Лекція 10. Диференціювання функції багатьох змінних.

Визначення. Змінну величину називають *функцією двох змінних* x, y, якщо кожній парі їх значень (x, y) із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення z. Позначення $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічно означуються функції трьох та більшого числа змінних.

Під областю визначення функції $z = f(x, y)$ розуміють сукупність точок (x, y) площини xOy, в яких задана функція визначена, тобто набуває певних дійсних значень.

Частинні похідні функції двох змінних.

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ по змінній x -

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y)$ по змінній y -

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

За означенням частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означуються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x^2 y + x^2 - y^2 + 5$.

Розв'язання. Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = (3x^2 y + x^2 - y^2 + 5)'_x = 3 \cdot 2 \cdot xy + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = (3x^2 y + x^2 - y^2 + 5)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 = 3x^2 - 2y.$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = 5x \sin y - \cos x + 3$.

Розв'язання. Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x=(5x\sin y-\cos x+3)'_x=5\cdot 1\cdot \sin y-(-\sin x)+0=5\sin y+\sin x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y=(5x\sin y-\cos x+3)'_y=5x\cos y-0+0=5x\cos y.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z=\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x=\left(\frac{y}{x}\right)'_x=y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y=\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}\cdot(y)'_y=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні функції $z=(2x^4+5y^2)^3$.

Розв'язання. Вважаючи y сталою, знаходимо частинну похідну складеної функції

$$z'_x=3\cdot(2x^4+5y^2)^2\cdot(2x^4+5y^2)'_x=3\cdot(2x^4+5y^2)^2\cdot(2\cdot 4\cdot x^3+0)=24x^3(2x^4+5y^2)^2.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо частинну похідну складеної функції

$$z'_y=3\cdot(2x^4+5y^2)^2\cdot(2x^4+5y^2)'_y=3\cdot(2x^4+5y^2)^2\cdot(0+5\cdot 2\cdot y)=30y(2x^4+5y^2)^2.$$

Частинні похідні вищих порядків.

Частинними похідними другого порядку функції називають частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Для частинних похідних другого порядку використовують позначення

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=x^3y^4+2x^2-y^3+1$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = (x^3y^4 + 2x^2 - y^3 + 1)'_x = 3x^2y^4 + 4x,$$

$$z'_y = (x^3y^4 + 2x^2 - y^3 + 1)'_y = 4x^3y^3 - 3y^2.$$

Знайдемо частинні похідні від похідних першого порядку

$$z''_{xx} = (3x^2y^4 + 4x)'_x = 6xy^4 + 4,$$

$$z''_{xy} = (3x^2y^4 + 4x)'_y = 3x^2 \cdot 4y^3 + 0 = 12x^2y^3,$$

$$z''_{yx} = (4x^3y^3 - 3y^2)'_x = 4 \cdot 3x^2y^3 - 0 = 12x^2y^3,$$

$$z''_{yy} = (4x^3y^3 - 3y^2)'_y = 4x^3 \cdot 3y^2 - 3 \cdot 2y = 12x^3y^2 - 6y.$$

Приклад 6. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = (3x + 7y)^5$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$z'_x = 5(3x + 7y)^4 \cdot (3x + 7y)'_x = 5(3x + 7y)^4 \cdot 3 = 15(3x + 7y)^4,$$

$$z'_y = 5(3x + 7y)^4 \cdot (3x + 7y)'_y = 5(3x + 7y)^4 \cdot 7 = 35(3x + 7y)^4.$$

Знайдемо другі частинні похідні

$$z''_{xx} = (15(3x + 7y)^4)'_x = 15 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 3 = 180(3x + 7y)^3,$$
$$z''_{xy} = (15(3x + 7y)^4)'_y = 15 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 7 = 480(3x + 7y)^3,$$
$$z''_{yy} = (35(3x + 7y)^4)'_y = 35 \cdot 4 \cdot (3x + 7y)^3 \cdot 7 = 980(3x + 7y)^3.$$

Екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має *локальний максимум (мінімум)* $f(a,b)$ у точці $P(a,b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x, y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a,b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a,b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційована функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки системи називають *стаціонарними точками*.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці екстремуму $P(a,b)$ знаходимо

$$A = f''_{xx}(a,b),\ B = f''_{xy}(a,b),\ C = f''_{yy}(a,b),\ \Delta = AC - B^2.$$

Якщо:

1) $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a,b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a,b)$ немає;

3) $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні і складемо систему

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15,\ z'_y = 6xy - 12$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0, \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}$ і знаходимо чотири стаціонарні точки $M_1(1;2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-2;-1)$.

Знайдемо похідні другого порядку

$$z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 6x,\ z''_{yy} = 6x.$$

Обчислимо $\Delta = AC - B^2 = 6x \cdot 6x - (6y)^2 = 36x^2 - 36y^2$ для кожної стаціонарної точки:

1) $\Delta(M_1) = 36 \cdot 1^2 - 36 \cdot 2^2 = 36 - 144 = -108$, оскільки $\Delta(M_1) < 0$, то у точці екстремуму M_1 немає;

2) $\Delta(M_2) = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1^2 = 144 - 36 = 108$, оскільки $\Delta(M_2) > 0$, $A(M_2) = 12 > 0$, то у точці M_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x = 2,\ y = 1$: $z_{\min} = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28$.

3) $\Delta(M_3) = 36 \cdot (-1)^2 - 36 \cdot (-2)^2 = 36 - 144 = -108$, оскільки $\Delta(M_3) < 0$, то у точці M_3 екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4) = 36 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-1)^2 = 144 - 36 = 108$, оскільки $\Delta(M_4) < 0$, $A(M_2) = 12 > 0$, $A(M_2) = -12 < 0$, то у точці M_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\min} = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28$.