Лекція 1. Матриці. Дії над матрицями.

Матрицею розмірами $m \times n$ називається сукупність $m \cdot n$ чисел, розташованих у вигляді таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців.

Позначають матриці великими латинськими літерами $A, B, C...$ і записують у вигляді

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або $A = (a_{ij}),\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$.

Матриця, у якої кількість рядків не дорівнює кількості стовпців (тобто $m \neq n$), називається ***прямокутною***. Якщо $m = n$, то матриця називається ***квадратною***.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці утворюють ***головну діагональ***. Інша діагональ матриці називається побічною.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною*** матрицею. Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою***.

Матриця, яка складається з одного рядка називається матрицею-рядком, а з одного стовпця – матрицею-стовпцем.

$$A_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Дві матриці називаються ***рівними***, якщо вони мають однакові розміри та рівні відповідні елементи.

Дії над матрицями.

1. *Додавання (віднімання) матриць.*

Операції додавання (віднімання) матриць виконуються тільки для матриць однакових розмірів.

Сумою (різницею) матриць A і B буде матриця таких самих розмірів, елементи якої є сумами (різницями) відповідних елементів матриць A і B

$$A \pm B = C$$

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$$

Приклад. Знайти суму та різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 10 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. *Множення матриці на число.*

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ і числа α буде матриця $B = (b_{ij})$, елементи якої $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Приклад. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ знайти $3A$.

$$3A = \begin{pmatrix} 27 & -3 & 6 \\ 18 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. *Транспонування матриць*

Матриця A^t називається ***транспонованою*** до матриці A, якщо вона отримана з матриці A заміною рядків на стовпці з відповідними номерами.

Приклад. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ і $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. *Множення матриць.*

Множення матриць можливе лише в тому випадку, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

$$A_{m \times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n} \times p} = C_{m \times p}$$

Добутком матриць A і B буде матриця C, елементи c_{ij} якої дорівнюють сумі добутків відповідних елементів $i-го$ рядка матриці A і $j-го$ стовпця матриці B.

Приклад. Знайти $A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$A_{2\times\underline{2}} \cdot B_{\underline{2}\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-3)\cdot 2 & 2\cdot 0 + (-3)\cdot(-4) & 2\cdot 3 + (-3)\cdot 5 \\ 1\cdot 1 + 5\cdot 2 & 1\cdot 0 + 5\cdot(-4) & 1\cdot 3 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 12 & -9 \\ 11 & -20 & 28 \end{pmatrix}$$

Зауваження. Добуток матриць $B_{2\times\underline{3}} \cdot A_{\underline{2}\times 2}$ неможливий, оскільки кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A.

Приклад. Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$A_{2\times\underline{3}} \cdot B_{\underline{3}\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 6 & 4\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 4 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) + 5\cdot 6 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 5\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 12 \\ 27 & 21 \end{pmatrix}$$

$$B_{3\times\underline{2}} \cdot A_{\underline{2}\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 & 3\cdot 2 + 1\cdot 5 \\ -2\cdot 4 + 0\cdot 1 & -2\cdot(-1) + 0\cdot 3 & -2\cdot 2 + 0\cdot 5 \\ 6\cdot 4 + 4\cdot 1 & 6\cdot(-1) + 4\cdot 3 & 6\cdot 2 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 11 \\ -8 & 2 & -4 \\ 28 & 6 & 32 \end{pmatrix}$$