фазовий портрет зображений на рис. 2.7.3. Видно, що з ростом x маємо асимптотичне наближення швидкості $\dot{x}$ до значення b/ν_1.

Таким чином, при $x_0>C/b$ відбувається стабілізація швидкості росту $\dot{x}$. Однак і при цих умовах величина x необмежено зростає.

Рішення рівняння (2.7.5) з перемінними, що розділяються, у принципі, не викликає утруднень. Однак, проте, для практичних цілей і тут більш придатний чисельний метод рішення, чим аналітичний. Це зв'язано з тим, що аналітичний метод дозволяє, відносно легко, одержати залежність t=t(x), але її звертання з метою знаходження залежності x=x(t) аналітично неможливо.

Графіки x=x(t), отримані чисельним методом для ряду значень x_0, приведені на рис. 2.7.4. Як і було сповіщено на основі розгляду фазового портрета, при $x_0>C/b$ спостерігається необмежений ріст значення x. Однак тепер величина x росте значно повільніше, ніж у попередньому випадку коли цей ріст був експонентним.

У випадку квадратичної залежності:

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 \qquad (2.7.6)$$

одержуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{bx - C}{\nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x^2} \qquad (2.7.7)$$

Відповідний фазовий портрет приведений на рис. 2.7.5. З нього видно, що для швидкості $\dot{x}$, після досягнення деякого максимального значення, маємо асимптотичне наближення до нуля. Однак і в цьому випадку спостерігається необмежений ріст x, хоча і з усе зменшуваною швидкістю. Результати чисельного інтегрування рівняння (2.7.7) (для ряду значень $x_0 > C/b$) графічно представлені на рис. 2.7.6.

Таким чином, ми бачимо, що ріст фондомісткості зі збільшенням x гальмує ріст x, але, проте, не може цілком зупинити його.

Самим надійним способом припинення зростання виробництва є збільшення позавиробничих відрахувань, наприклад, за рахунок збільшення податків. Досить, при постійних b і ν, збільшувати величину C більш швидко, чим росте x, наприклад, відповідно до формули:

$$C = C_0 + C_1 x^2 \qquad (2.7.8)$$

і рівняння (2) прийме вид:

$$\nu\frac{dx}{dt} = bx - C_1x^2 - C_0, \qquad (2.7.9)$$

дуже схожий на вид рівняння (2.2.1). Нагадаємо, що рівняння (2.2.1) описує динаміку популяції при наявності смертності, пропорційної обсягу популяції.

На рис. 2.7.7 зображений фазовий портрет рівняння (2.7.9). Параболічна фазова крива перетинає вісь $\dot{x} = 0$ у двох точках:

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4C_0C_1}}{2C_1} \qquad (2.7.10)$$

Ці точки відповідають станам рівноваги системи. Точці x_1 відповідає нестійкий стан рівноваги. Будь-яке відхилення від цієї точки надалі зростає. Точці x_2 відповідає стійкий стан рівноваги. При відхиленнях від цієї точки система прагне повернутися в колишній стан.

Результати чисельного інтегрування рівняння (2.7.9) зображені графічно на рис. 2.7.8. На цьому рисунку добре видна роль точок x_1 і x_2. При $x_0<x_1$ значення x з ростом часу убуває. При $x_0>x_1$ маємо асимптотичне наближення значення x до x_2 при усіх варіантах x_0. Крива, що починається зі значення $x_0>x_1$, найбільш близького до x_1, має характерний вид логістичної кривої Ферхюльста. Отже, до неї відноситься всі те, що було сказано в параграфі 2.2 про цю криву.

З ростом значень C_0 і C_1 можна домогтися ситуації, коли економічна система не буде мати жодного стійкого стану рівноваги. Оскільки це веде до катастрофічних наслідків для системи, те дане питання буде докладніше розглянутий нижче в так званій теорії катастроф.

2.8. Двохсекторна динамічна модель Леонтьева

Розглянемо тепер більш складну двохсекторну модель економіки. Нехай $x_1=x_1(t)$ і $x_2=x_2(t)$ – обсяги виробництва в двох взаємозалежних галузях економіки (наприклад, у промисловості і сільському господарстві), виражені в єдиному (грошовому) еквіваленті. Тоді модель типу «витрата-випуск» можна описати за допомогою наступних диференціальних рівнянь:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + C_1 \tag{2.8.1}$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + C_2$$

Тут a_{ij} (i,j=1,2) – коефіцієнти виробничої матриці. Величина a_{ij} показує, яке кількість і-й продукції витрачається на виробництво одиниці j-й продукції. Коефіцієнти ν_{ij} показують величини фондомісткості. Величини C_1, C_2 задають позавиробничі витрати.

У випадку постійних величин a_{ij}, ν_{ij} і C_i (i,j=1,2) рівняння (2.8.1) розв'язуються досить просто. Перетворимо їх до виду:

$$\nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 = -C_1 \tag{2.8.2}$$

$$\nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 = -C_2$$

Знайдемо спочатку стаціонарне рішення, тобто рішення, що відповідає постійним x_1 і x_2. У цьому випадку рівняння (2.8.2) приймають вид:

$$(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = C_1 \tag{2.8.3}$$

$$-a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = C_2$$

Звідси:

$$\hat{x}_1 = \frac{C_1(1-a_{22}) + C_2 a_{12}}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}; \quad \hat{x}_2 = \frac{C_1 a_{21} + C_2(1-a_{11})}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}} \tag{2.8.4}$$

Тепер знайдемо загальне рішення однорідної системи рівнянь:

$$\nu_{11}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{12}\frac{dx_2}{dt} + (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \tag{2.8.5}$$

$$\nu_{21}\frac{dx_1}{dt} + \nu_{22}\frac{dx_2}{dt} + a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 = 0$$

Це рішення має вид:

$$x_1^* = A_1 e^{kt}; \quad x_2^* = A_2 e^{kt} \tag{2.8.6}$$

Підставляючи (2.8.6) у (2.8.5) одержуємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(\nu_{11}k + a_{11} - 1)A_1 + (\nu_{12}k + a_{12})A_2 = 0 \tag{2.8.7}$$

$$(\nu_{21}k + a_{21})A_1 + (\nu_{22}k + a_{22} - 1)A_2 = 0$$

Дорівнюючи до нуля визначник системи:

$$(\nu_{11}k + a_{11} - 1)(\nu_{22}k + a_{22} - 1) - (\nu_{21}k + a_{21})(\nu_{12}k + a_{12}) = 0 \tag{2.8.8}$$

одержуємо характеристичне рівняння:

$$e_0 k^2 - e_1 k + e_2 = 0 \tag{2.8.9}$$

$$e_0 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21}; \quad e_1 = \nu_{11}(1-a_{22}) + \nu_{22}(1-a_{11}) + \nu_{12}a_{21} + \nu_{21}a_{12}$$

$$e_2 = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

Звідси:

$$k_{1,2} = \frac{e_1 \pm \sqrt{e_1^2 - 4e_0 e_2}}{2e_0} \tag{2.8.10}$$

Для кореня k_i (i=1,2) маємо, з першого рівняння (2.8.7) (друге, у силу рівності нулю визначника, еквівалентно першому), співвідношення для коефіцієнтів:

$$A_{2,i} = \alpha_i A_{1,i}; \quad \alpha_i = \frac{1 - a_{11} - \nu_{11}k_i}{\nu_{12}k_i + a_{12}} \quad (i = 1,2) \tag{2.8.11}$$

Остаточно, шукане загальне рішення однорідних рівнянь (2.8.5) буде:

$$x_1^* = A_{1,1}e^{k_1 t} + A_{1,2}e^{k_2 t}; \quad x_2^* = \alpha_1 A_{1,1}e^{k_1 t} + \alpha_2 A_{1,2}e^{k_2 t} \tag{2.8.12}$$

Загальне рішення вихідної неоднорідної системи рівнянь (2.8.2) виходить у виді суми:

$$x_1 = \hat{x}_1 + A_{1,1}e^{k_1 t} + A_{1,2}e^{k_2 t}; \quad x_2 = \hat{x}_2 + \alpha_1 A_{1,1}e^{k_1 t} + \alpha_2 A_{1,2}e^{k_2 t} \tag{2.8.13}$$

Для знаходження постійних інтегрування $A_{1,1}$ і $A_{1,2}$ скористаємося початковими умовами: при $t_0=0$ задані $x_1=x_{1,0}$ і $x_2=x_{2,0}$. Тоді:

$$x_{1,0} = \hat{x}_1 + A_{1,1} + A_{1,2}; \quad x_{2,0} = \hat{x}_2 + \alpha_1 A_{1,1} + \alpha_2 A_{1,2} \tag{2.8.14}$$

Звідси:

$$A_{1,1} = \frac{x_{2,0} - \hat{x}_2 - \alpha_2(x_{1,0} - \hat{x}_1)}{\alpha_1 - \alpha_2}; \quad A_{1,2} = \frac{x_{2,0} - \hat{x}_2 - \alpha_1(x_{1,0} - \hat{x}_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \tag{2.8.15}$$

Розглянемо деякі приклади обчислень по отриманих формулах.

Приклад 1. $a_{11}=0.9$, $a_{12}=0.9$, $a_{21}=0.9$, $a_{22}=0.9$, $\nu_{11}=0.1$, $\nu_{12}=1.5$, $\nu_{21}=1.5$, $\nu_{22}=0.1$, $C_1=-1$, $C_2=-1$. При цьому маємо: $k_1=-0.5$, $k_2=-0.7143$. Два негативних кореня показують, що з ростом часу буде: $x_1 \to \hat{x}_1$, $x_2 \to \hat{x}_2$. Однак виявляється, що при обраних значеннях параметрів позитивним значенням C_1 і C_2 відповідають негативні значення $\hat{x}_1$ і $\hat{x}_2$. Тому тут обрані негативні значення C_1 і C_2, що можна трактувати як необхідність дотувати збиткові галузі економіки (зовнішні інвестиції). Відповідний фазовий портрет зображений на рис. 2.8.1. Подібний вид особливої точки раніше не розглядався. Особлива точка, зображена на рис. 2.8.1, називається вузлом. Це стійкий вузол, оскільки при будь-яких початкових умовах система прагне наблизитися до нього.

Приклад 2. a_{11}=0.9, a_{12}=0, a_{21}=0, a_{22}=0.9, ν_{11}=0, ν_{12}=1, ν_{21}=1, ν_{22}=0, $З_1$=1, $З_2$=1. При цьому буде: k_1=0.1, k_2= –0.1. Відповідні фазові криві приведені на рис. 2.8.2. Тут положення рівноваги системи є вже знайомої нам особливою точкою типу сідло. Як відомо, така особлива точка відповідає нестійкому положенню рівноваги.

Приклад 3. a_{11}=0.5, a_{12}=0.05, a_{21}=0.05, a_{22}=0.5, ν_{11}=1, ν_{12}=0.03, ν_{21}=0.03, ν_{22}=1, $З_1$=1, $З_2$=1. При цьому: k_1=0.4369, k_2=0.5670. Відповідні фазові криві приведені на рис. 2.8.3. Тут особлива точка знову є вузлом, але вже нестійким, оскільки при будь-якім відхиленні від положення рівноваги система необмежено віддаляється від нього.

Розглянуті приклади показують, що при постійних значеннях коефіцієнтів і вільних членів рівнянь (2.8.2) економічна система може знаходитися в положенні рівноваги тільки в режимі зовнішніх інвестицій. Зрозуміло, розгляд прикладів не є строгим доказом, однак цей результат досить очевидний, якщо згадати, що й у випадку односекторної моделі при постійних коефіцієнтах і вільному члені стійкого стану рівноваги системи не було.

2.9. Варіанти двохсекторної моделі

Перепишемо рівняння (2.8.2) у формі:

$$\nu_{11}\frac{dx_1}{dt}+\nu_{12}\frac{dx_2}{dt}=(1-a_{11})x_1-a_{12}x_2-C_1 \qquad (2.9.1)$$

$$\nu_{21}\frac{dx_1}{dt}+\nu_{22}\frac{dx_2}{dt}=-a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2-C_2$$

Підберемо значення вхідних у рівняння величин так, щоб досягти результатів, аналогічних отриманим для рівнянь Вольтерра́. Приймемо, для спрощення, що $\nu_{12}=0$, $\nu_{21}=0$. Нехай також буде $\nu_{11}=1$, $\nu_{22}=1$, $C_1=0$, $C_2=0$. При цьому рівняння (2.9.1) наближаються за формою до рівнянь Вольтерра́. Нехай перша галузь відіграє роль «хижака», а друга – «жертви». Це цілком реальна ситуація, коли «жертва» – це наприклад, сировинна галузь чи сільське господарство, тобто галузь, що володіє здатністю до саморозвитку за рахунок природних ресурсів, а «хижак», наприклад, важка чи оборонна промисловість, змушена розвиватися за рахунок перекачування ресурсів із іншої галузі.

Покладемо $a_{11}>1$. Це означає, що обсяг засобів, затрачуваних на відтворення в першій галузі, більше, ніж виробляє ця галузь. У підсумку величина $b_{11}=1-a_{11}<0$ грає, для першої галузі, роль коефіцієнта смертності. Покладемо також $a_{12}=-b_{12}x_1$ ($b_{12}>0$). Це означає, що перша галузь не вкладає кошти в другу, а навпаки, забирає їх і тем більше, ніж обсяг виробництва в першій галузі. Можливий також варіант, коли якісь вкладення з першої галузі в другу існують, але зворотні вкладення більш значні.

В другому рівнянні (2.9.1) покладемо $a_{22}<1$; отже, $b_{22}=1-a_{22}>0$. Це означає, що друга галузь самоокупна і створює надлишкові засоби, які можна направити, наприклад, у першу галузь. Будемо також вважати, що $a_{21}=b_{21}x_2$ ($b_{21}>0$). Це означає, що обсяг вкладень із другої галузі в першу росте зі збільшенням x_2.

У підсумку одержуємо рівняння виду:

$$\frac{dx_1}{dt}=(b_{12}x_2-b_{11})x_1 \tag{2.9.2}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=(b_{22}-b_{21}x_1)x_2$$

Ці рівняння мають у точності такий же вид, як рівняння (2.3.2), тому і результати, у цьому випадку, будуть, природно, такими ж. Мається стійкий стан рівноваги: $\hat{x}_1 = b_{22} / b_{21}; \hat{x}_2 = b_{11} / b_{12}$; при невеликих відхиленнях від цього стану система залишається в його околі.

Зрозуміло, справедливі, у цьому випадку, і інші результати, отримані для системи «хижак-жертва». Розглянемо, додатково, не вивчений раніше випадок. Запишемо, замість (2.9.2), рівняння:

$$\frac{dx_1}{dt} = (b_{12}x_2 - b_{11})x_1 \qquad (2.9.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (b_{22} - b_{21}x_1)x_2 - C_2,$$

тобто уведемо для «жертв» ще і фіксований податок. Результати чисельного експерименту показують, що в цьому випадку система втрачає стійкість і, з часом, та галузь, що забезпечувала всю економічну систему, розоряється, починаючи давати негативний «доход» (рис. 2.9.1).

Зрозуміло, для рівнянь (2.9.1) можлива дуже велика розмаїтість співвідношень коефіцієнтів і, як наслідок, існує дуже багато варіантів поводження двохсекторних економічних систем. Однак для досить повного дослідження всіх можливих варіантів метод сліпого підбора малопридатний. Тут найбільше підходять методи асимптотичного аналізу, що частково будуть висвітлені нижче.

2.10. Деякі математичні моделі соціальних процесів

На закінчення даного розділу розглянемо деякі питання соціології, що також можуть бути розглянуті за допомогою нескладних математичних моделей з використанням диференціальних рівнянь. У першу чергу це стосується задачі соціалізації, тобто засвоєння суспільством деяких нових ідей. Однієї з проблем соціалізації суспільства є проблема прогнозування чи керування динамічними процесами, зв'язаними зі зміною кількості людей, що засвоїла ті чи інші нові ідеї, точки зору, навички, погляди на життя.

Тут можуть бути корисні аналогії з досить добре вивченими в екології процесами динаміки популяції. Розглянемо деякі приклади.

1. Замкнуте суспільство.

Нехай у суспільстві з'явилося якесь відносно невелике по обсягу співтовариство людей, що сприйняли деяку нову ідею. Вплив ззовні у виді додаткової інформації, агітації і т.д. відсутній, тому подальше поширення цієї ідеї залежить тільки від впливу людей, що вже сприйняли її на інших членів суспільства. Припустимо, що x носіїв ідеї «заражають» нею в одиницю часу (день, місяць, рік) кількість людей, пропорційну x. Позначаючи коефіцієнт пропорційності через α одержуємо, що ця кількість дорівнює αx. Вважаючи, що кількість громадян даного суспільства досить велика, приймемо, що ця кількість, а також його частина x змінюються безперервно (а не дискретно, як насправді). Тоді зміну величини x можна описати за допомогою диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \qquad (2.10.1)$$

де t – час. Рішення цього рівняння має вид:

$$x = x_0 e^{\alpha t} \qquad (2.10.2)$$

Тут x_0 – початкова кількість членів досліджуваного співтовариства. Вивчимо докладніше залежність (2.10.2). Звернемо увагу на те, що рівняння (2.10.1) та його рішення (2.10.2) фактично співпадають з рівнянням (2.1.1) та його рішенням (2.1.2), яке графічно відображено на рис. 2.1.1. Отже, і висновки, які були зроблені у параграфі 2.1 щодо динаміки популяції, будуть дійсними у даному разі щодо росту прихильників якоїсь ідеї. Головним з цих висновків є той, що за рівні проміжки часу обсяг цікавлячого нас співтовариства буде змінюватися в однакову кількість разів k. Це залежність типу ланцюгової реакції. Вона описує досить короткочасний перехідної процес, оскільки за відносно великий проміжок часу обсяг x виросте настільки, що всі члени суспільства, які у принципі піддаються впливу, будуть охоплені їм, і подальший ріст природним образом припиниться. Отже, ми бачимо, що при сприятливих умовах – відсутності протидії, привабливості нової ідеї – вона поширюється дуже швидко природним шляхом без застосування яких-небудь спеціальних мір.

У випадку негативного значення коефіцієнта пропорційності α буде спостерігатися вже не ріст, а зменшення кількості x (рис. 2.2.1).Таке положення може спостерігатися, коли вплив членів даного співтовариства на інших громадян менше, ніж зворотний вплив. Це може бути зв'язано або з непривабливістю ідеї, або з протидією її поширенню.

У будь-якому випадку найбільш важливою величиною, що підлягає експериментальному дослідженню, є коефіцієнт пропорційності α . Цей коефіцієнт може бути знайдений, наприклад, при рішенні зворотної задачі. Якщо на якомусь проміжку часу залежності між x і t подібні зображеними на рис. 2.1.1 чи 2.2.1, то нескладно визначити величину α за допомогою методу найменших квадратів. Після цього можна прогнозувати подальшу зміну x(t) з використанням формули (2.10.2).

Розглянемо тепер більш складні випадки. Вище були вивчені тільки випадки необмеженого росту чи необмеженого зменшення обсягу досліджуваного співтовариства x. Об'єднаємо ці два випадки в один таким же чином, як при вивченні динаміки популяції з урахуванням смертності. З цією метою візьмемо коефіцієнт α рівним:

$$\alpha = m - nx \tag{2.10.4}$$

Позитивна величина m відповідає за ріст x, а негативна величина –nx відповідає за зменшення x. Тут як би борються дві тенденції – до зменшення і до збільшення x, причому при малих x переважає тенденція до збільшення, а при великих – до зменшення (рис. 3). При $x=m/n$ буде $\alpha=0$, тобто обидві тенденції врівноважуються.

Подібну будову коефіцієнта α можна пояснити в такий спосіб. Нова принаблива ідея, з'являючись у суспільстві, спочатку завойовує своїх прихильників практично без перешкод, у результаті чого число цих прихильників росте по експонентному законі (формула (2.10.2)). Однак з ростом кількості прихильників ідеї росте опір її подальшому поширенню. Тут може бути і прямий опір членів суспільства, ворожих даній ідеї, і попросту вичерпання найбільш придатних для сприйняття ідеї людей, у зв'язку з чим залучення нових, уже менш придатних, людей наштовхується на додаткові труднощі.

Тепер диференціальне рівняння, що описує динаміку *x*, має вид:

$$\frac{dx}{dt} = (m - nx)x \tag{2.10.5}$$

Рішення цього рівняння буде:

$$x = \frac{m}{n + \left(\frac{m}{x_0} - n\right)e^{-mt}}, \tag{2.10.6}$$

де x_0 – як і раніше початкове значення *x*.

Відповідні криві будуть такими ж, як на рис. 2.2.3 з заміною об'єму популяції на кількість людей x. При $x_0<m/n$ спостерігається ріст, а при $x_0>m/n$

– убування x. В усіх випадках значення x має асимптотичне наближення до значення m/n.

Як вказувалось раніш, S-образні криві, зображені на рис. 2.2.3, уперше досліджував Ферхюльст, у зв'язку з чим їх називають логістичними кривими Ферхюльста.

Власне, S-образною є тільки сама нижня з кривих, зображених на рис. 2.2.3. Розглянемо її докладніше. При малих значеннях x_0 коефіцієнт пропорційності α приблизно дорівнює постійному значенню m. Це забезпечує експонентний ріст обсягу досліджуваного співтовариства (ділянка 1 на рис. 2.2.3). Ця ділянка характерна максимально сприятливими умовами для поширення даної ідеї при практично відсутній протидії. З ростом x стає помітною протидія. Але завдяки зрослій кількості її носіїв приріст нових членів співтовариства усе ще досить швидкий; більш того, швидкість росту досягає максимального значення. З подальшим ростом x, завдяки вичерпанню ресурсів придатних для залучення в співтовариство членів чи росту протидії, або іншої комбінації несприятливих факторів, швидкість збільшення x зменшується, прагнучи до нуля. Величина x стабілізується поблизу значення m/n.

S-образні криві дуже характерні для динаміки зміни кількості x людей, що сприймають ту чи іншу нову ідею в замкнутому суспільстві, у якому відсутній сторонній вплив і поширення ідеї викликається тільки взаємоспілкуванням між собою членів суспільства.

2. Облік зовнішнього впливу.

Нехай деяка нова ідея впроваджується в дане суспільство не тільки за рахунок зусиль деякої його частини, що вже сприйняла цю ідею, але і за рахунок якогось зовнішнього впливу, що може бути виражене у виді пропаганди деяких цінностей, демонстрації якихось привабливих зразків і т.п. Будемо вважати, що такий зовнішній вплив забезпечує постійну швидкість приросту прихильників нової ідеї. Будемо також вважати, що на першому етапі впливу природна реакція суспільства до впровадження нової ідеї негативна, тобто спостерігається протидія. Цей варіант цікавий для вивчення в першу чергу, оскільки при позитивній реакції поширення нової ідеї відбувається досить швидко і без зовнішнього впливу, як показано вище.

Позначаючи постійну швидкість приросту кількості людей, що сприйняли нові цінності, через v, і вважаючи коефіцієнт пропорційності, що відбиває самогенерацію ідеї, негативним, одержуємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = v - \alpha x \tag{2.10.7}$$

Його рішення буде:

$$x = \frac{v}{\alpha} - \left(\frac{v}{\alpha} - x_0\right)e^{-\alpha t} \tag{2.10.8}$$

Відповідний графік приведений на рис. 2.10.2. Ми бачимо, що кількість людей, привернутих до нової ідеї, прагне до постійної величини v/α, пропорційній величині впливу v.

Однак можлива ситуація, коли, після закінчення деякого періоду часу, зовнішній вплив припиняється. Тоді величина x, досягши деякого значення, що може бути і досить великим, починає убувати за законом експоненти, наближаючи до нуля (рис. 2.10.3). Така ситуація особливо характерна для періодів під час і після передвиборних компаній.

Об'єднаємо також ситуацію, коли існує природний рівноважний стан, перехід до якого зображений графічно на рис. 2.10.2, і зовнішній вплив. Тоді диференціальне рівняння, що відбиває зміну x, приймає вид:

$$\frac{dx}{dt} = v + (m - nx)x \tag{2.10.9}$$

Розглянемо рішення цього рівняння для випадку, коли до деякого моменту часу зберігається зовнішній вплив, а потім воно зникає. Відповідні результати приведені графічно на рис. 2.10.4. Різниця в порівнянні з результатами, приведеними на рис. 2.10.3, полягає в тім, що тепер зовнішній вплив приводить до асимптотичного значення:

$$x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4nv}}{2n}, \tag{2.10.10}$$

а після його зникнення величина x зменшується не до нуля, а до природного рівноважного значення:

$$x_1 = \frac{m}{n} \qquad (2.10.11)$$

Розглянемо також випадок «негативного» впливу, тобто випадок $v<0$. Це випадок, коли зовнішній вплив руйнує якісь колишні цінності. Тут можливі наступні два варіанти.

У першому з них величина v невелика по модулю і формула (2.10.10) дає (при негативному v) позитивне значення x_2. Це значення буде меншим, чим x_1, тобто «негативне» вплив приведе до зменшення рівноважного обсягу того співтовариства, ідеї якого руйнуються, але не приведе до повного зникнення цього співтовариства.

В другому випадку, при досить великому по модулю значенні v:

$$v < -\frac{m^2}{4n} \qquad (2.10.12)$$

система втрачає природний рівноважний стан і її обсяг може тільки убувати. Це стан катастрофи, що завершується при досягненні нульового значення x (рис. 2.10.5) Однак, по-перше, слово катастрофа застосовано тут лише в математичному змісті. Для суспільства в цілому зникнення якоїсь групи людей, що сповідають визначені цінності, може бути і благом. Крім того, зникнення тут не означає загибель цих людей, а тільки те, що вони

припиняють наслідування якимось ідеям.

З іншого боку, якщо з'ясовується, що зникнення подібних людей для суспільства небажано, те досить вчасно припинити вплив факторів, що руйнують, як спрацюють внутрішні механізми даної групи і її стан самовідновиться (рис. 2.10.6). Звідси можна зробити природний висновок, що найбільш ефективно впровадження якихось нових ідей відбувається в тих випадках, коли вони знаходять позитивний внутрішній відгук хоча б у якоїсь частини суспільства. У цих випадках не потрібно додаткових зовнішніх впливів на підтримку стабільної кількості прихильників таких ідей. У тих же випадках, коли суспільство пручається стороннім впливам, потрібно постійний вплив, що компенсує цей опір.

3. Взаємодія двох угруповань.

Розглянемо досить типову ситуацію боротьби ідей двох взаємодіючих угруповань. Типовим прикладом є, наприклад, боротьба прихильників західних і традиційних цінностей, що ведеться, зі змінним успіхом, уже не одне сторіччя.

Нехай величина x позначає кількість прихильників нової ідеї, а величина y – кількість її супротивників. Будемо вважати, що ріст величини x обумовлений природними причинами, а її зменшення – опором супротивників. Тоді коефіцієнт росту для величини x можна представити у виді:

$$\alpha_x = m_x - n_x y \tag{2.10.13}$$

Відбито те, що опір росту x зростає зі збільшенням кількості супротивників y.

Навпаки, для другого угруповання характерно природне убування при відсутності ворогів і ріст при зростанні кількості ворогів. Тому коефіцієнт росту для величини y представимо у виді:

$$\alpha_y = m_y x - n_y \tag{2.10.14}$$

Система диференціальних рівнянь, що відбиває спільну еволюцію двох угруповань, у підсумку приймає вид:

$$\frac{dx}{dt} = (m_x - n_x y)x \tag{2.10.15}$$

$$\frac{dy}{dt} = (m_y x - n_y)y$$

Ми вже застосовували подібні рівняння при розгляді екологічних задач для опису взаємодії популяцій хижаків і жертв. У даному випадку роль жертв грають прихильники нової ідеї, а роль хижаків – її супротивники.

Нагадаємо, що взаємодія хижаків та жертв відбувається циклічним образом. Безумовно, такі циклічні процеси мають місце й у соціології (згадаємо тих же слов'янофілів і західників).

Можливо і багато інших моделей взаємодії двох угруповань між собою. Для їх будування необхідно використовувати відповідні експериментальні дані.

Розглянуті застосування математичних моделей до вивчення соціологічних задач дозволяють зробити висновки про перспективність математичних методів у соціології. При цьому потрібно особливо обмовити наступне. Традиційно в соціології з математики застосовуються, в основному, методи обробки експериментальних даних. Не применшуючи достоїнств цих методів відзначимо їхню явну недостатність, особливо при якісному аналізі тих чи інших ситуацій.

Методи, засновані на використанні диференціальних рівнянь, мають два очевидні достоїнства. По-перше, у тих випадках, коли можлива ідентифікація параметрів рівнянь, вони дозволяють робити якісь прогнози чи рекомендувати методи керування ситуаціями.

По-друге, навіть у тих випадках, коли одержання кількісних результатів з якихось причин важко (наприклад, через труднощі одержання відповідного експериментального матеріалу), використання диференціальних рівнянь дозволяє робити якісний аналіз різних ситуацій, що в ряді випадків може мати цінність не меншу, чим конкретні кількісні результати.

Висновки

Розглянута низка задач показує перспективність застосування апарату диференціальних рівнянь до вивчення багатьох процесів, далеких від тих, для яких диференціальні рівняння використовувались традиційно. Відповідні математичні труднощі, пов'язані з рішенням диференціальних рівнянь, досить легко розв'язуються за допомогою комп'ютера та деяких методів, які будуть розглянуті далі.

Диференціальні рівняння допомагають створювати досить ефективні математичні моделі, які дозволяють прогнозувати поведінку тих чи інших систем будь-якої природи.

Але обов'язково треба накреслити наступне. Будь-яка модель, у тому числі та, що використовує найсучаснішу математику та обчислювальну техніку, має обмежене коло застосувань. Сила моделі виявляється тоді, коли користувач розуміє її обмеженість і грамотно підбирає параметри моделі.

У той же час існує тенденція фетишизація математичних моделей та комп'ютерів. Це може привести і насправді приводить до бездумного використання їх у непридатних для них умовах і одержання безумовно невірних результатів. Тому на першому місті при використання моделей виступає людина, яка відповідає за достовірність моделі і розуміє коло її застосування. Інакше модель дасть більше шкоди чим користі.