Лекція 4. Метод Гаусса.

Розглянемо матрицю $A_{m\times n}$ і позначимо рядки цієї матриці $A_1, A_2, \ldots, A_m$

Під *елементарними перетвореннями* рядків матриці розуміють наступні перетворення:

1. Перестановка місцями двох будь-яких рядків матриці.
2. Додавання до одного рядка матриці іншого її рядка, попередньо помноженого на довільне, відмінне від нуля, число.

Рядок A_i матриці називається лінійною комбінацією інших її рядків, якщо кожен елемент цього рядка дорівнює сумі добутків відповідних елементів інших рядків і довільних чисел

$$A_i = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_m A_m,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_m = const$.

Рядки матриці називаються *лінійно залежними*, якщо який-небудь рядок є лінійною комбінацією інших рядків матриці. В противному випадку рядки матриці називаються *лінійно незалежними*. A

Рангом матриці A ($rangA$) називається максимальна кількість її лінійно незалежних рядків.

Матриця має *східчастий вид*, якщо під елементами, що мають однакові індекси a_{ii} стоять тільки нулі. Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Щоб визначити ранг матриці необхідно за допомогою елементарних перетворень рядків звести матрицю до східчастого виду. Рангом матриці буде кількість ненульових рядків в східчастому вигляді матриці.

Приклад 1. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rangA = 2$$

Приклад 2. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ -6 & 2 & -6 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 5 & 7\\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9\\ -6 & 2 & -6 & -7 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ II\cdot 2-I\cdot 3\\ III+I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -4 & -2 & 8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ III+II\cdot 2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad rangA=3$$

За допомогою рангу матриці можна дослідити на сумісність будь-яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна (має розв'язки) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.*

Якщо ранги співпадають і дорівнюють кількості змінних, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранги співпадають, але отримане число менше кількості змінних – система має безліч розв'язків.

Алгоритм метода Гаусса.

1. Записати розширену матрицю вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. За допомогою елементарних перетворень рядків звести записану матрицю до «східчастого» виду.
3. Дослідити систему на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.
4. Записати систему рівнянь, що відповідає отриманій «східчастій» матриці.
5. Виділити в системі залежні та незалежні змінні. Кількість незалежних змінних дорівнює рангу r матриці. Кількість залежних змінних дорівнює $n-r$.

Зворотний хід метода Гаусса.

Починаючи з останнього рівняння виражаємо залежні змінні через незалежні.

Приклад. Дослідити СЛАР на сумісність і знайти її розв'язки.

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=0\\ -x_1+2x_2+3x_3=5\\ 3x_1+x_2+6x_3=23\end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та приведемо її до східчастого виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\-1&2&3&5\\3&1&6&23\end{array}\right)\begin{array}{l}\\II+I\\III-I\cdot 3\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&1&2&5\\0&4&9&23\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\III-II\cdot 4\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&1&2&5\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює 3. Отже система має єдиний розв'язок. Запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій «східчастій» матриці

$$\begin{cases}1\cdot x_1-1\cdot x_2-1\cdot x_3=0\\ \quad 1\cdot x_2+2\cdot x_3=5\\ \qquad 1\cdot x_3=3\end{cases}$$

З останнього рівняння $x_3=3$. Підставляючи знайдене $x_3=3$ в передостаннє рівняння $x_2+2\cdot 3=5$, отримаємо, що $x_2=-1$. Знайдені значення змінних підставляємо в перше рівняння $x_1-(-1)-3=0$ і отримаємо $x_1=2$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь $\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3-2x_4=2\\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4=0\\ x_1+3x_2+3x_3-6x_4=3\end{cases}$

Запишемо розширену матрицю системи та приведемо її до східчастого виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}-2&1&3&-2&2\\2&3&1&-5&0\\1&3&3&-6&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\II+I\\III\cdot 2+I\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-2&1&3&-2&2\\0&4&4&-7&2\\0&7&9&-14&8\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\III\cdot 4-II\cdot 7\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-2&1&3&-2&2\\0&4&4&-3&2\\0&0&8&-7&18\end{array}\right)$$

Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює 3, а кількість зміних системи дорівнює 4, отже система має безліч розв'язків.

Запишемо систему рівнянь, що відповідає отриманій «східчастій» матриці

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3-2x_4=2\\ \quad 4x_2+4x_3-3x_4=2\\ \qquad 8x_3-7x_4=18\end{cases}$$

Нехай x_4 - незалежна змінна, тоді x_1, x_2, x_3 - залежні змінні

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - x_2 - 3x_3 + 2x_4}{-2} = -1 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{8}x_4\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4\right) - x_4 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \dfrac{2 - 4x_3 + 3x_4}{4} = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4\right) + \dfrac{3}{4}x_4 = -\dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{8}x_4 \\ x_3 = \dfrac{18 + 7x_4}{8} = \dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{8}x_4 \end{cases}$$

Знайдені значення x_1, x_2, x_3 представимо у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_4 \\ -\frac{7}{4} - \frac{1}{8}x_4 \\ \frac{9}{4} + \frac{7}{8}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} x_4,$$

Замінюючи x_4 на довільну сталу C, загальний розв'язок системи запишемо у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix} C.$$