Лекція 9. Диференціювання функції однієї змінної

Визначення. *Похідною* функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу Δx прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

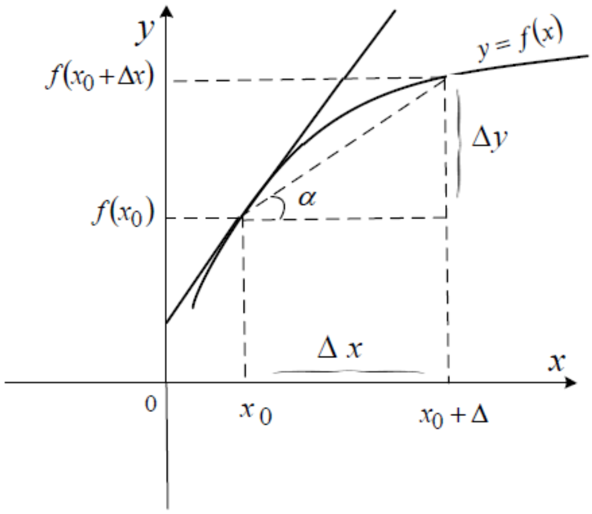
Δy - приріст функції, Δx - приріст аргументу.

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

Геометричний зміст похідної в точці

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 і кутовому коефіцієнту цієї дотичної

$$k = tg\alpha = f'(x_0)$$



Таблиця 1.1 – Похідні елементарних функцій

1	$(C)' = 0, C = const$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	10	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
4	$(e^x)' = e^x$	11	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	12	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

1. Похідна суми (різниці) двох функцій, кожна з яких має похідну, дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну іншої функції

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

3. Похідна частки двох функцій обчислюється за формулою

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак похідної

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

Приклад 1. Обчислити похідну функції $y = 5x^3 - x^2$.

Розв'язання. За правилами 1 і 4 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = \left(5x^3 - x^2\right)' = \left(5x^3\right)' - \left(x^2\right)' = 5 \cdot 3x^2 - 2x = 15x^2 - 2x$$

Приклад 2. Обчислити похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степенів, запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{1}{2}}$. За таблицею похідних отримаємо

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Приклад 3. Обчислити похідну функції $y = \sin x + 2^x - 4$.

Розв'язання. За правилом 1 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (\sin x + 2^x - 4)' = \cos x + 2^x \ln 2.$$

Приклад 4. Обчислити похідну функції $y = x^5 + \frac{1}{x^4} - 6\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості степенів, запишемо функцію у вигляді $y = x^5 + x^{-4} - 6x^{\frac{2}{3}}$. За правилом 1 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = 5x^4 + (-4) \cdot x^{-4-1} - 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 5x^4 - 4x^{-5} - 4x^{-\frac{1}{3}} = 5x^4 - \frac{4}{x^5} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 5. Обчислити похідну функції $y = (x^2 - 1) \cdot tgx$.

Розв'язання. За правилом 2 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = (x^2 - 1)' \cdot tgx + (x^2 - 1) \cdot (tgx)' = 2xtgx + (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Приклад 6. Обчислити похідну функції $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Розв'язання. За правилом 3 та таблицею похідних отримаємо

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

Похідна складеної функції.

Визначення. Якщо аргументом функції $y = f(u)$ є функція незалежної змінної x, тобто $u = u(x)$, то функція $y = f(u(x))$ називається *складеною* функцією від x. При цьому функцію $f(u)$ називають *зовнішньою*, а функцію $u(x)$ – *внутрішньою* функцією складеної функції $y = f(u(x))$.

Похідна складеної функції $y = f(u(x))$ обчислюється за формулою

$$y' = f'_u \cdot u'_x,$$

де f'_u - похідна зовнішньої функції за проміжною змінною;

u'_x - похідна зовнішньої функції за основним аргументом.

Приклад 7. Обчислити похідну функції $y = \sin(2x-1)$.

Розв'язання. Внутрішньою функцією буде функція $u(x) = 2x - 1$, а зовнішньою $y = f(u) = \sin u$. Тому

$$y' = \left(\sin(2x-1)\right)' = \cos(2x-1)\cdot(2x-1)' = \cos(2x-1)\cdot 2 = 2\cos(2x-1).$$

Приклад 8. Обчислити похідну функції $y = (4x+3)^5$.

Розв'язання.

$$y' = \left((4x+3)^5\right)' = 5\cdot(4x+3)^4\cdot(4x+3)' = 20(4x+3)^4.$$

Приклад 9. Обчислити похідну функції $y = tg^3 x$.

Розв'язання.

$$y' = 3tg^2 x\cdot(tgx)' = 3tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 10. Обчислити похідну функції $y = \sqrt{x^2+5}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(\sqrt{x^2+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot(x^2+5)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$