Лекція 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Рівняння виду $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ називається лінійним рівняння з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$. Розв’язком такого рівняння буде упорядкований набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, який перетворює наше рівняння в числову тотожність.

Рівняння можна використати для побудови системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) складається з m рівнянь з n невідомими. Якщо кількість рівнянь не дорівнює кількості невідомих $m \neq n$, то таку систему називають прямокутною системою. Якщо $m \neq n$, то система називається квадратною.

Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$ – прямокутна система з трьох рівнянь з чотирма невідомими.

Розв’язком системи (1) будемо називати такий набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, який задовольняє кожне рівняння системи (1).

Якщо система (1) має хоча б один розв’язок, то така система називається *сумісною*.

Якщо система (1) взагалі не має розв’язків, то вона називається *несумісною*.

Якщо система (1) має єдиний розв’язок , то така система називається *визначеною*.

Якщо система (1) має більш, ніж один розв’язок, то вона називається *невизначеною*.

Якщо в системі (1) всі вільні члені дорівнюють нулю, то вона називається *однорідною* і має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, оскільки вона завжди має принаймні один розв'язок – нульовий $(0,0,\ldots,0)$.

Далі розглянемо системи, що складаються з n рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, стовпець вільних членів $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$, стовпець невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. Метод Крамера.

Якщо у системі (2) головний визначник $\Delta = \det A \neq 0$, *то система* <u>*сумісна і має єдиний розв'язок*</u>*, який знаходиться за формулами*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *- допоміжні визначники, одержані з визначника* Δ *заміною 1-го, 2-го,…, n-го стовпця на стовпець вільних членів.*

Якщо в системі (2) $\Delta = 0$, *але хоча б один з визначників* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *не дорівнює нулю, то* <u>*система не має розв'язків, тобто несумісна.*</u>

Якщо у системі (2) $\Delta = 0$ *і усі допоміжні визначники дорівнюють нулю, то* <u>*система сумісна і має незчисленну множину розв'язків*</u>.

Приклад. Розв’язати задану систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$$

Знаходимо визначник системи за правилом трикутника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 32 + (-18) + 30 - 20 - 24 - (-36) = 36$$

Знаходимо допоміжні визначники системи

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 20 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -96 + (-120) + (-72) - (-48) - (-72) - (-240) = 72$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 20 & -2 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} = 160 + (-36) + 60 - 100 - 48 - (-72) = 108$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 20 \\ 5 & -6 & -12 \end{vmatrix} = -96 + 108 + (-300) - (-120) - (-240) - 108 = -36$$

Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{36} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{108}{36} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{36} = -1$.

2. Матричний метод.

Систему (2) можна записати в матричній формі

$$AX = B.$$

З цієї рівності

$$X = A^{-1}B$$

Щоб знайти розв’язок системи (2) , потрібно знайти обернену матрицю A^{-1}*, і помножити її на матрицю* B.

Приклад. Розв’язати задану систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -12 \end{cases}$$

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, стовпець вільних членів $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -22$, $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -38$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 6$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -3$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17$.

Обернена матриця до матриці A запишеться у вигляді

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -22 & 3 & 7 \\ -38 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

Знайдемо розв'язок системи

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -22 & 3 & 7 \\ -38 & -3 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 \cdot (-6) + 6 \cdot 20 + 2 \cdot (-12) \\ -22 \cdot (-6) + 3 \cdot 20 + 7 \cdot (-12) \\ -38 \cdot (-6) - 3 \cdot 20 + 17 \cdot (-12) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 72 \\ 108 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.