**Побудова евклідової геометрії на базі системи аксіом Гільберта.**

**а) Огляд системи аксіом Гільберта евклідової геометрії.**

Аксіоматичне обґрунтування геометрії вперше було дано Гільбертом в 1899 р. після того, як була відкрита неевклідова геометрія. Невдовзі після цього з’явилися системи аксіом Пеано. Кагана, Шура та ін. Система аксіом Гільберта складається з 20 аксіом, які розбиті на п’ять груп.

В першій групі містяться вісім *аксіом належності (інцидентності)*. Вони описують властивості основних об’єктів – *точок, прямих, площин*, пов’язаних основним відношенням – *відношенням інцидентності*. З аксіом 1.7.-1.8. випливає, що розмірність простору дорівнює трьом.

Друга група аксіом містить чотири *аксіоми порядку.* Основне відношення – *лежати між* – формулюється для трьох точок, інцидентних одній прямій.

Аксіоми третьої групи називаються *аксіомами конгруентності*. Вони описують властивості основного відношення цієї групи – *відношення конгруентності*. Воно задається на множинах відрізків та кутів.

Четверта група аксіом називається групою *аксіом неперервності*. В ній немає основного відношення. Дві аксіоми цієї групи описують властивості неперервності розташування точок на прямій (взаємно однозначна відповідність між множиною точок прямої і множиною дійсних чисел) і є базою для введення понять довжини відрізка та величини кута. Обидві ці аксіоми можна замінити одним твердженням – аксіомою Дедекінда (**Додаток Б**).

П’ята група складається з однієї аксіоми – *аксіоми паралельності.* Ця аксіома відіграє ключову роль в побудові саме евклідової геометрії, без неї неможливо довести такі важливі теореми: сума кутів будь-якого трикутника дорівнює ; навколо кожного трикутника можна описати коло; вписаний в коло кут, що спирається на його діаметр, є прямим; в будь-якому прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів та ін..

**б) Наслідки з аксіом перших трьох груп.**

**Зауваження.** Прослідкуємо лише за побудовою аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Її система аксіом включає аксіоми 1.1-1.3 системи Гільберта та всі аксіоми інших груп цієї системи.

Послідовність введення означень понять і доведення теорем про властивості цих понять можна прослідкувати в Додатку Г. Зокрема, після формулювання аксіом перших трьох груп можна дати означення відрізка, кута, трикутника. Серед наслідків з аксіом перших трьох груп особливу роль відіграє теорема про зовнішній кут трикутника. Наведемо її з доведенням, а наслідки з неї можна знайти в практичних заняттях.

**Теорема 30.** Зовнішнійкут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним**.**

***Доведення****.* Розглянемо трикутник . За теоремою 23 існує єдина точка  така, що . На промені  існує єдина точка  така, що (аксіома 3.1). Проведемо відрізок . Далі розглянемо трикутники  та , які за теоремою 14 будуть рівні, отже . Розглянемо дві півплощини  та  відносно прямої . Оскільки за побудовою відрізок  перетинається з  в точці , то за теоремою 10 точки  і  лежать в різних півплощинах. Також, з того, що  перетинається з  в точці , випливає, що точки  і  лежать різних півплощинах відносно прямої . Отже, точки  і  лежать в одній півплощині. Тоді промінь  є внутрішнім променем кута , звідки . Аналогічно доводиться, що .

**в) Обґрунтування теорії вимірювання відрізків за допомогою аксіом четвертої групи. Поняття абсолютної геометрії.**

Дотепер ми порівнювали відрізки або кути за допомогою неозначуваного поняття третьої групи «конгруентність». Для введення поняття довжини відрізка аксіом перших трьох груп недостатньо. Аксіоми Архімеда і Кантора системи Гільберта дозволяють обґрунтувати теорію вимірювання відрізків і кутів. В системі аксіом Погорєлова евклідового простору (**додаток В**) в четвертій групі є лише одна аксіома – Дедекінда. Виявляється, що аксіома Дедекінда еквівалентна сукупності аксіом Архімеда і Кантора. Доведення відповідних теорем можна знайти, наприклад, в книзі [8].

Задача вимірювання довжин відрізків полягає в тому, щоб задати відношення будь-якого відрізка до деякого фіксованого відрізка дійсним числом. Цей фіксований відрізок називають *лінійною одиницею* (або одиницею вимірювання довжин).

**Означення.** Нехай задана відповідність, при якій кожному відрізку зіставляється певне додатне число так, що:

1. конгруентним відрізкам відповідають рівні числа;
2. якщо *В* – внутрішня точка відрізка *АC* та відрізку *AB* відповідає число *а*, а відрізку *ВС* відповідає число *b*, то відрізку *AC* буде відповідати число *a+b*;
3. існує відрізок, якому відповідає число 1.

Тоді число, що відповідає відрізку, називається його *довжиною*.

Таке означення вимагає доведення його коректності. В аксіоматичній теорії за Гільбертом, викладеній в книзі [8] це зроблено наступним чином. Спочатку із припущення існування такої відповідності доводиться, що вона єдина, тобто доводиться

**Теорема**. Якщо вказана в означенні відповідність існує та задовольняє умовам 1, 2, 3, то вона єдина.

Далі доводиться

**Теорема.** Вказана у визначенні відповідність існує та задовольняє умовам 1, 2 та 3.

Важливим моментом в доведенні останньої теореми є використання аксіоми Архімеда. Фактично доведення є певною мірою конструктивним, оскільки містить описання процесу, який дозволяє для обраного відрізка знаходити відповідне йому додатне дійсне число.

Але відомий в евклідовій геометрії факт, що довжини всіх відрізків вичерпують всі додатні дійсні числа, не випливає з аксіом перших трьох груп і аксіоми Архімеда. Тому далі доводиться

**Теорема.** Для будь-якого дійсного числа  існує відрізок, довжина якого дорівнює .

При доведенні цієї теореми використовується друга з аксіом неперервності – аксіома Кантора.

Аналогічні міркування потрібні для введення поняття величини кута. Якщо одиницю вимірювання кутів вибрати так, щоб прямому куту відповідало число , то між множиною всіх кутів і множиною всіх дійсних чисел з інтервалу  встановлюється взаємно однозначна відповідність. Прийнято одиницю вимірювання кутів вибирати так, щоб прямому куту відповідало дійсне число .

Після обґрунтування процесу вимірювання відрізків і кутів з’являється можливість користуватись в геометрії алгеброю. Зокрема, можна ввести систему координат на прямій, на площині, в просторі. А введення координат на прямій, в свою чергу, дозволяє сформулювати наступну важливу теорему.

**Теорема.** Між впорядкованою множиною всіх точок прямої і впорядкованою множиною всіх дійсних чисел існує така взаємно однозначна відповідність, при якій відповідні елементи знаходяться у відповідних відношеннях порядку.

**Зауваження.** Вказана властивість прямої називається *неперервністю.* Також ця теорема показує ізоморфізм двох моделей однієї математичної структури, яку називають *лінійним порядком.*

*Абсолютною геометрією* називається аксіоматична теорія, побудована на перших чотирьох групах аксіом Гільберта.

Прикладами теорем абсолютної геометрії є всі теореми з номерами 1– 46 аксіоматичної теорії, викладеної в книзі [8] (див. також **Додаток Г**). Наведемо ще список важливих теорем абсолютної геометрії, які були доведені в роботах Саккері, Лежандра, Ламберта в ході їх досліджень, пов’язаних з проблемою п’ятого постулату.

**Теорема.** Сума всіх внутрішніх кутів довільного трикутника не перевищує .

**Теорема.** Якщо сума кутів хоча б одного трикутника дорівнює двом прямим кутам, то сума кутів будь-якого трикутника дорівнює двом прямим кутам.

**Теорема.** Якщо в даному трикутника сума всіх внутрішніх кутів дорівнює  і цей трикутник ділиться трансверсаллю на два трикутники, то сума внутрішніх кутів кожного з цих трикутників теж дорівнює .

**Теорема.** Якщо існує трикутник, в якому сума всіх внутрішніх кутів не перевищує , то і в будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів не перевищує .

**г) Сутність проблеми 5 постулату Евкліда. Еквівалентність аксіоми паралельності та п’ятого постулату Евкліда. Інші еквіваленти п’ятого постулату.**

**5 п.** Якщо при перетині двох прямих третьою сума двох внутрішніх односторонніх кутів менша за , то ці прямі перетинаються з тієї сторони, з якої ця сума менша за .

**5 п.** **V.** Якщо має місце 5 постулат Евкліда, то через кожну точку, яка не належить довільно заданій прямій, проходить не більше однієї прямої, що не перетинає дану пряму.

Доведення. Нехай  - дана пряма,  і , 



1).За теоремою 44 існує пряма , яка паралельна прямій .

2) Доведемо, що будь-яка інша пряма  не може бути паралельною прямій .

3) Нехай півпрямі прямої  утворюють з перпендикуляром  суміжні кути  та . Оскільки , то має місце одна з нерівностей  або . Пари кутів  і ,  і  є внутрішніми односторонніми при перетині прямих  та  прямою . Ми довели, що одна із сум  і  менша за .

4) За умовою має місце 5 постулат Евкліда. Отже, прямі  та  перетинаються в тій півплощині відносно прямої , яка містить внутрішні односторонні кути з меншою за  сумою.

Ми довели, що пряма  єдина, тобто має місце аксіома паралельності V.

**V**  **5 п.** Якщо через кожну точку, що не належить довільно заданій прямій, проходить рівно одна пряма, паралельна даній, то має місце 5 постулат Евкліда.

Доведення. Нехай  - дана пряма, .

1) За умовою через точку  проходить лише одна пряма, паралельна , позначимо її . Отже, будь-яка пряма  перетинає пряму .

2) Нехай півпрямі прямої  утворюють з довільною півпрямою ,  кути  та , причому нехай для визначеності . Тоді одна з півпрямих прямої  є внутрішньою півпрямою кута .

3) Позначимо символом  кут між цією півпрямою та півпрямою , а рівний йому навхрест лежачий кут при перетині прямих  та  прямою  – символом . Тоді .

4) Нехай пряма  перетинає пряму  в півплощині, яка містить кут  і  – точка перетину. Тоді для трикутника  кут  є внутрішнім, а кут  – несуміжним із ним зовнішнім кутом. Оскільки , то маємо протиріччя із теоремою про зовнішній кут трикутника.

Отже, пряма  перетинає пряму  в півплощині, яка містить кути  та , що і доводить справедливість 5 постулату Евкліда.

Наведемо список еквівалентів 5 постулату Евкліда в тій послідовності, в якій їх зручно доводити, посилаючись на попередні.

П.1. Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої в одній площині, обов’язково перетинаються (твердження Лежандра).

П.2. Два серединних перпендикуляри до сторін трикутника завжди перетинаються.

П.3. Навколо кожного трикутника можна описати коло (твердження Ф. Бойяї).

П.4. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює .

П.5. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника одна і та сама.

П.6. Існують два подібних і не конгруентних трикутники.

П.7. Існують принаймні один прямокутник і один квадрат.

П.8. Існує принаймні один опуклий чотирикутник із рівною  сумою внутрішніх кутів.

П.9. Сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу цього кола.

П.10. Три різні точки, рівновіддалені від даної прямої і розташовані в одній півплощині відносно цієї прямої, належать одній прямій (колінеарні).

**3. Доведення несуперечливості системи аксіом Гільберта. Арифметична модель.**

Побудуємо арифметичну модель системи аксіом Гільберта та перевіримо аксіоми планіметрії. Дамо такі означення неозначуваним поняттям:

«Точкою» назвемо впорядковану пару дійсних чисел: .

«Прямою» назвемо набір впорядкованих пропорційних трійок дійсних чисел: , в якому .

Будемо говорити, що «точка  належить прямій », якщо виконується умова .

Якщо три попарно різні точки , ,  належать одній прямій , для якої , і виконується умова  (або умова ), то будемо називати точку  такою, що «лежить між» точками  та .

Два відрізка називаються «конгруентними», якщо існує ортогональне перетворення, яке відображає один відрізок на інший.

Два кути називаються «конгруентними», якщо існує ортогональне перетворення, яке відображає один кут на інший.

Перевірку аксіом системи Гільберта детально викладено в книзі [8].

**Приклади розв’язання задач абсолютної геометрії**

**Задача 1.** Будь-які дві різні прямі мають не більше однієї спільної точки.

***Розв’язання.*** Скористаємось методом від супротивного. Нехай  і  – різні прямі, які мають дві спільні точки: , тобто  та . Тоді через дві різні точки  проходить дві прямі, що суперечить аксіомі 1.2.

**Задача 2.** (Th. 17 bis з додатку Г) В рівнобедреному трикутнику медіана основи є висотою та бісектрисою кута при вершині.

***Доведення.*** Розглянемо рівнобедрений трикутник , в якому проведена медіана . За умовою задачі , . За теоремою 17 , а, з теореми 14 випливає, що . З рівності цих трикутників випливає, що , тобто  – бісектриса . Також з рівності  суміжних кутів випливає, що кожен з них прямий, отже  – висота.

**Задача 3.** (Th. 25)Довести, що з будь-якої точки можна опустити на пряму один і тільки один перпендикуляр.

**

***Доведення.*** На прямій  візьмемо точку . Через точку  та точку  проведемо пряму . За аксіомою 3.4. існує єдина пряма  така, що . За аксіомою 3.1. існує єдина точка : . Оскільки точки  і  лежать в різних півплощинах, то за теоремою 10 прямі  та  перетинаються. Розглянемо трикутник . За побудовою ,  – бісектриса . Отже,  – висота (за теоремою 17 bis).

**Задача 4.** (Th. 30)Зовнішнійкут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним**.**

******

 Доведення цієї теореми наведене в теоретичній частині.

**Задача 5.** (Th. 32)**.** В трикутнику більша сторона лежить навпроти більшого кута і навпаки.

******

***Доведення.*** Розглянемо трикутник , в якому . За аксіомою 3.1 існує єдина точка  така, що . Отриманий трикутник  – рівнобедрений, а значить  (за теоремою 17). З теореми 30 випливає, що , а значить і . Оскільки , то в трикутнику  маємо .

**Задача 6.** (Th. 33**)** Довести, що перпендикуляр менший за похилу, які проведені до прямої з однієї точки.



***Доведення****.* На пряму  з точки  опустимо перпендикуляр  та похилу . Розглянемо трикутник , в якому кут  прямий, а  і  – гострі (за теоремою 31). Оскільки , то  (за теоремою 32).

**Задача 7.** (Th. 34)Довести, що кожна сторона трикутника менша суми та більша різниці інших його сторін**.**

***Доведення.*** Розглянемо трикутник . Доведемо, що  та . З аксіоми 3.1 випливає, що існує єдина точка  така, що . Утворився рівнобедрений трикутник , в якому  (за теоремою 17). Очевидно, що , тоді , звідки .

**Задача 8.** Довести що коли прямі  і  лежать в одній площині і пряма , яка перетинає прямі , утворює з ними рівні внутрішні навхрест лежачі кути, то прямі паралельні.



***Доведення.*** Нехай пряма  перетинає пряму  в точці , а пряму  – в точці . Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що існує така точка , що прямі  перетинаються в ній. В утвореному трикутнику  кут  – внутрішній кут при вершині ,кут  – зовнішній кут при вершині  і  (за умовою). Отримали протиріччя з теоремою 30, отже наше припущення невірне, тобто прямі  не перетинаються.

**Задача 9.** Довести, що для чотирикутника Саккері виконуються наступні твердження:

1. серединний перпендикуляр до нижньої основи перетинає верхню основу;

2. серединний перпендикуляр до нижньої основи є серединним перпендикуляром до верхньої основи;

3. Кути при верхній основі рівні.



***Доведення.***

1. У чотирикутнику Саккері розглянемо трикутник  і серединний перпендикуляр  до нижньої основи. Пряма  за умовою перетинає відрізок , пряма  і відрізок  не перетинаються за теоремою 45. Отже, пряма  і відрізок  перетинаються (за аксіомою Паша). Далі розглянемо трикутник . З того, що  і  перетинаються, а  і  не перетинаються, випливає, що  і  перетинаються.

2. Розглянемо трикутники  і . За умовою , , , а значить  (за теоремою 14). З рівності трикутників випливає, що , . Оскільки , то . За теоремою 14 виконується також рівність трикутників  і , а значить ,  (як суміжні). Отже,  – серединний перпендикуляр до .

3. З рівності  випливає, що , а з  випливає, що . Тому .

**Задача 10.** Довести, що верхня основа чотирикутника Саккері не менша за нижню.

******

***Доведення****.* В чотирикутнику  позначимо кути: , , . В абсолютній геометрії має місце теорема: сума кутів трикутника не більша ніж . Тому можна записати наступні співвідношення , ,з яких слідує  і . З останньої нерівності посилаючись на теорему 32 робимо висновок, що .

**Задача 11.** Довести, що середня лінія трикутника не більша за половину основи.

******

***Доведення.*** Нехай в трикутнику  побудована середня лінія . На пряму  опустимо перпендикуляри з вершин трикутника Трикутники  і  рівні, тому . Також виконується рівність , а значить , отже . Отриманий чотирикутник  є чотирикутником Саккері, а тому  за попередньою задачею. З рівності вказаних пар трикутників випливають рівності ,  відповідних сторін цих трикутників.

Таким чином, , або , що і треба було довести.

**Задача 12.** Довести, якщо два серединних перпендикуляра до сторін трикутника перетинаються в точці , то і третій серединний перпендикуляр проходить через цю точку.

*****Доведення.*** Розглянемо трикутник , в якому  – серединний перпендикуляр до сторони ,  – серединний перпендикуляр до сторони  та прямі  і  перетинаються в точці  Проведемо серединний перпендикуляр  до сторони . Розглянемо трикутники  та , вони рівні за першою ознакою рівності трикутників. Аналогічно . З цих рівностей випливає, що , а значить трикутник  – рівнобедрений. Нехай  – медіана цього трикутника, тоді за теоремою 17 bis  та  перпендикулярні, тобто  співпадає з серединним перпендикуляром .

**Наслідки аксіоми паралельності**

**Задача 1.** Довести, що при перетині двох паралельних прямих третьою утворюються рівні навхрест розташовані кути.

***Доведення.*** Сформульоване твердження в «Началах» Евкліда було теоремою 29 і це була перша теорема, в доведенні якої використовувався 5 постулат.

Паралельні прямі *а* і  утворюють з їх січною 2 пари навхрест розташованих кутів, які позначимо 1 і 4, 2 і 3, а пари 1 і 2, 3 і 4 – пари односторонніх кутів, 1 і 3 – суміжні. Припустимо, що кут 1 не дорівнює куту 4, і для визначеності, нехай кут 1 більше за кут 4. Тоді сума кутів 3 і 4 менша за розгорнутий кут, а отже за 5 постулатом прямі *а* і  перетинаються. Отримане протиріччя доводить теорему.

**Задача 2**. Довести, що сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює сумі двох прямих кутів.

***Доведення.*** Розглянемо трикутник . Проведемо пряму . З теореми 47 випливає, що  , . Оскільки кути  утворюють розгорнутий кут, то для суми кутів трикутника отримаємо , що і треба було довести.

Довести еквівалентність п’ятого постулату та наступних тверджень:

**Задача 3.** Перпендикуляр і похила, проведені в одній площині до даної прямої, перетинаються.

***Доведення.*** 1) Покажемо, що це твердження випливає з п’ятого постулату. До прямої  в точці  проведемо перпендикуляр  та похилу . Проведемо ще один перпендикуляр  до прямої . За теоремою 45  і  паралельні. Приспустимо, що  і  не перетинаються, тоді отримаємо протиріччя з аксіомою паралельності, яка еквівалентна п’ятому постулату.

2) Покажемо, що з твердження випливає аксіома паралельності. Розглянемо пучок прямих, що проходять через точку . В цьому пучку є єдина пряма, яка не є похилою, це пряма , перпендикулярна до прямої . За умовою кожна похила перетинає перпендикуляр . Отже, через точку , яка не належить прямій , проходить єдина пряма , яка не перетинає пряму , тобто виконується аксіома паралельності.

**Задача 4.** Навколо кожного трикутника можна описати коло.



***Доведення.***1) Покажемо, що з аксіоми паралельності випливає твердження: Два серединних перпендикуляра до двох сторін трикутника завжди перетинаються.

В трикутнику  проведемо серединні перпендикуляри  і  до сторін  і  відповідно. Припустимо, що прямі  і  не перетинаються, тобто паралельні. Проведемо через точку  пряму , перпендикулярну до . За теоремою 45 прямі  і  не перетинаються. Таким чином, через точку  проходить дві різні прямі, які не перетинають . Отримали протиріччя з аксіомою паралельності, значить наше припущення невірне.

Точка перетину серединних перпендикулярів і є центром описаного навколо трикутника кола.

2) Тепер покажемо, що з цього твердження випливає аксіома паралельності.

******До прямої  проведемо перпендикуляр  та похилу . На прямій  візьмемо точку , симетричну їй відносно прямої  точку  та симетричну їй відносно прямої  точку . Очевидно, що точки  не належать одній прямій, тобто утворюють трикутник. За побудовою  і  – серединні перпендикуляри до двох сторін цього трикутника. За умовою, навколо  можна описати коло, а значить  і , а значить перпендикуляр і похила до однієї прямої перетинаються. В попередній задачі було доведено, що з цього факту випливає аксіома паралельності.

**Задача 5.**Сума внутрішніх кутів в кожному трикутнику одна і та сама.

***Доведення.*** 1) В задачі 2 цієї теми показано, що з аксіоми паралельності випливає, що в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює двом прямим кутам, тобто одна і та сама.

2) Покажемо як з твердження випливає п’ятий постулат. В трикутнику  позначимо кути так, як показано на рисунку. Можна записати такі рівності:

,

,

,

Запишемо вирази  та . Знайдемо суми правих та лівих частин двох останніх рівностей

,

звідки

.



Твердження про те, що в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює , еквівалентне п’ятому постулату.

**Завдання 2 (15 балів)**

***(надіслати в папку Самостійна робота 2)***

**1).** Користуючись аксіомами перших трьох груп аксіом системи Гільберта, довести твердження:

1. Перша ознака рівності трикутників.

2. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

3. Усі прямі кути конгруентні між собою.

4. Кожен кут можна розділити навпіл, причому єдиним чином.

5. У будь-якому трикутнику принаймні два кути є гострими.

6. З кожної точки на прямій можна відновити до цієї прямої єдиний перпендикуляр.

7. Друга ознака рівності трикутників.

8. Третя ознака рівності трикутників.

**2).** Знайти доведення теорем абсолюсної геометрії (або довести самостійно), розібратися в доведеннях і надати оформлення доведення:

1. Довести, що якщо існує трикутник із сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам, то сума внутрішніх кутів довільного трикутникам дорівнює двом прямим кутам.

2. Довести, що якщо існує прямокутний трикутник із сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам, то сума внутрішніх кутів довільного прямокутного трикутникам дорівнює двом прямим кутам.

3. Довести, що вписаний в коло кут, що спирається на діаметр, не більший за прямий кут.

4. Знайти залежність між стороною правильного вписаного в коло шестикутника і радіусом кола.

5. Сума всіх внутрішніх кутів довільного трикутника не перевищує .

6. Якщо сума кутів хоча б одного трикутника дорівнює двом прямим кутам, то сума кутів будь-якого трикутника дорівнює двом прямим кутам.

7. Якщо в даному трикутника сума всіх внутрішніх кутів дорівнює  і цей трикутник ділиться трансверсаллю на два трикутники, то сума внутрішніх кутів кожного з цих трикутників теж дорівнює .

8. Якщо існує трикутник, в якому сума всіх внутрішніх кутів не перевищує , то і в будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів не перевищує .