Практичне заняття № 2. Диференціальні моделі динамічних систем

Задача 1. Посудина об'ємом 20л містить повітря (80% азоту, 20% кисню). У посудину надходить 0,1л азоту за секунду, який неперервно змішується з повітрям. З посудини за цей час виходить така ж кількість суміші. Через скільки часу у посудині буде 99% азоту?

Розв'язання. Нехай $y(t)$ – кількість азоту у посудині. За час Δt зміна кількості азоту дорівнює:

$$\Delta y = 0,1 \cdot \Delta t - \frac{y}{20} \cdot 0,1 \cdot \Delta t = \left(0,1 - 0,005 y\right) \cdot \Delta t,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 0,1 - 0,005 y.$$

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, отримуємо:

$$\frac{dy}{dt} = 0,1 - 0,005 y.$$

Початкова умова: $y(0) = 0,8 \cdot 20 = 16$л.

Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{0,1-0,005y}=dt, \frac{1000dy}{100-5y}=dt,$$
$$-200\cdot\ln|100-5y|=t+C.$$

Сталу інтегрування С знаходимо з початкової умови:

$$-200\cdot\ln|100-5\cdot16|=C\Rightarrow C=-200\ln 20.$$

Підставивши знайдене значення сталої інтегрування у загальний інтеграл рівняння, отримуємо:

$$\ln|100-5y|=\ln 20-\frac{t}{200}.$$

Нехай T – час, через який у посудині буде 99% азоту, тобто 20×0,99=19,8л азоту. Отримуємо рівність:

$$\ln|100-5\cdot19,8|=\ln 1=0=\ln 20-\frac{T}{200}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow T=200\ln 20\approx 599\,\text{с}.$$

Задача 2. У приміщенні місткістю 10 800м^3 вміст вуглекислого газу у повітрі після закінчення роботи склав 0,12%. Вважаючи, що концентрація вуглекислого газу у всіх частинах приміщення у кожен момент часу однакова, визначити, скільки м^3 свіжого повітря, що містить 0,04% вуглекислого газу потрібно подавати у це приміщення щохвилинно, щоб через 10 хв вміст вуглекислого газу у ньому склав 0,06%?

Відповідь: 1500м^3.

Задача 3. Тіло охолоджується за 10 хв від $100^\circ C$ до $60^\circ C$. Температура навколишнього повітря підтримується на рівні $20^\circ C$.Вважаючи, що швидкість зміни температури пропорційна різниці температур тіла та зовнішнього середовища (закон Ньютона), визначити час, за який тіло охолоне до $25^\circ C$?

Розв'язання. Нехай $x(t)$ – температура тіла у момент часу t. Маємо:

$$\frac{dx}{dt} = k(x-20) \Rightarrow \frac{dx}{x-20} = kdt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|x-20| = kt + C \Rightarrow x = 20 + Ae^{kt}.$$

Для знаходження сталої інтегрування *A* використаємо початкову умову *x(0) = 100*. Звідси отримуємо, що *A = 80*. Отже, залежність температури тіла від часу має вигляд: $x(t) = 20 + 80e^{kt}$. Визначимо значення коефіцієнту *k*.

$$x(10) = 20 + 80e^{20k} = 60 \Rightarrow e^{20k} = 0,5 \Rightarrow k = -0,05\ln 2,$$
$$x(t) = 20 + 80e^{-0,05\ln 2\cdot t} = 20 + 80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0,05t}.$$

Враховуючи, що $x\left(T\right)=25$, знаходимо:

$$80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0,05T}=5\Rightarrow T=80 \text{ (хв).}$$

Задача 4. Кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна кількості цієї речовини. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через скільки часу залишиться 1% від її початкової кількості?

Розв'язання. Нехай $x\left(t\right)$ – кількість радіоактивної речовини у момент часу t. Отримуємо математичну модель процесу її розпаду у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt}=-kx,\ k>0.$$

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ кількість речовини становила x_0, тобто початкова умова має вигляд: $x(0)=x_0$.

Поділивши змінні у диференціальному рівнянні після інтегрування отримуємо:

$$x\left(t\right)=x_0e^{-kt}.$$

Знайдемо коефіцієнт пропорційності k з умови

$$x(30)=x_0e^{-30k}=0,5x_0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-30k}=0,5\Rightarrow k=\frac{\ln 2}{30}.$$

Отже, залежність кількості радіоактивної речовини від часу має вигляд:

$$x(t)=x_0e^{-\frac{\ln 2\cdot t}{30}}=x_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/\ 30}.$$

Нехай T – час, за який залишиться 1%, тобто $0,01x_0$ всієї речовини. Отримуємо:

$$x_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T}{30}}=0,01x_0\Rightarrow T=30\log_{\frac{1}{2}}0,01=$$
$$=30\cdot 2\log_2 10=\frac{60}{\lg 2}\approx 199\,(\text{днів}).$$

Задача 5. Швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості. На протязі року з кожного граму радію розпадається 0,44мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

Відповідь: 1575 років.

Задача 6. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який є пропорційним швидкості човна.

Початкова швидкість човна 1,5 м/с. Через 4с швидкість човна становить 1м/с. Через який час швидкість човна становитиме 0,01 м/с?

Відповідь: $T = 4 + \dfrac{8}{\lg 3 - \lg 2}$ с.

Задача 7. Знайти залежність тиску повітря p від висоти H, якщо відомо, що на рівні моря ($H = 0$) цей тиск дорівнює 98,1кПа, а на висоті 0,5км – 90,2кПа. Визначити величину повітряного тиску на висоті 11км.

Розв'язання. Виділимо елементарний об'єм повітря у вигляді призми з одиничною основою та висотою dH, розташованою на висоті H. Позначимо δ питому вагу повітря. Тоді зміна атмосферного тиску при переході з висоти H до висоти $H+dH$ становить:

$$dp = -\delta \cdot dH .$$

Згідно з законом Бойля Маріотта щільність, і, відповідно, питома вага повітря пропорційна тиску, тобто $\delta = kp$. Тоді отримуємо диференціальне рівняння:

$$dp = -kpdH .$$

Поділимо змінні та інтегруємо це рівняння. Знаходимо:

$$p = Ce^{-kH}.$$

Для знаходження сталої інтегрування використаємо початкову умову $p(0) = 98,1$. Звідси знаходимо $C = 98,1$. Вираз для тиску набуває вигляду: $p = 98,1e^{-kH}$. Для визначення коефіцієнту k використаємо умову p(0,5) = 90,2. Звідси знаходимо, що $k = \dfrac{\ln 98,1 - \ln 90,2}{0,5} \approx 0,1679$. Отже, залежність тиску повітря від висоти має вигляд:

$$p = 98,1e^{-0,1679H}.$$

При $H = 11$ км величина тиску становитиме $p =$ 15,47 кПа.

Задача 8. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 400\, м/с$, пробиває стіну товщиною $h = 20$ см та вилітає, маючи швидкість 100 м/с. Вважаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху кулі, знайти час проходження кулі через стіну.

Відповідь: $\approx 0,0011$ с.

Задача 9. На дні циліндричного резервуару, заповненого рідиною, утворилася щілина. За першу добу витекло 10% вмісту резервуару. Вважаючи швидкість витікання рідини пропорційною висоті її рівня у резервуарі, визначити, за який час з нього витече половина рідини.

Відповідь: $\dfrac{\ln 2}{\ln 10 - \ln 9} \approx 6$ діб 14 год.