Лекція 8. Методи знаходження границь функції.

Якщо при підстановці замість x його граничного значення x_0 отримаємо невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\cdot\infty], [\infty-\infty], \left[0^0\right], \left[1^\infty\right]$, то процес обчислення границі називається *розкриттям невизначеності*.

Правила розкриття невизначеностей.

Правило 1. Для того, щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник та знаменник прямують до нуля (невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$), потрібно скоротити дріб на $(x-x_0)$ і перейти до границі.

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 - корені рівняння $ax^2+bx+c=0$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x}$ **.**

Підставкою значення $x=3$ переконуємось, що маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x} = \left[\frac{9-21+12}{9-9}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Розглянемо рівняння $x^2-7x+12=0$. Його коренями є числа $x_1=3, x_2=4$. Тому $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Отже,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x} = -\frac{1}{3}.$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ **.**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1^3 - 1}{1 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Для знаходження цієї границі застосуємо формулу скороченого множення $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

Правило 2. Границя частки двох многочленів при $x \to \infty$ (невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$) дорівнює:

- відношенню коефіцієнтів при старших степенях, якщо степені чисельника і знаменника однакові;
- нулю, якщо степінь чисельника менше степені знаменника;
- нескінченності, якщо степінь чисельника більше степені знаменника

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$$

Приклади.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$,

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 + 4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \infty$,

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - 4x + 5x^2 - 6x^3}{2x^3 + 4x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{-6}{2} = -3$,

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 4}}{5x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{5}$.

Особливі границі.

Перша особлива границя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

Наслідки першої особливої границі:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad 3.\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha,\quad 5.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta},\quad 6.\ \lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

Приклади.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$$

Друга особлива границя.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e$$

Наслідки другої особливої границі:

$$1.\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=e,\quad 2.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k},\quad 3.\ \lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e.$$

Приклади.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{5},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{x}\right)^{3}=\left(e^{-2}\right)^{3}=e^{-6},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x+5}\right)^{x+5}=e^{4}$$