ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Ю.О. Борисовська, О.С. Козлова, О.А. Лисенко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник до виконання
контрольної роботи для студентів I курсу
заочної форми навчання напряму підготовки «Менеджмент»

Затверджено
Вченою радою ЗНУ
Протокол № __ від

Запоріжжя
2011

УДК 510 (076)
М 545

Борисовська Ю.О., Козлова О.С., Лисенко О.А. Вища та прикладна математика: Навчально-методичний посібник до виконання контрольної роботи для студентів І курсу заочної форми навчання напряму підготовки «Менеджмент» / – Запоріжжя: ЗНУ, 2011. – 87 с.

Даний посібник до виконання до контрольної роботи з курсу «Вища та прикладна математика», що включає крім основних тем з вищої математики такі модулі, як «Теорія ймовірностей» та «Математичне програмування», пропонуються студентам, що навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр за напрямами підготовки 6.030601 «Менеджмент» і передбачається для закріплення навчального матеріалу з дисципліни циклу професійної та практичної підготовки.

Навчально-методичне видання включає теоретичний матеріал, варіант з розв'язками, варіанти індивідуального завдання та список рекомендованої літератури.

Рекомендується студентам заочної форми навчання факультету менеджменту.

Метою індивідуальної (контрольної) роботи є вивчення та закріплення навчального матеріалу з базових тем дисципліни «Математика для економістів: Вища математика», отриманого на лекціях, практичних заняттях та при самостійному вивченні матеріалу. Розроблений посібник відповідає основним вимогам кредитно-модульної системи оцінювання знань студентів денної форми навчання.

Рецензент: *Гребенюк С.М.*

Відповідальний за випуск: *Гоменюк С.І.*

Зміст

Вступ

Робочою програмою дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальностей 6.030601 «Менеджмент» передбачено виконання однієї контрольної роботи за розділами: «Векторна та лінійна алгебра», «Аналітична геометрія на площині та у просторі», «Елементи математичного аналізу», «Теорія ймовірностей» та «Математичне програмування». Навчальна програма з даної дисципліни наведена у додатку А.

Мета вивчення даного курсу студентами нематематичних спеціальностей – це освоєння студентами основ математичного апарата, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних економічних задач; освоєння прийомів дослідження і розв'язання математично формалізованих задач.

Більшість найважливіших понять економіки: бюджетні лінії, попит і пропозиція, ціна рівноваги, еластичність, гранична корисність та ін. – є, власне кажучи, конкретними прикладами стандартних понять математичного аналізу: функція, похідна тощо. Розв'язання багатьох економічних завдань, як правило, вимагає знань і вмілого застосування різних математичних методів.

Контрольна робота є важливою формою самостійного вивчення курсу вищої та прикладної математики і виступає, з одного боку, засобом набуття та поглиблення знань студентів, з іншого – формою самоконтролю і контролю навчання студентів з боку викладачів кафедри.

Виконання контрольної роботи забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників і навчальних посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх економічного аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Контрольна робота виконується українською мовою у письмовій формі. Необхідно залишати поля для приміток. Зразок оформлення титульного листа наведений в Додатку Б. Обов'язково навести умови завдання, креслення (де потрібно), відповіді та пояснити їх економічний зміст.

Перед виконанням кожного завдання, приведеного наприкінці кожного параграфа, рекомендується прочитати з посібника [16] зазначені сторінки, де викладений теоретичний матеріал даного параграфа.

Захист контрольної роботи проводиться у письмовій формі шляхом розв'язання подібних задач та наведенням економічного змісту одержаного розв'язку.

Модуль «Вища математика»

§1 Визначники. Матриці

1. **Визначники та їх властивості.** *Література*: [16], розд. I, §1, стор. 7-10.

2. **Мінор. Алгебраїчне доповнення елемента визначника.** *Література*: [16], розд. I, §2, стор. 11-12.

3. **Матриці, дії над матрицями. Застосування матриць в економіці.** *Література*: [16], розд. I, §4, стор. 19-22, §10, стор. 39-50, прикл. 1.15-1.18.

Приклад №1. Виконати розрахунок заробітної платні, яка нараховується на кожне замовлення при виготовленні різних деталей, якщо відомі такі дані:

а) затрати робочого часу на кожну деталь для кожного робочого місця, тобто, щоб виготовити деталь *A*, потрібно на I-му робочому місці витратити 2 години, на II-му – 1 годину і т.д. Аналогічно дані витрати для виготовлення деталей *B* та *C* (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Деталі	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	2	1	4	5	0
B	1	4	2	5	2
C	0	1	0	3	4

б) кількість деталей в кожному замовленні (шт.):

Таблиця 1.2

Замовлення	Кількість деталей		
	A	*B*	*C*
K	0	4	2
L	0	2	4
M	5	1	0

в) погодинна заробітна платня (грн) на кожному робочому місці:

Таблиця 1.3

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,25	1,5	1,4	1,4	1,25

Розв'язання. Запишемо в матричній формі вихідні дані:

а) витрати робочого часу на кожну деталь $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) кількість необхідних деталей в кожному замовленні: $Q = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) погодинна заробітна платня $P = (1{,}25 \quad 1{,}5 \quad 1{,}4 \quad 1{,}4 \quad 1{,}25)$.

Оскільки відомі витрати робочого часу на кожну деталь і вартість однієї робочої години для кожного робочого місця, то знайдемо заробітну платню, що складається для виготовлення кожної деталі. Для цього попередньо транспонуємо матрицю *P* для того, щоб матриці можна було перемножити:

$$T \cdot P^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 1{,}5 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1{,}25 + 1 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 1{,}4 + 5 \cdot 1{,}4 + 0 \cdot 1{,}25 \\ 1 \cdot 1{,}25 + 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}4 + 5 \cdot 1{,}4 + 2 \cdot 1{,}25 \\ 0 \cdot 1{,}25 + 1 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot 1{,}4 + 3 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}6 \\ 19{,}55 \\ 10{,}7 \end{pmatrix}$$

Оскільки матриця Q визначає кількість деталей в кожному замовленні, то добуток $Q \cdot (T \cdot P^T)$ визначає величину заробітної платні, яка нараховується при виконанні кожного замовлення:

$$X = Q \cdot \left(T \cdot P^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16{,}6 \\ 19{,}55 \\ 10{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99{,}6 \\ 81{,}9 \\ 102{,}55 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. Заробітна платня, що нараховується при виконанні замовлення K, складає 99,6 грн., замовлення L – 81,9 грн., замовлення M – 102,55 грн.

Завдання №1

Виконати розрахунок заробітної платні, що нараховується при виконанні кожного замовлення при виробництві різних виробів, якщо відомо: а) витрати робочого часу на кожному з робочих місць; б) кількість виробів у кожного замовлення (шт.); в) погодинна заробітна платня (грн.).

1. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	0,5	1	2	1,5	0
B	1	2	1	2	0,5
C	2	0,5	1	1	1
D	0,5	1	1,5	1	2

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	1	2	5	4
L	0	3	2	1
M	2	0	1	3

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,2	1,1	1	1,3	1,4

2. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	1	0,5	1	2
B	2	1	1,5	1
C	0,5	2	1	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	0	1	4
L	2	5	3
M	1	2	1
N	4	1	2

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,1	1,3	1,4	1,2

3. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1	1	2
B	0,5	1	1,5
C	2	0,5	1
D	1,5	1	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	2	3	4	5
L	5	2	1	0
M	3	4	2	1
N	1	3	3	4

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,5	1,4	1,2

4. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	0	1	1,5
B	1	1,5	2
C	0,5	0,5	1
D	1,5	1,5	1
E	1	2	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	3	2	5	0	1
L	2	3	4	5	2
M	2	3	2	1	5
N	2	3	4	5	1

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,25	1,2	1,3

5. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	1,5	2	1	0,5
B	2	1	0,5	0,5
C	1	0,5	0,5	0
D	1	0	1	1
E	0,5	1,5	2	1,5

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	2	3	5	0	1
L	2	3	4	5	1
M	2	5	4	2	2

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,2	1,1	1,25	1,1

6. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	0,5	1	1,5	2	1
B	2	1	1	1,5	0,5
C	1	1,5	0,5	1	1,5

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	1	2	4
L	3	5	4
M	2	5	1
N	5	0	3

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,25	1,1	1,2	1,4	1,1

7. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	2	1	0,5	2
B	1,5	0,5	2	1,5
C	0,5	1,5	1	1
D	1	1	1	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	2	5	3	2
L	2	3	4	0
M	2	4	5	4

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,1	1,2	1,1	1,5

8. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1,5	1	2
B	1	0	1
C	1,5	1,5	1
D	2	1,5	1,5
E	0,5	1	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	3	2	1	2	2
L	0	2	5	1	3
M	4	2	3	4	1

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,25	1,2	1,1

9. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	0,5	0,5	1,5
B	1	2	1
C	1,5	1	2

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	2	3	1
L	2	5	2
M	4	0	5
N	2	3	1
P	2	5	1

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,4	1,2	1,25

10. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	0,5	1,5	1	1	1,5
B	1	2	1	0,5	0
C	1,5	2	2	1	2
D	0	0,5	2	1,5	1
E	1,5	1	0,5	1	2

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	2	5	1	2	4
L	3	2	4	5	0

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,2	1,4	1,25	1,3	1,4

11. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	1	1,5	1	1,5	1
B	2	2	2	2	1,5
C	0,5	1	0,5	1	0,5
D	0,5	1,5	0	1,5	1

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	2	0	1	3
L	2	5	1	1
M	3	5	2	1

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,2	1,5	1,4	1,3	1,2

12. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	1	1	1	1,5
B	0,5	1,5	1,5	0,5
C	0,25	2	1,5	2

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	3	2	1
L	2	2	1
M	4	4	3
N	5	2	1

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,35	1,2	1,4	1,1

13. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	2	0	1,5	1
B	1,5	1,25	2	2
C	1,5	0,5	1	2
D	0	2	1	1
E	1,5	1,75	2	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	2	3	4	1	0
L	2	3	1	5	1
M	1	2	4	2	5

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,2	1,3	1,5	1,4

14. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	0,25	1	2
B	0,5	1	1,5
C	1	1,5	1
D	0,5	2	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	3	5	2	5
L	2	0	1	4
M	2	3	1	1
N	2	4	5	2

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,05	1,15	1,2

15. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	2	1	1,5	1,5
B	1,5	0,25	2	1
C	1	0	1,25	1,5
D	0,5	0,5	1,5	1

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	2	5	1	3
L	0	1	2	3
M	3	2	4	5

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,4	1,25	1,5	1,2

16. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	0,25	1,5	1	1	2
B	0,5	1,5	1,5	0,5	0,5
C	1	2	0,5	1,5	1

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	1	5	3
L	4	2	1
M	2	0	2
N	1	4	2

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,3	1,5	1,45	1,25	1,4

17. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1,75	1	1,5
B	1,5	1	2
C	1,25	0,5	1,5
D	1	0,5	0
E	0,5	0,25	1

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	1	0	2	3	4
L	2	4	1	3	5
M	2	4	2	5	1
N	0	2	3	4	5

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,25	1,6	1,5

18. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	0,5	0,5	1
B	2	1	1,5
C	1	2	1,5
D	1	2	2
E	0,5	1	1,5

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	3	2	4	5	4
L	2	4	3	1	2
M	2	1	1	2	0

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,5	1,6	1,25

19. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1,5	2	1,5
B	2	1	1
C	1	0,5	1

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	1	2	4
L	2	4	3
M	1	2	1
N	0	2	3
P	1	2	4

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,3	1,5	1,45

20. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	2	1,5	2	1	0
B	1,5	1	1,5	1,5	1,5
C	1	1,5	1,5	0,5	1
D	1	0,5	1	2	1
E	1,5	0,5	1	2	2

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	5	1	3	2	4
L	2	3	4	2	4

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,35	1,5	1,45	1,2	1,1

21. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	0,25	1	1,25	1,5	2
B	1	0	1	1	0,75
C	2	1,25	2	0,5	1
D	1	1,5	1	0	1

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	2	4	3	1
L	5	2	4	3
M	0	1	2	4

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,25	1,6	1,55	1,4	1,1

22. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	1,25	1,5	2	1,75
B	2	1	2	1,5
C	1	1	1	2

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	0	2	3
L	2	3	1
M	1	2	4
N	4	2	3

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,55	1,2	1,1	1,25

23. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1	2	1,5
B	0,75	2	2
C	1	1,5	2
D	1,25	0,5	1

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	2	2	3	4
L	2	3	1	1
M	0	2	3	4
N	1	5	3	4

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,3	1,4	1,1

24. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	1	1	1,5	2
B	1	0,75	1	1,5
C	2	0,5	2	1,5
D	1,5	1,25	1	1

б)

Замовлення	Кількість виробів			
	A	*B*	*C*	*D*
K	1	2	4	3
L	3	2	2	1
M	1	2	2	3

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,25	1,3	1,4	1,2

25. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	1	1	2	2	1,5
B	1	2	1	1,25	1,25
C	1,5	0,5	2	1,5	0,75

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	2	3	4
L	2	2	3
M	1	2	4
N	0	1	3

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,6	1,25	1,45	1,5	1,1

26. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці			
	I	II	III	IV
A	0,75	1	0,5	1
B	1,25	1,5	1	0
C	1	0,25	1	1
D	1	1,25	2	1,5
E	2	2	2	0,5

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	3	2	1	5	2
L	4	3	2	1	1
M	2	3	4	2	2

в)

Робоче місце	I	II	III	IV
Погодинна заробітна платня	1,5	1,3	1,4	1,55

27. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1,5	2	1
B	1	1	0,75
C	2	0	0,5
D	1	1	0,5
E	1,5	2	0,75

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	3	4	2	1	4
L	1	3	3	1	3
M	2	4	2	2	5
N	2	1	1	0	2

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,45	1,2	1,3

28. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	0,25	0	1,75
B	0,5	1,25	0,25
C	1	0,25	1
D	1	1	2
E	1,5	2	1

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	5	3	2	4	5
L	2	4	0	3	2
M	3	4	2	1	2

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,65	1,4	1,2

29. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці		
	I	II	III
A	1,75	0,5	1
B	1,25	2	1
C	2	1,5	2

б)

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	2	3	1
L	5	0	1
M	3	2	1
N	2	4	3
P	5	2	3

в)

Робоче місце	I	II	III
Погодинна заробітна платня	1,3	1,25	1,1

30. а)

Вироби	Витрати часу на робочому місці				
	I	II	III	IV	V
A	1,5	1,5	2	1,5	1,5
B	1	1	0,5	1	1
C	2	1,5	1	1,5	2
D	0	0,75	1	2	0,25
E	2	1	1	0,5	1

б)

Замовлення	Кількість виробів				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
K	2	1	3	4	1
L	1	2	4	2	3

в)

Робоче місце	I	II	III	IV	V
Погодинна заробітна платня	1,5	1,45	1,3	1,25	1,4

§2 Продуктивні моделі Леонтьєва

4. **Зворотна матриця. Продуктивні моделі Леонтьєва.** *Література*: [16], розд. I, §4, стор. 22-25, прикл. 1.6, §12, стор. 58-65, прикл. 1.20-1.24.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$\begin{cases} x_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\right) = y_1 \\ x_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n\right) = y_2 \\ ... \\ x_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n\right) = y_n \end{cases}, \tag{1.6}$$

яка характеризує баланс витрат випуску продукції [16, стор. 55]. Причому a_{ij} – коефіцієнти прямих витрат або технологічні коефіцієнти; $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – заданий асортиментний вектор; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – необхідний для випуску продукції вектор-план.

Система рівнянь (1.6) називається **системою рівнянь лінійного міжгалузевого балансу** або **моделлю Леонтьєва**.

Визначення. Матриця $A \geq 0$, яка одержується з (1.6)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

називається **продуктивною**, якщо для будь-якого вектора $\bar{y} \geq 0$ існує розв'язок $\bar{x} \geq 0$ системи (1.6). В цьому випадку і модель Леонтьєва називається продуктивною.

З другого критерію продуктивності матриці A (1.7) виходить, якщо зворотна матриця $(E - A)^{-1}$ існує і додатна, то матриця A – продуктивна [16, стор. 59].

Приклад №2. Дослідити на продуктивність матрицю $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Запишемо матрицю $E - A$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \text{ де } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження $(E - A)^{-1}$ обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}35 - 0{,}048 - 0{,}002 - 0{,}042 - 0{,}04 - 0{,}02 = 0{,}198.$$

Тепер знайдемо алгебраїчні доповнення одержаної матриці $E - A = B$:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}35 - 0{,}04 = 0{,}29; \qquad B_{21} = -\begin{vmatrix} -0{,}1 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = -(-0{,}05 - 0{,}12) = 0{,}17;$$

$$B_{12} = -\begin{vmatrix} -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = -(-0{,}2 - 0{,}02) = 0{,}22; \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}5 - 0{,}06 = 0{,}44;$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} -0{,}4 & -0{,}7 \\ -0{,}1 & -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}08 + 0{,}07 = 0{,}15; \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}2 \end{vmatrix} = -(-0{,}2 - 0{,}01) = 0{,}21;$$

$B_{31}=\begin{vmatrix}-0{,}1 & -0{,}6\\ 0{,}7 & -0{,}2\end{vmatrix}=0{,}02+0{,}42=0{,}44$; $B_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -0{,}6\\ -0{,}4 & -0{,}2\end{vmatrix}=-(-0{,}2-0{,}24)=0{,}44$;

$B_{33}=\begin{vmatrix}1 & -0{,}1\\ -0{,}4 & 0{,}7\end{vmatrix}=0{,}7-0{,}04=0{,}66$.

Використовуючи формулу зворотної матриці знайдемо $(E-A)^{-1}$, тобто B^{-1}:

$$B^{-1}=\frac{1}{0{,}198}\begin{pmatrix}0{,}29 & 0{,}17 & 0{,}44\\ 0{,}22 & 0{,}44 & 0{,}44\\ 0{,}15 & 0{,}21 & 0{,}66\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}46 & 0{,}86 & 2{,}22\\ 1{,}11 & 2{,}22 & 2{,}22\\ 0{,}76 & 1{,}06 & 3{,}33\end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці $B^{-1}=(E-A)^{-1}$ всі елементи додатні і згідно другому критерію продуктивності матриці можна зробити висновок, що матриця A продуктивна.

Відповідь. Матриця продуктивна.

Завдання №2

Дослідити на продуктивність матрицю.

1. $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}$;
2. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4\end{pmatrix}$;
3. $A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}$;
4. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}$;
5. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$;
6. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}$;
7. $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3\end{pmatrix}$;
8. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6\end{pmatrix}$;
9. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5\end{pmatrix}$;
10. $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4\end{pmatrix}$;
11. $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$;
12. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0\end{pmatrix}$;
13. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix}$;
14. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}$;
15. $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2\end{pmatrix}$;
16. $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}4\end{pmatrix}$;
17. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7\end{pmatrix}$;
18. $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0 & 0{,}6 & 0{,}7\end{pmatrix}$;
19. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$;
20. $A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$;
21. $A=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}8\\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$;
22. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6\end{pmatrix}$;
23. $A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}8\end{pmatrix}$;
24. $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8\end{pmatrix}$; 26. $A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}7 & 0{,}8\\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$; 27. $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}5\end{pmatrix}$; 29. $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}$; 30. $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}8\\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0\end{pmatrix}$;

§3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Методи їх дослідження та розв'язання. Математичне моделювання економічних задач

5. **Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.** *Література*: [16], розд. I, §3, стор. 12-18.

6. **Матричний запис СЛАР та її розв'язання.** *Література*: [16], розд. I, §5-9, стор. 26-39, прикл. 1.7-1.14.

Розглянемо економічну задачу на складання математичної моделі. Одержану систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'яжемо трьома методами.

Приклад №3. Добовий раціон годування тварин складається з трьох видів кормів. Один кілограм корму I-го типу коштує 5 грн. і містить 1 од. жирів, 2 од. білків та 3 од. вуглеводів. Один кілограм II-го типу коштує 3 грн. і містить 2 од. жирів, 3 од. білків та 1 од. вуглеводів. Один кілограм корму III-го типу коштує 6 грн. і містить 3 од. жирів, 4 од. білків та 3 од. вуглеводів. Скільки кг корму кожного типу необхідно купувати щоденно, щоб тварини одержували жирів – 17 од., білків – 26 од. і 19 од. вуглеводів. Знайти вартість щоденного годування тварин.

Розв'язання. Оскільки необхідно визначити кількість кг корму кожного типу, то введемо позначення: x_1 – кількість корму I-го типу в кг, x_2 – кількість корму II-го типу в кг і x_3 – кількість корму III-го типу в кг. За умовою задачі жирів повинно бути 17 од., тоді, враховуючи кількість жирів в 1 кг корму кожного типу, можна записати: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17$. Аналогічно одержуємо рівняння для білків та вуглеводів: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 26$ і $3x_1 + x_2 + 3x_3 = 19$. А вартість корму буде складати $5x_1 + 3x_2 + 6x_3$ (грн.). Таким чином, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=17\\ 2x_1+3x_2+4x_3=26\\ 3x_1+x_2+3x_3=19\end{cases}. \tag{1.13}$$

Розглянемо розв'язання системи трьома методами.

1. Метод Крамера

Обчислимо головний визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}=9+6+24-27-4-12=-4$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо допоміжні визначники, заміняючи відповідні стовпці Δ вільними членами системи:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}17 & 2 & 3\\ 26 & 3 & 4\\ 19 & 1 & 3\end{vmatrix}=-12;\ \Delta x_2=\begin{vmatrix}1 & 17 & 3\\ 2 & 26 & 4\\ 3 & 19 & 3\end{vmatrix}=-16;\ \Delta x_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 17\\ 2 & 3 & 26\\ 3 & 1 & 19\end{vmatrix}=-8.$$

Тоді $x_1=\dfrac{\Delta x_1}{\Delta}=\dfrac{-12}{-4}=3$, $x_2=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta}=\dfrac{-16}{-4}=4$ і $x_3=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta}=\dfrac{-8}{-4}=2$. Таким чином, корму

І-го типу необхідно 3 кг, ІІ-го типу – 4 кг і ІІІ-го типу – 2 кг. При цьому вартість годування буде 5·3 + 3·4 + 6·2 =39 (грн.).

2. Матричний метод.

Запишемо систему (1.13) у матричній формі $AX = B$, де

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}17\\26\\19\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\text{ тоді } X = A^{-1}\cdot B.$$

Для знаходження матриці A^{-1} знайдемо всі її алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&4\\1&3\end{vmatrix}=9-4=5;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&4\\3&3\end{vmatrix}=-(6-12)=6;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=2-9=-7;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}=-(6-3)=-3;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=3-9=-6;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-(1-6)=5$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=8-9=-1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=-(4-6)=2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=3-4=-1.$$

Тоді одержану матрицю $\overline{A}=\begin{pmatrix}5&6&-7\\-3&-6&5\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ транспонуємо: $\overline{A}^T=\begin{pmatrix}5&-3&-1\\6&-6&2\\-7&5&-1\end{pmatrix}$, а оскільки $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\overline{A}^T$ і $\Delta = -4$, то $A^{-1}=-\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-3&-1\\6&-6&2\\-7&5&-1\end{pmatrix}$.

Знайдемо добуток матриць $A^{-1}\cdot B$, тобто

$$X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-3&-1\\6&-6&2\\-7&5&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\26\\19\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\cdot17-3\cdot26-1\cdot19\\6\cdot17-6\cdot26+2\cdot19\\-7\cdot17+5\cdot26-1\cdot19\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-12\\-16\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$x_1 = 3$, $x_2 = 4$ і $x_3 = 2$.

3. Метод Жордана-Гаусса.

Виписуємо розширену матрицю системи (1.13) і приводимо її до діагонального вигляду:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&17\\2&3&4&26\\3&1&3&19\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-2)\ \times(-3)\\ \leftarrow +\\ \leftarrow +\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&17\\0&-1&-2&-8\\0&-5&-6&-32\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&17\\0&1&2&8\\0&5&6&32\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-5)\\ \leftarrow +\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&17\\0&1&2&8\\0&0&4&8\end{array}\right)$$

З останнього рядка випливає, що $4x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 2$. Підставляючи у передостаннє рівняння $x_2 + 2\cdot2 = 8 \Rightarrow x_2 = 4$. Нарешті x_3 та x_2 підставляємо у перше рівняння: $2x_1 + 2\cdot4 + 3\cdot2 = 17 \Rightarrow x_1 = 17 - 14 = 3$.

Відповідь. Для годування тварин щоденно потрібно корму І-го типу – 3 кг, ІІ-го типу – 4 кг і ІІІ-го типу – 2 кг. При цьому вартість годування складатиме 39 грн.

Завдання №3

Скласти математичну модель та розв'язати її трьома способами: Крамера, Жордана-Гаусса та зворотної матриці. Записати економічний зміст одержаного розв'язку.

1. Нафтопереробний завод одержує три напівфабрикати: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину і 450 тис. л ізопентону. В результаті змішування цих трьох компонентів у співвідношенні 2:1:2 утворюється бензин А-93 вартістю 1200 грн. за 1 тис. л, у співвідношенні 3:1:3 – бензин А-76 вартістю 1000 грн. за 1 тис. л, у співвідношенні 2:2:3 – бензин А-95 вартістю 1500 грн. за 1 тис. л. Знайти кількість бензину кожної марки з урахуванням запасів напівфабрикатів і вартість випущеної продукції.

2. На промисловому комплексі по виробництву м'яса відгодовують свиней трьох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Вид корму	Запаси корму	Необхідна кількість корму (ц) для породи свиней		
		ранньостиглої (до 1 року)	середньостиглої (до 1,5 років)	пізньостиглої (до 2 років)
Грубі (сінне борошно, трав'ян.)	8000	3	2	3
Комбікорм	3000	1	1	1
Соковиті (коренеплоди, картопля)	6800	1	4	2
Вартість відгодівлі, грн.		90	100	140

Потрібно знайти поголів'я свиней кожної породи з урахуванням запасів корму і витрати на їхнє вирощування.

3. Для виготовлення взуття трьох моделей на фабриці використовується два сорти шкіри. Ресурси матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції приведені в таблиці.

Ресурси	Запас ресурсів	Витрати ресурсів на одну пару взуття за моделями		
		№1	№2	№3
Робочий час, люд-год	1000	1	2	2
Шкіра I сорту	500	2	1	0
Шкіра II сорту	1100	0	2	3
Прибуток, грн.		20	40	10

Знайти кількість продукції з урахуванням запасів і прибуток, одержуваний від виробництва.

4. Знайти поєднання посівів 3-х культур: пшениці, гречки та картоплі і прибуток від вирощеної продукції. Ефективність оброблення названих культур (у розрахунку на 1 га) характеризується показниками, значення яких приведені в таблиці.

Показники	Пшениця	Гречка	Картопля
Врожайність, ц	20	10	100
Витрати праці механізаторів, люд.-днів	0,5	1	5
Витрати кінно-ручної праці , люд.-днів	0,5	3	15
Прибуток від реалізації 1 ц продукції, грн.	4	10	3

Виробничі ресурси: 6000 га ріллі, 4800 люд.-днів праці механізаторів, 9000 люд.-днів кінно-ручної праці.

5. Нехай господарство має 850 гектарів землі, 15 тисяч тонн органічних добрив і 35 тисяч людино-днів. Є насіння картоплі, капусти та багаторічних трав. Знайти розподіл наявної землі і визначити прибуток господарства з урахуванням того, що кожний гектар землі під капустою принесе 1000 грн. доходу, картоплі 800 грн., а багаторічних трав 200 грн. Витрати праці на оброблення одного гектара капусти, картоплі і багаторічних трав дорівнюють відповідно 50, 30 і 15 людино-днів. Витрати органічних добрив на ті ж культури дорівнюють 20, 15 і 10 тоннам на гектар.

6. Для вантажних перевезень створюється автоколона. На придбання автомашин виділено 600 тис. грн. Можна замовити машини трьох марок – *А*, *Б* і *В*, які характеризуються даними приведеними в таблиці. Кількість машин повинна дорівнювати 32, а загальне число водіїв у автоколоні повинне бути 60 осіб.

Марка автомашини	Вартість машини, тис. грн.	Кількість водіїв, що обслуговують машину за зміну	Продуктивність машини за зміну, т/км
А	7	1	2100
Б	20	2	3600
С	23	2	3780

Визначити кількість автомашин кожної марки і знайти продуктивність (т/км) автоколони в розрахунку на одну добу.

7. На звірофермі можуть вирощуватися чорно-бурі лисиці, норки та песці. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, що повинні щодня одержувати тварини, приведена в таблиці. В ній же зазначені загальна кількість корму кожного виду, що може бути використано звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки хутрового звірка.

Вид корму	Кількість од. корму, що повинні одержувати			Загальна кількість корму
	лисиця	норка	песець	
I	2	3	3	186
II	4	5	1	240
III	6	5	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (грн)	16	15	12	

Визначити скільки лисиць, норок і песців можна вирощувати на звірофермі і прибуток від реалізації їхніх шкурок.

8. З трьох видів сировини необхідно скласти суміш, до складу якої повинно входити 21 одиниць хімічної речовини *A*, 42 одиниць – речовини *B* і 36 одиниці – речовини *C*. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1 кг сировини кожного виду, зазначено в таблиці. У ній же приведена ціна 1 кг сировини кожного виду.

Речовина	Кількість одиниць речовини, що міститься в 1 кг сировини виду		
	1	2	3
A	1	–	4
B	2	3	5
C	1	4	6
Ціна 1 кг сировини (грн.)	5	7	4

Скласти суміш, що містить задану кількість речовин даного виду і визначити її вартість.

9. Припустимо, що підприємство виробляє кілька видів цукерок *A*, *B* і *C*. Відомо, що реалізація 10-и кілограм цукерок *A* дає прибуток 9 грн., *B* – 10 грн. і *C* – 16 грн. Норми витрати сировини на виробництво 10 кг цукерок кожного виду приведені в табл.

Сировина	Норми витрат сировини			Запас сировини
	A	*B*	*C*	
Какао	18	15	12	360
Цукор	6	4	8	192
Наповнювач	5	3	3	88
Прибуток	9	10	16	

Цукерки можна виробляти в будь-яких кількостях (збут забезпечений), але запаси сировини обмежені. Необхідно визначити, скільки десятків кілограм цукерок необхідно зробити і знайти прибуток від їхньої реалізації.

10. Підприємство випускає три види продукції і використовує три типи основного устаткування: токарське, фрезерне і шліфувальне. Витрати часу на виготовлення однієї одиниці продукції для кожного з типів устаткування приведені в таблиці. У ній же зазначені загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Тип устаткування	Витрати часу (верстато-год) на одиницю продукції виду			Загальний фонд робочого часу (год)
	1	2	3	

Токарське Фрезерне Шліфувальне	2 1 1	1 2 1	3 1 –	300 280 168
Прибуток від реалізації одиниці продукції (грн.)	8	2	1	

Визначити обсяг випуску кожного з виробів з урахуванням фонду часу і загальний прибуток від їхньої реалізації.

11. На швейній фабриці для виготовлення трьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрат тканин всіх артикулів на пошиття одного виробу приведені в таблиці. У ній же зазначені наявна в розпорядженні фабрики загальна кількість тканин даного артикула і ціна одного виробу даного виду.

Артикул тканини	Норма витрат тканини (м) на один виріб виду			Загальна кількість тканини (м)
	1	2	3	
I II III	– 1 2	2 3 –	1 2 4	180 340 200
Ціна одного виробу (грн.)	6	4	7	

Визначити, скільки виробів кожного виду повинна зробити фабрика і вартість зробленої продукції.

12. Для виготовлення різних виробів *A*, *B* та *C* підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу *A*, *B* і *C*, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використано підприємством, приведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб			Загальна кількість сировини (кг)
	A	*B*	*C*	
I II III	8 4 7	– 2 6	10 5 9	684 348 620
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	15	7	19	

Визначити кількість виробів і загальну вартість усієї зробленої підприємством продукції.

13. Для підтримки нормальної життєдіяльності людині щодня необхідно споживати 130 г білків, 60 г жирів і 500 г вуглеводів. Кількість живильних речовин, що містяться в 1 кг кожного виду продуктів, а також ціна 1 кг кожного з цих продуктів приведені в таблиці.

Живильні речовини	Зміст (г) живильних речовин у 1 кг продуктів		
	м'ясо	молоко	картопля
Білки Жири Вуглеводи	210 20 –	20 40 50	21 2 250
Ціна 1 кг продуктів (грн.)	1,8	0,28	0,1

Скласти денний раціон, що містить добову норму потреби людини в необхідних живильних речовинах і знайти загальну вартість споживаних продуктів.

14. Продукцією міського молочного заводу є молоко, кефір і сметана, розфасовані в пляшки. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1020, 1060 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-год. На розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 ч. Усього для виробництва суцільномолочної продукції завод може використовувати 136000 кг молока. Основне устаткування може бути зайняте на протязі 15,7 машино-год, а автомати з розфасовки сметани – протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно дорівнює 300, 2200 і 13600 грн. Визначити в якій кількості можна щодня виготовляти заводу продукцію з урахуванням запасів і прибуток від виробленої продукції.

15. На меблевій фабриці зі стандартних аркушів фанери необхідно вирізувати заготівлі

трьох видів у кількостях, відповідно рівних 30, 31 і 28 шт. Кожен лист фанери може бути розрізаний на заготівлі трьома способами. Кількість одержуваних при даному способі розкрою приведено в таблиці. В ній зазначена величина відходів, що виходить при даному способі розкрою одного листа фанери.

Вид заготівлі	Кількість заготівель (шт.) при розкрої способом		
	1	2	3
I	2	3	6
II	5	2	4
III	2	4	3
Величина відходів (см^2)	12	13	16

Визначити, скільки аркушів фанери можна розкроїти і знайти кількість відходів.

16. При виробництві трьох видів кабелю виконується три групи технологічних операцій. Норми витрат на 1 км кабелю даного виду на кожній із груп операцій, прибуток від реалізації 1 км кожного виду кабелю, а також загальний фонд робочого часу, протягом якого виконуються ці операції, зазначені в таблиці.

Технологічна операція	Норми витрат часу (год) на обробку 1 км кабелю виду			Загальний фонд робочого часу (год)
	1	2	3	
Волочіння	1,2	1,8	1,6	1360
Накладення ізоляції	1,0	0,4	0,8	996
Скручування елементів у кабель	6,4	5,4	6,0	6642
Прибуток від реалізації 1 км кабелю (грн.)	1,2	0,8	1,0	

Визначити кількість кабелю, що випускається, з урахуванням фонду часу і прибуток від реалізації виготовленої продукції.

17. Для виробництва столів, шаф і тумб фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість наявних ресурсів кожного виду приведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб			Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	тумба	
Деревина (м^3):				
I виду	0,2	0,1	0,3	51
II виду	0,1	0,3	0,2	61,6
Трудомісткість (людино-год)	1,2	1,5	1,3	370
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	6	8	7	

Визначити, скільки столів, шаф і тумб фабрика може виготовляти і прибуток від їхньої реалізації.

18. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна одержати 44 од. живильної речовини A, 56 од. речовини B та 48 од. речовини C. Зазначені живильні речовини містять три види корму. Зміст живильних речовин у 1 кг кожного з видів кормів приведено в таблиці.

Живильні речовини	Кількість одиниць живильних речовин у 1 кг корми виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує одержання необхідної кількості живильних речовин і обчислити грошові витрати, якщо ціна 1 кг корму I-го виду складає 2 грн 30 коп, корму II-го виду – 3 грн 50 коп і корму III-го виду – 2 грн.

19. При підгодівлі посіву потрібно внести на 1 га ґрунту 8 одиниць хімічної речовини A, 21 – речовини $Б$, 9 – речовини B. Радгосп закуповує комбіновані добрива трьох видів I, II й III. У таблиці зазначений зміст хімічних речовин і ціна на одиницю ваги кожного виду добрив.

Хімічні речовини	Зміст речовини в одиниці ваги добрива		
	I	II	III
А	1	5	3
Б	12	3	5
В	4	4	2
Ціна	5	2	4

Визначити витрати по закупівлі необхідного радгоспові кількості добрив.

20. Трикотажна фабрика використовує для виробництва светрів, джемперів і кофточок чисту вовну, силон і нітрон, запаси яких складають відповідно 640, 500 і 300 кг. Кількість пряжі кожного виду (у кг), необхідної для виготовлення 10 виробів, а також прибуток, одержуваний від їхньої реалізації, приведені в таблиці.

Вид сировини	Витрати пряжі на 10 штук		
	Светри	Джемпери	Кофточки
Вовна	4	3	2
Силон	2	4	1
Нітрон	1	2	1
Прибуток	6	7	5

Установити план випуску виробів і визначити прибуток.

21. При складанні добового раціону годівлі худоби можна використовувати свіже сіно, силос і комбікорми. Раціон повинний містити: 1 кг білка, 90 г кальцію і 84 г фосфору. В таблиці приведені дані про зміст зазначених компонентів у 1 кг кожного корму і собівартість цих кормів.

Корм	Компоненти			Собівартість грн./кг
	кальцій, г/кг	білок, г/кг	фосфор, г/кг	
Сіно свіже	1,25	40	2	2,5
Силос	2,5	10	1	1,8
Комбікорм	3	30	3	4,5

Визначити раціон та його вартість.

22. На молочному комбінаті для виробництва молочного, вершкового морозива і пломбіру потрібне молоко натуральне, олія вершкова і цукор. Норми витрат зазначених продуктів на виробництво 1 т морозива приведені в таблиці. Прибуток від 1 тонни мороженого кожного виду складає 1200 грн. від молочного, 1500 від вершкового і 1800 від пломбіру.

Ресурси (т)	Норма витрат ресурсу на 1 т морозива			Загальна кількість ресурсів
	Молочне	Вершкове	Пломбір	
Молоко натуральне	750	820	900	107300
Олія вершкова	95	110	115	14000
Цукор	100	120	120	15000

Знайти кількість зробленої продукції з урахуванням запасів ресурсів і прибуток комбінату.

23. Фірма випускає три продукти: *А, В, С*. На виробництво одиниці продукту *А* потрібно затратити 1 год праці ІТП, 10 год фізичної праці і 3 кг сировини. Для одиниці продукту *В* відповідні показники дорівнюють 2 год, 4 год і 2 кг, для продукту *С* – 1 год, 5 год і 1 кг. Ресурси складають 420 год праці ІТП, 1530 год фізичної праці і 540 кг сировини. Вартість одиниці продукту *А* – 10 дол., продукту *В* – 8 дол. і продукту *С* – 9 дол. Знайти кількість одиниць продуктів, що випускаються, з урахуванням запасів ресурсів і прибуток фірми від їхньої реалізації.

24. Для виробництва продукції трьох видів *А, В* і *С* використовується три різні види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно 190, 210 і 236 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду і ціна одиниці продукції кожного виду приведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції

	виріб A	виріб B	виріб C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції (грн.)	10	14	12

Потрібно визначити кількість продукції, що випускається, і вартість її випуску.

25. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A, B і C використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду приведені в таблиці. В ній же зазначена загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана фабрикою, а також приведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	860
Патока	0,4	0,4	0,3	580
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі і прибуток від її реалізації.

26. Ліспромгосп має деревину трьох видів у кількостях: 1 – 800 м^3, 2 – 1300 м^3, 3 – 700 м^3 для виготовлення виробів A, B і C. Норми витрат деревини в м^3 на виготовлення одиниці кожного виробу і прибуток від реалізації одиниці виробу дані в таблиці.

Сировина	Норми витрати сировини на одиницю виробу		
	A	B	C
1	0,1	0,15	0,2
2	0,2	0,4	0,3
3	0,4	0,5	0,1
Прибуток, грн.	10	20	30

Визначити, скільки виробів кожного виду може зробити підприємство і знайти прибуток від реалізації усіх виробів.

27. У сплав входити 5% нікелю і 78% заліза. Для складання сплаву використовуються три види сировини, що містять нікель, залізо та інші речовини. Вартість різних видів сировини і процентний вміст у ньому відповідних компонентів сплаву представлені в таблиці.

Компоненти сплаву	Зміст компонентів для виду сировини, %		
	I	II	III
Залізо	75	90	85
Нікель	5	2	7
Інші	20	8	8
Вартість, грн. /кг	0,6	0,4	0,5

Визначити склад шихти і вартість 1 кг сплаву.

28. Поживність 1 кг сіна 0,4; 1 кг силосу – 0,2; 1 кг соломи – 0,2 кормової одиниці. Сіно містить у собі 90% сухої речовини, силос – 30%, а солома – 90%. Скільки варто давати корові на добу сіна, силосу і соломи, якщо вона повинна одержати з цими кормами 15 кг сухих речовин і 7 кормових одиниць, а сіно і солому дають порівну? Визначити витрати, якщо вартість 1 кг сіна 5,20 грн, 1 кг силосу – 7,50 грн; 1 кг соломи – 2,90 грн.

29. З Києва до Запоріжжя необхідно перевезти устаткування трьох типів: 84 одиниць типу I, 82 одиниць II-го типу і 114 одиниць III-го типу. Для перевезення устаткування завод може замовити три види транспорту A, $Б$ і B. Кількість устаткування кожного типу транспорту, що вміщається на визначений вид, а також змінні витрати, пов’язані з експлуатацією одиниці транспорту (грн.), приведені в таблиці.

Тип устаткування	Кількість устаткування для виду транспорту

	А	*Б*	*В*
I	3	2	4
II	4	1	2
III	3	13	5
Витрати	8	12	9

Спланувати перевезення і визначити транспортні витрати.

30. Металургійний цех випускає три види продукції: *А*, *Б* та *В*. Прибуток від тонни зробленої продукції кожного виду складає відповідно 35, 25 і 40 грн. Цех має у своєму розпорядженні необхідне устаткування, кожен тип якого має свій фонд робочого часу і продуктивність (див. таблицю).

Тип устаткування	Фонд часу	Продуктивність (т/год) виду продукції		
		А	*Б*	*В*
Піч випалу	2870	3,5	2,8	–
Травильний агрегат	610	0,08	0,08	0,12
Прокатний стан	430	0,07	0,1	0,08

Визначити план випуску продукції і прибуток від її реалізації.

§4 Вектори. Застосування векторної алгебри при розв'язанні економічних задач

7. **Вектори. Основні поняття.** *Література*: [16], розд. I, §14, стор. 65-67.

8. **Проекція вектора на вісь. Довжина вектора.** *Література*: [16], розд. I, §17, стор. 73-75, §18, стор. 75-81.

9. **Лінійні операції над векторами.** *Література*: [16], розд. I, §20, стор. 81-84.

10. **Скалярний добуток двох векторів та його властивості.** *Література*: [16], розд. I, §22, стор. 85-90.

11. **Векторний добуток двох векторів та його властивості.** *Література*: [16], розд. I, §23, стор. 90-94.

12. **Лінійна залежність векторів.** *Література*: [16], розд. I, §25, стор. 101-102.

13. **Ділення відрізка в заданому співвідношенні.** *Література*: [16], розд. I, §21, стор. 84-85.

Приклад №6 [10]**.** У цеху щоденно виробляється два види продукції: 50 одиниць I виду та 80 одиниць II виду. Витрати сировини (в кг) і робочого часу (в год.) на виробництво одиниці продукції кожного виду, а також вартість (у грн.) одиниці продукції наведено нижче в таблиці. Визначити щоденні показники витрати сировини S, робочого часу T та вартість V, виробленої за день продукції.

Вид продукції.	Кількість продукції, шт.	Витрати сировини, кг	Витрати часу, год	Вартість, грн.
I	50	3	4	84
II	80	5	6	140

Розв'язання. За даними таблиці можна записати чотири вектори, що характеризують виробничий процес: $\vec{q}=(50;80)$ – вектор асортименту продукції; $\vec{s}=(3;5)$ – вектор витрати сировини; $\vec{t}=(4;6)$ – вектор витрати робочого часу; $\vec{v}=(84;140)$ – вектор вартості продукції. Тоді шукані величини є скалярними добутками вектору асортименту на три інші вектори: $S=(\vec{q},\vec{s})=50\cdot3+80\cdot5=550\text{кг}, T=(\vec{q},\vec{t})=50\cdot4+80\cdot6=680\text{год}, V=(\vec{q},\vec{v})=50\cdot84+80\cdot140=$ $=15400$ грн. Якщо треба, то можна підрахувати вартість щоденного випуску продукції в доларах. Якщо курс долара визначається співвідношенням 1\$ = 5,05 грн., то 1 грн. = $1/5{,}05$\$. Поклавши $\alpha=1/5{,}05$, розглянемо $\alpha\cdot\vec{v}=1/5{,}05\cdot(84;140)=(16{,}63;27{,}72)$ – вектор вартості продукції в доларах. Тоді вартість всієї виробленої продукції становить $V = \left(\vec{q}, \alpha\vec{v}\right) = 50 \cdot 16{,}63 + 80 \cdot 27{,}72 = 3049{,}1$ $.

Завдання №4

У цеху щоденно виробляється декілька видів продукції. Витрати сировини (в кг), робочого часу (в год.) на виробництво одиниці продукції кожного виду і вартість (у грн.) одиниці продукції наведено нижче в таблиці. Визначити щоденні показники витрати сировини S, робочого часу T та вартість V, виробленої за день продукції у валюті, зазначеної у варіанті по курсу НБУ на день розрахунку, який обов'язково вказати у відповіді.

1. Обчислити у євро

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	120	2	3	120
II	95	7	4	100
III	180	4	2	95

2. Обчислити у доларах США

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	100	1	3	85
II	82	4	5	140
III	95	7	2	112
IV	140	2	1	70

3. Обчислити у японських єнах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	115	1,5	1,25	85
II	100	2,5	4	125
III	200	3,2	1,5	83

4. Обчислити у австралійських доларах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	85	1	5	75
II	50	2	2	65
III	90	4	4	30
IV	110	2	9	50

5. Обчислити у англійських фунтах стерлінгів

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	90	1,25	5,1	56
II	120	2,6	4,3	78
III	115	3,8	2,5	98

6. Обчислити у білоруських рублях

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	15	1	2	20
II	23	1	1	25
III	18	2	1	15
IV	20	4	0,5	30

7. Обчислити у датських кронах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	25	1,23	2,5	2,78
II	29	2,5	1,7	3,4
III	44	1,8	2,3	5,7

8. Обчислити у ісландських кронах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	120	1	1,3	15
II	100	0,5	2	23
III	160	2	3	34
IV	95	1	1,5	20

9. Обчислити у казахських тенге

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	80	3,33	1,55	25,6
II	162	3,05	2,1	42
III	30	2,45	3,2	27,3

10. Обчислити у канадських доларах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	250	0,3	0,25	0,8
II	140	0,7	0,75	0,4
III	300	0,5	0,15	0,6
IV	280	0,2	0,1	0,75

11. Обчислити у норвезьких кронах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	50	2	5	12
II	70	3	4	16
III	65	4	3	13
IV	100	2	5	11

12. Обчислити у сінгапурських доларах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	50	12	4,33	7,58
II	180	9	5,97	10,02
III	205	8,76	3,27	5,62

13. Обчислити у турецьких лірах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	78	2,64	8,79	5,33
II	92	6,8	6,45	7,62
III	103	4,92	9,85	8,44

14. Обчислити у шведських кронах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	120	2	1	7,5
II	200	1,5	4	4
III	150	4	5	5
IV	180	1	3	6

15. Обчислити у російських рублях

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	800	0,5	1	0,85
II	467	0,25	1,5	0,95
III	625	0,75	2	1,5
IV	128	1	1	0,75

16. Обчислити у швейцарських франках

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	98	0,25	1,2	0,75
II	103	0,33	0,8	0,98
III	45	0,55	1,6	1,2

17. Обчислити у азербайджанських манатах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	68	1,45	2,33	5,44
II	73	2,05	5,4	6,7
III	109	0,79	1,98	2,5

18. Обчислити у чеських кронах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	52	2,5	3	2,5
II	100	1,5	2	3
III	88	2	2,5	4,5
IV	44	3	4	5

19. Обчислити у естонських кронах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	90	3,5	0,86	1,2
II	85	4,33	0,47	2,4
III	105	2,1	0,77	1,65

20. Обчислити в угорських форинтах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	120	0,5	2	1,5
II	200	1,5	3	2,5
III	180	1	1	3
IV	150	2	3	5

21. Обчислити у литовських літах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	83	0,35	1,52	2,54
II	97	0,44	1,98	3,02
III	102	0,85	2,36	3,98

22. Обчислити у латвійських латах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	25	1,5	1,5	1,5
II	35	2,5	3	2,5
III	40	3	2	3
IV	30	2	1	2

23. Обчислити у туркменських манатах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	15	1,2	1,5	12
II	25	1	1	14
III	20	2,3	1,5	17
IV	10	2	1,25	12

24. Обчислити у польських злотих

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	52	11	1,5	12,5
II	63	10	2,5	10,6
III	75	12	1	11
IV	82	9	1	13

25. Обчислити у австралійських доларах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	12	14,6	2,9	120,3
II	17	13,56	3,5	98,5
III	20	12,5	2,7	83,22

26. Обчислити у молдавських леях

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	1250	0,12	1,65	0,75
II	1300	0,42	1,72	0,65
III	1500	0,23	1,56	0,78

27. Обчислити в узбецьких сумах

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	22	0,9	1,3	1,55
II	12	0,5	1,21	1,98
III	15	0,8	1,11	2,55
IV	19	1,2	2,77	3,05

28. Обчислити у доларах США

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	125	1,5	1,66	1,5
II	135	1,4	1,44	1,7
III	170	1,25	2,33	1,3

29. Обчислити у євро

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	200	1	0,9	1,2
II	180	0,8	0,85	1
III	190	0,7	0,7	0,9
IV	270	0,5	0,65	0,8

30. Обчислити у російських рублях

Вид прод.	Кількість прод., шт.	Витрати сиров., кг	Витрати часу, год.	Вартість, грн.
I	30	2	1,5	2,5
II	40	1,7	1,25	1,9
III	70	1,2	0,7	1,55

§5 Використання кривих другого порядку в економічних задачах

Приклад №11 [15]. Два підприємства A і B виробляють продукцію з однією і тією же оптовою відпускною ціною m за один виріб. Однак автопарк, що обслуговує підприємство A, оснащений більш новими і більш могутніми вантажними автомобілями. Внаслідок цього транспортні витрати на перевезення одного виробу складають на 1 км: для підприємства A – 10 грош. од., а для підприємства B – 20 грош. од. Відстань між підприємствами 300 км. Як територіально повинний бути розділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача при навантаженні виробів і їхньому транспортуванню були мінімальними?

Розв'язання. Позначимо S_1 і S_2 – відповідні відстані до ринку від пунктів A та B. Тоді витрати споживачів становлять $f(A) = m + 10S_1$; $f(B) = m + 20S_1$. Знайдемо множину точок, для яких $S_1 = 2S_2$, тобто ті випадки розміщення ринку, коли $f(A) = f(B)$:

$$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ S_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2}\ ; \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(300 - x)^2 + y^2}\ ; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 360000 - 2400x + 4x^2 + 4y^2; \Rightarrow (x - 400)^2 + y^2 = 200^2.$$

Отримане рівняння є рівнянням кола (рис. 1.11). Таким чином, для споживача усередині кола вигідніше купувати в пункті B, поза колом – у пункті A, на колі – байдуже.

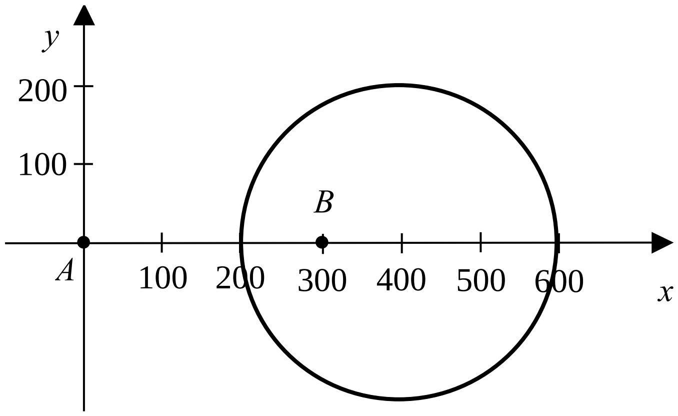


Рис. 1.11

Завдання №5

Розв'язати задачу та зробити схематичний рисунок. Дві фірми, що розташовані одна від одної на відстані $50\cdot(N + h + 1)$ км, виробляють деякі однакові вироби. Ціна реалізації одиниці виробу для обох фірм однакова і дорівнює p. Транспортні витрати на перевезення одиниці виробу від фірми A до споживача складають $(65 - 2\cdot N + h)$ грн на 1 км, а від B – $(2\cdot N + h)$ грн. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу на фірмах A та B повинні бути однаковими? (N – номер варіанту, h – номер групи).

§6 Застосування похідної в економіці

11. **Економічний зміст похідної.** *Література*: [16], розд. II, §19-21, стор. 110-121.

Якщо на момент часу t_0 виробник виготовив $f(t_0)$ одиниць продукції, то відношення $\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}$, де Δf – приріст випущеної продукції за час Δt, називають *середньою продуктивністю* праці виробника за час Δt, а границю

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t} = p(t_0) \tag{2.11}$$

– *продуктивністю праці* виробника в момент часу t_0.

Якщо функція $y = C(x)$ виражає залежність витрат виробництва y від кількості випущеної продукції x, то $C'(x)$ – *граничні (маргінальні) витрати виробництва*, що характеризують додаткові витрати на виготовлення одиниці випущеної продукції. Аналогічно означають граничний дохід і граничний прибуток, якщо функція $y = f(x)$ виражає відповідну залежність доходу чи прибутку від кількості випущеної продукції.

У випадках, коли треба обчислювати відсоток приросту (відносний приріст) залежної змінної, що відповідає відсотку приросту незалежної змінної, тоді використовують поняття еластичності функції (відносної похідної), тобто *еластичність* функції $y = f(x)$ відносно аргументу x обчислюється за формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x). \tag{2.12}$$

Чисельно еластичність $E_x(y)$ дорівнює приблизному відсотковому приросту функції (підвищення або зниження), відповідному приросту незалежної змінної на 1%.

Наслідок. З формули (2.10) можна одержати ще одну економічну величину, що характеризує виробництво: $\frac{x}{y} \cdot f'(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{y} = x(\ln y)' = xT_y$, де *темп зміни* функції:

$$T_y = (\ln y)'. \tag{2.13}$$

Приклад №14. Нехай споживання залежить від національного доходу таким чином

$C = 0{,}01y^2 + 0{,}2y + 50$. Знайти граничні схильності до споживання і заощадження, коли національний доход складає 30 одиниць ($y = 30$).

Розв'язання. Знаходимо граничну схильність до споживання, диференціюючи за Y функцію споживання: $C'_y = \frac{dC}{dy} = 0{,}02y + 0{,}2$. Підставляємо значення національного доходу, що дорівнює 30 одиницям: $C'(y) = 0{,}02 \cdot 30 + 0{,}2 = 0{,}8$. Знаходимо граничну схильність до заощадження, користуючись рівністю, $S'(y) = 1 - C'(y) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Таким чином, при даному рівні національного доходу суспільство більше схильне проїдати його. Тобто, якщо національний доход збільшується на 1 одиницю від рівня 30, споживання виросте на 0,8 і тільки 0,2 одиниці підуть на інвестиції.

Приклад №15. Нехай залежність витрат виробництва від обсягу виробленої продукції виражається формулою $C = 20q - 0{,}05q^3$ грош. од. Визначити середні та маргінальні витрати при обсязі продукції вартістю $q = 10$ грош. од. Визначити швидкість маргінальних витрат та дати економічний зміст одержаних результатів.

Розв'язання. Функція середніх витрат на одиницю продукції визначається за формулою $\overline{C} = C/q$, тобто: $\overline{C} = 20 - 0{,}05q^2$, звідки $\overline{C}(10) = 20 - 0{,}05 \cdot 100 = 15$ грош. од.

Маргінальні (граничні) витрати визначаються за формулою (2.11): $C' = 20 - 0{,}15q^2$, звідки $C'(10) = 20 - 0{,}15 \cdot 100 = 5$ грош. од.

Якщо взяти другу похідну від функції витрат, одержимо швидкість маргінальних витрат, тобто $C'' = -0{,}03q$, що означає при всіх додатних значеннях q функція маргінальних витрат спадна.

Таким чином, при середніх витратах на виробництво одиниці продукції в 15 грош. од. додаткові витрати на виробництво одиниці продукції складають 5 грош. од. і не перевищують середніх витрат, при цьому з ростом q маргінальні витрати будуть постійно падати.

Приклад №16. Обчислити еластичність функції $y = 3x - 6$ та визначити її економічний зміст.

Розв'язання. За формулою (2.12) маємо: $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2}$. Якщо, наприклад, $x = 10$, то еластичність функції дорівнює числу $\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$. Це означає, якщо x зросте на 1%, функція y також зросте на 1,25%.

У випадках, якщо треба визначити не величину попиту, а зміну попиту, яка викликана певною зміною ціни, тоді визначають *еластичність попиту відносно ціни*. Припустимо, що попит q залежить від ціни p: $q = f(p)$. Тоді еластичність попиту відносно ціни має вигляд:

$$E_c = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}. \tag{2.14}$$

Еластичність попиту відносно ціни приблизно визначає, як зміниться попит на даний товар, якщо його ціна зросте на 1%.

Зауваження. У більшості випадків функція попиту є спадною, тобто з підвищенням ціни на товар попит на нього знижується. В таких випадках $\frac{dq}{dp} < 0$ і щоб уникнути від'ємних чисел використовують на практиці таку формулу

$$E_c = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}. \tag{2.15}$$

Якщо $E_c > 1$, тобто підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту більше, ніж на 1%, говорять, що попит еластичний; якщо $E_c = 1$, тобто підвищенню ціни на 1% відповідає зниженню попиту на 1%, то говорять, що попит нейтральний; якщо $E_c < 1$, говорять, що попит нееластичний.

Приклад №17. Обчислити еластичність попиту, якщо залежність попиту від ціни виражається формулою $q = 10 – p$.

Розв'язання. Маємо $E_c = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{10-p}\cdot(-1) = \frac{p}{10-p}$. Якщо, наприклад, $p = 2$, то $E_c = \frac{2}{10-2} = \frac{1}{4}$. Це означає, що при ціні дві одиниці підвищення ціни на 1% викличе зниження попиту на 0,25%, тобто попит нееластичний.

Завдання №6

Завдання складається з чотирьох задач, умови яких однакові для всіх варіантів.

А. Знайти граничні схильності до споживання і заощадження, коли національний доход складає $5\cdot h + N$ одиниць, а споживання залежать від національного доходу таким чином $C = 0{,}01\cdot hY^2 + \frac{0{,}1\cdot h}{2N}Y + (10\cdot N - h)$*.

Б. Нехай залежність витрат виробництва від обсягу виробленої продукції виражається формулою $C = 50\cdot(N + h)q – 0{,}005\cdot(30h – N +1)q^3 + 2010$* грош. од. Визначити середні та маргінальні витрати при обсязі продукції вартістю $q = 10$ грош. од. Визначити швидкість маргінальних витрат та дати економічний зміст одержаних результатів.

В. Обчислити еластичність функції $y = \frac{hx^3 + Nx^2}{2N + x}$* при $x = 1$ та визначити її економічний зміст.

Г. Обчислити еластичність попиту $q = \frac{hp - (h+1)p^3}{3h + Np}$* від зміни ціни при $p = 1$ та визначити його економічний зміст.

* h – номер групи, N – номер варіанту.

§7 Використання поняття екстремуму функції в економічних задачах

13. **Екстремум функції однієї змінної.** *Література*: [16], розд. ІІ, §31, стор. 151-167.

Приклад №19. [10]. Обсяг продукції, виробленої бригадою робітників, описується функцією $y = –t^3 + 6t^2 + 120t + 40$ (од.), $1 \le t \le 8$, де t – робочий час (год). Визначити продуктивність праці та темп зміни продуктивності праці протягом робочого часу. Дати економічний зміст одержаних результатів.

Розв'язання. За формулою (2.11) знаходимо функцію продуктивності праці $p(t) = y'(t) = – 3t^2 + 12t + 120$ (од. за год.). Визначимо знакосталість продуктивності праці протягом робочого дня. Для цього знайдемо точки перетину з віссю Ot, тобто $– 3t^2 + 12t + 120 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{11}$. Звідки, враховуючи, що $p(t)$ – описує параболу, гілками униз, то на проміжку $\left(2 - 2\sqrt{11}; 2 + 2\sqrt{11}\right)$ або (–4,63; 8,63), тобто протягом усього робочого часу функція продуктивності праці додатна. Знайдемо момент часу t, в який продуктивність праці досягла свого максимального значення та проміжки зростання (спадання) функції. Для цього знайдемо $p'(t) = y''(t) = – 6t + 12$ та прирівняємо до нуля. Отже, $– 6t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$. Таким чином, продуктивність зростала на проміжку часу [1; 2] і спадала на проміжку часу [2; 8]; причому на початку робочого дня $p(1) = 129$, $p_{\max}(2) = 132$, наприкінці – $p(7) = 57$.

Темп зміни продуктивності праці визначаємо за формулою (2.13): $T_p(t) = \frac{p'}{p} = \frac{-6t + 12}{-3t^2 + 12t + 120}$. Якщо $t = 1$ (тобто через годину після початку роботи), то $T_p(1) \approx$

0,05 год$^{-1}$, а якщо $t = 7$ (тобто за годину до її закінчення), то $T_p(7) \approx -0{,}5$ год$^{-1}$. Отже, на кінець робочого дня продуктивність праці та її темп значно знижуються; при цьому зміна знака з плюса на мінус означає, що збільшення продуктивності праці у перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Приклад №20. Припустимо, що в короткостроковому плані виробнича функція залежить тільки від чисельності персоналу фірми, тобто $Q = f(L) = 40\sqrt{L} - 2L$, де Q – випуск продукції, а L – число працюючих. Потрібно визначити чисельність персоналу, при якій випуск Q досягає максимального значення.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки, тобто обчислюємо похідну і прирівнюємо її до нуля: $f'(L) = \dfrac{dQ}{dL} = 40\dfrac{1}{2\sqrt{L}} - 2 = \dfrac{20}{\sqrt{L}} - 2 = 0 \Rightarrow \dfrac{10}{\sqrt{L}} = 1$. Розв'язуючи рівняння, знаходимо $L = 100$. Обчислюємо другу похідну: $f''(L) = \dfrac{d^2Q}{dL^2} = \left(20L^{-1/2} - 2\right)' = 20 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)L^{-3/2} = -10L^{-3/2}$.

При $L = 100$ маємо $f''(100) = -0{,}01 < 0$. Отже, в цій точці максимум. Відповідний випуск продукції $Q = f(100) = 40 \cdot \sqrt{100} - 2 \cdot 100 = 200$.

Таким чином, максимальний випуск продукції складатиме 200 одиниць при чисельності персоналу у 100 осіб.

Завдання №7

Завдання складається з двох задач, умови яких однакові для всіх варіантів.

А. Обсяг продукції, виробленої бригадою робітників, описується функцією $y = -t^3 + (10h - N + 21)t^2 + (N + 10h)t + 2010$* (од.), $1 \le t \le 8$, де t – робочий час (год). Визначити продуктивність праці та темп зміни продуктивності праці протягом робочого дня. Дати економічний зміст одержаних результатів.

Б. Визначити чисельність персоналу, при якій випуск Q досягає максимального значення, якщо в короткостроковому плані виробнича функція залежить тільки від чисельності персоналу фірми, тобто $Q = 3 \cdot N \cdot h \cdot L^2 - 0{,}5 \cdot L^3 + 10 \cdot N^2 \cdot h$*, де Q – випуск продукції, а L – число працюючих.

*h – номер групи, N – номер варіанту.

§8 Екстремум функції багатьох змінних в економічних задачах

16. **Використання екстремуму в економічних задачах**. *Література*: [16], розд. III, §12, стор. 196-201.

Як і у випадку функції однієї змінної існує поняття *еластичності виробничої функції* $z = f(x, y)$ щодо чинників виробництва x і y, яке встановлюється так:

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (2.22)$$

і вказує приблизно процентний приріст виробничої функції (підвищення, зниження), що відповідає приросту чинника x на 1% за умови, якщо чинник y не змінюється;

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (2.23)$$

і вказує приблизно відсотковий приріст виробничої функції, що відповідає приросту чинника y на 1% за умови, якщо чинник x не змінюється.

Приклад №23. Для випуску деякого товару визначена виробнича функція $f(x, y) = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$, де x, y – чинники виробництва. Визначити: а) закон зміни виробничої функції; б) еластичність функції за кожним чинником; в) коефіцієнт еластичності за чинниками при $x = 1$, $y = 1$.

Розв'язання. а) Для визначення зміни виробничої функції за чинниками x і y відповідно, необхідно знайти $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 20 + 8x + 3y$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10 - 4y + 3x$.

б) За визначенням еластичність функції за кожним з чинників така: $E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}(20 + 8x + 3y)$, $E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}(10 - 4y + 3x)$, де $z = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$.

в) Обчислимо коефіцієнти еластичності при $x = 1$, $y = 1$. Врахуємо, що $z(1,1) = 35$, тоді: $E_x(z) = \frac{20+8+3}{35} = \frac{31}{35} \approx 0{,}89$, $E_y(z) = \frac{10-4+3}{35} = \frac{9}{35} \approx 0{,}26$.

Таким чином, зі збільшенням чинника x на 1% відбудеться відносне збільшення заданої виробничої функції приблизно на 0,89% (за умови стабільності чинника y). При збільшенні чинника y на 1% і незмінності чинника x виробнича функція збільшиться приблизно на 0,26%. Виходить, найбільший вплив на виробничу функцію $z = f(x, y)$ робить чинник x.

Зауваження. Від'ємне значення коефіцієнта еластичності показує зменшення виробничої функції при збільшенні відповідного чинника. Наприклад, якщо $E_x(z) = -0{,}08$ і $z = f(x, y)$ – функція випуску продукції, то збільшення чинника x на 1% приводить до зниження випуску продукції на 0,08%.

Приклад №24. Фірма робить два види товарів G_1 і G_2 і продає їх за ціною 1000 грош. од. і 800 грош. од. відповідно. Об'єми випуску товарів – Q_1 і Q_2. Функція витрат має вид $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Потрібно знайти такі значення Q_1 і Q_2, при яких прибуток, одержуваний фірмою, максимальний і знайти цей прибуток.

Розв'язання. Сумарний доход від продажу товарів G_1 і G_2: $R = 1000Q_1 + 800Q_2$. Прибуток П – це різниця між доходом R і витратами C, тому $\text{П} = R - C$ $=(1000Q_1 + 800Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2)$, або $\text{П}(Q_1, Q_2) = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$. Це і є функція, максимум якої необхідно знайти. Для знаходження стаціонарних точок, визначаємо частинні похідні першого порядку від функції $\text{П}(Q_1;Q_2)$ і прирівнюємо їх до нуля: $\text{П}'_{Q_1}(Q_1, Q_2) = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2$, $\text{П}'_{Q_2}(Q_1, Q_2) = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$, $\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0, \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$ Розв'язок системи: $Q_1 = 100$, $Q_2 = 300$. Таким чином, стаціонарна точка $M_0(100; 300)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$A = \left.\frac{\partial^2 \text{П}}{\partial Q_1^2}\right|_{M_0} = -4, \quad B = \left.\frac{\partial^2 \text{П}}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right|_{M_0} = -2, \quad C = \left.\frac{\partial^2 \text{П}}{\partial Q_2^2}\right|_{M_0} = -2.$$

Отже, $A < 0$, $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, тобто, точка $M_0(100; 300)$ є точкою максимуму. Максимальний прибуток досягається при об'ємах виробництва $Q_1 = 100$, $Q_2 = 300$, а сума максимального прибутку $\text{П}(100; 300) = 170\,000$ грош. од.

16. **Метод найменших квадратів**. *Література*: [16], розд. III, §11, стор. 193-196.

На практиці функціональна залежність між змінними задається у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Для аналізу отриманого розв'язку підбирають функцію, яка відповідала б таблиці експериментальних даних. Для цього зображують точки $M_i(x_i, y_i)$ на координатній площині, потім роблять висновок про вигляд функції $y = f(x)$ і після цього підбирають такі коефіцієнти, при яких функція щонайкраще відповідала б таблиці. Для підбору значень коефіцієнтів використовують *метод найменших квадратів*. Так у випадку, якщо функція $f(x) = ax + b$, тобто лінійна, тоді $S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$. Ця функція з двома змінними a і b набуває мінімуму в точках, для яких $S'_a = 0$ і $S'_b = 0$, тобто

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$ Перепишемо систему у вигляді $$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn = \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Дана система є системою лінійних рівнянь відносно a і b.

Приклад №25. Досліджуючи залежність врожайності від кількості внесених добрив (y – врожайність у *ц/га*, x – кількість добрив у *ц/га*) одержали такі дослідні дані:

x	0	1	2	3	4
y	16	18	21	24	25

Знайти залежність врожайності від кількості внесених добрив.

Розв'язання. Побудуємо дослідну лінію залежності y від x (рис. 2.2). Як видно з рисунка, на проміжку [0;4] залежність y від x досить точно відображається лінійною функцією $y = ax + b$. Знайдемо параметри a, b за методом найменших квадратів. Для цього складемо і розв'яжемо відносно a, b систему. Для цього побудуємо таку таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	16	0	0
1	18	1	18
2	21	4	42
3	24	9	72
4	25	16	100
$\sum x_i = 10$	$\sum y_i = 104$	$\sum x_i^2 = 30$	$\sum x_i y_i = 232$

Тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases} 30a + 10b = 232, \\ 10a + 5b = 104, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 15a + 5b = 116, \\ 10a + 5b = 104. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо, що a = 2,4; b = 16. Отже, залежність врожайності від кількості внесених добрив на 1 *га* найкраще відображає лінійна функція вигляду y = 2,4 x + 16 (рис. 2.3). Тобто у випадку внесення у ґрунт добрив 2,6 *ц/га* отримаємо врожайність приблизно 22,24 *ц/га*.

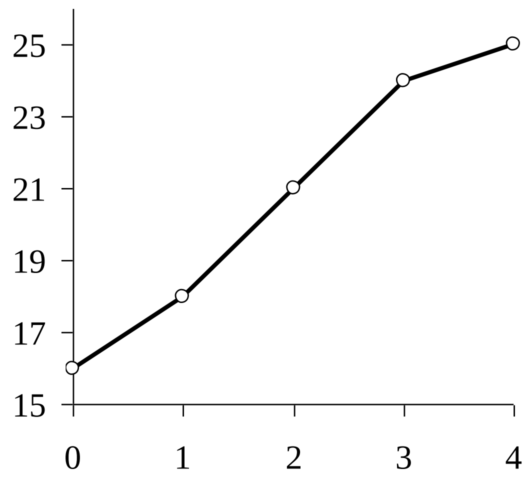


Рис. 2.2

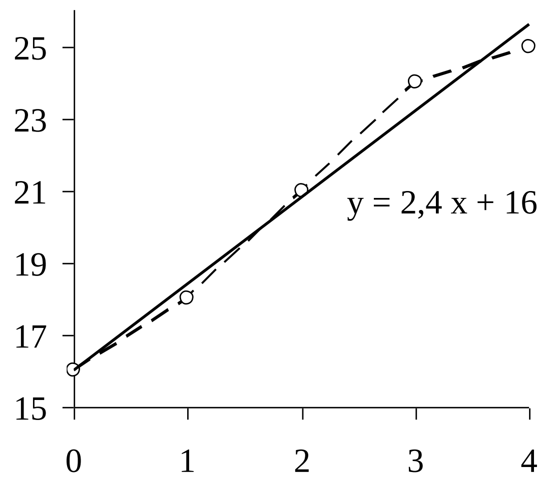


Рис. 2.3

Завдання №8

Завдання складається з двох задач, умови яких однакові для всіх варіантів.

А. Дана виробнича функція $z = \sqrt{x}y^3 + (hx + N)y^h + \dfrac{(h-N)x^2}{hx+3y}$*, де x – витрати живої праці, y – витрати уречевленої праці. Знайти коефіцієнти еластичності $E_x(z)$ та $E_y(z)$ в точці (1,1) та пояснити їх економічний зміст.

Б. Фірма виробляє два види товарів G_1 і G_2 в кількостях Q_1 і Q_2 відповідно. Функція витрат має вигляд $C = 2(N + h)Q_1 + hQ_1Q_2 + 2(N + h)Q_2$, а крива попиту для кожного товару $P_1 = 500 - 3NQ_1 + hQ_2$, $P_2 = 300 + hQ_1 - 3NQ_2$, де P_1, P_2 – ціна одиниці товару видів G_1 і G_2 відповідно. Знайти максимальний прибуток, який може бути досягнутий на даному підприємстві.

В. Припускаючи, що між наступними даними є лінійна залежність, знайти параметри a і b, застосувавши метод найменших квадратів** та побудувати графіки.

1. Дані про ріст продуктивності праці і зниження собівартості продукції по підприємству за 5 років стосовно базисного періоду, прийнятому за одиницю:

Час у роках	1	2	3	4	5
Продуктивність праці	$1 + h \cdot 0{,}05$	$1 + h \cdot 0{,}09$	$1 + h \cdot 0{,}13$	$1 + h \cdot 0{,}18$	$1 + h \cdot 0{,}24$
Собівартість продукції	$10 - N \cdot 0{,}02$	$10 - N \cdot 0{,}05$	$10 - N \cdot 0{,}07$	$10 - N \cdot 0{,}1$	$10 - N \cdot 0{,}12$

2. Дані про ціну на нафту та індекс акцій нафтових компаній:

Ціна на нафту, грош. од.	$17 + h \cdot 0{,}05$	$17 + h \cdot 0{,}16$	$18 + h \cdot 0{,}37$	$18 + h \cdot 0{,}58$	$19 + h \cdot 0{,}74$	$19 + h \cdot 0{,}95$
Індекс акцій нафтових компаній, грош. од.	$507 + N \cdot 5$	$507 + N \cdot 3$	$500 + N \cdot 10$	$500 + N \cdot 15$	$507 + N \cdot 17$	$507 + N \cdot 13$

* h – номер групи, N – номер варіанту.

**Студенти, у яких непарний варіант розв’язують першу задачу, парний – другу.

§9 Використання визначеного інтегралу в економічних задачах

19. **Визначений інтеграл.** *Література*: [16], розд. IV, §11,12, стор. 229-231.

20. **Знаходження капіталу за відомими інвестиціями.** *Література*: [16], розд. IV, §22, стор. 258-269.

Визначення. Якщо функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва з часом, тоді обсяг продукції F, виготовленої за проміжок часу $[0,T]$ обчислюється за формулою:

$$F = \int_0^T f(t)dt, \tag{2.28}$$

а обсяг продукції, що випускається, за проміжок $[t_1, t_2]$ обчислюється за такою формулою

$$F = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \tag{2.29}$$

Визначення. Чисті інвестиції, як похідна від капіталу за часом t, обчислюються за такою формулою $I(t) = \dfrac{d}{dt}K(t)$, де $K(t)$ – капітал, залежний від часу, $I(t)$ – чисті інвестиції. Якщо потрібно визначити приріст капіталу за період часу з моменту часу t_1 до t_2, тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$, тоді можна написати:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt. \tag{2.30}$$

Приклад №28. Визначити обсяг продукції, виготовленої робітником за другу годину робочого дня, якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t)=\dfrac{2}{3t+4}+3$.

Розв'язання. Шуканий обсяг визначається за формулою (2.29).

$$F=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{2}{3t+4}+3\right)dt=\left(\frac{2}{3}\ln|3t+4|+3t\right)\Bigg|_1^2=\frac{2}{3}\ln 10-\frac{2}{3}\ln 7+6-3=\frac{2}{3}\ln\frac{10}{7}+3\approx 3 \text{ од.}$$

Відповідь: обсяг продукції, виготовленої робітником за другу годину, дорівнює приблизно 3 од.

Приклад №29. Чисті інвестиції задані функцією $I(t)=7000\sqrt{t}$. Визначити: а) приріст капіталу за три роки; б) через скільки років приріст капіталу становитиме 50 000 грош. од.

Розв'язання. а) використовуємо формулу (2.30), поклавши t_1 = 0, t_2 = 3:

$$\Delta K=K(3)-K(0)=\int_0^3 7000\sqrt{t}dt=7000\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3=7000\cdot\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}=24248{,}71 \text{ грош. од.}$$

б) позначивши шуканий відрізок часу через T отримаємо $\Delta K=\int_0^T I(t)dt$, де ΔK = 50000 і

$I(t)=7000\sqrt{t}$. Тоді $50000=\int_0^T 7000\sqrt{t}\cdot dt \Rightarrow \int_0^T 7000t^{\frac{1}{2}}dt=7000\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^T=7000\cdot\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$50000=7000\cdot\frac{2}{3}T^{\frac{3}{2}}$; $T^{\frac{3}{2}}=\frac{50\cdot 3}{14}=10{,}71$; $T=10{,}71^{\frac{2}{3}}\approx 5$ (років).

Відповідь: а) за три роки приріст капіталу становитиме 24248,71 грош. од.; б) через п'ять років приріст капіталу становитиме 50000 грош. од.

Приклад №30. [10] Нехай дана функція маргінальних витрат виробництва x од. продукції за певний час має вигляд $f(x)$ = 50 – 0,02 x. Пояснити, як зміняться витрати виробництва (у грош. од.) при збільшенні випуску продукції від 100 до 120 од.

Розв'язання. Дана функція маргінальних витрат є похідною від функції витрат (2.11). Тоді функція витрат буде мати вигляд: $\int_{x_1}^{x_2}C'(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$, де x_1 = 100, а x_2 = 120. Отже,

$$\int_{100}^{120}C'(x)dx=\int_{100}^{120}(50-0{,}02x)dx=(50x-0{,}01x^2)\Big|_{100}^{120}=56 \text{ грош. од.}$$

Відповідь: При збільшенні випуску продукції від 100 до 120 од. відбудеться зростання витрат виробництва на 56 грош. од.

Визначення. Розглянемо функцію $y = f(x)$, що характеризує нерівномірність розподілу доходів серед населення, де y – частка сукупного доходу, що одержується часткою x найбіднішого населення [12]. Графік цієї функції називається *кривою Лоренца* (рис. 2.4).

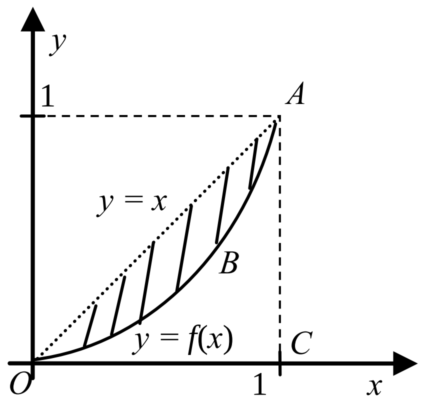


Рис. 2.4

Очевидно, що $0\le f(x)\le x$ при $x\in[0, 1]$, і нерівномірність розподілу доходів тим більше, чим більше площа фігури OAB. Тому в якості міри вказаної нерівномірності використовують так званий *коефіцієнт Джіні* L, що дорівнює відношенню площі фігури OAB до площі трикутника OAC:

$$L=2\int_0^1\left(x-f(x)\right)dx, \qquad (2.31)$$

який змінюється в інтервалі від 0 до 1. Чим ближче значення L до 1, тим вище рівень нерівності в розподілі сукупного доходу; чим ближче він до 0, тим вище рівень рівності.

Приклад №31. [10] За даними дослідження розподілу доходів певної держави крива Лоренцо описується рівнянням $y = 0{,}99x^2 + 0{,}01x$, де $x \in [0,\ 1]$. Знайти значення коефіцієнта Джіні та пояснити його економічний зміст.

Розв'язання. За формулою (2.31) одержимо:

$$L = 2\int_0^1 \left(x - 0{,}99x^2 - 0{,}01x\right)dx = 1{,}98\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \approx 0{,}33.$$

Відповідь: у даній державі розподіл доходів ближче до рівномірного, тобто при $x = 0{,}5$ маємо $y = 0{,}99 \cdot (0{,}5)^2 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0{,}2525$. Це означає, що 50% найбіднішого населення володіють приблизно 25% загального доходу населення.

Якщо функція $f(t)$ дорівнює прибутку за час t, а r% – номінальна облікова щорічна ставка, то реальне значення загального прибутку P за час між $t = 0$ та $t = t_p$ становить:

$$P = \int_0^{t_p} f(t) e^{-\frac{rt}{100}} dt. \qquad (2.32)$$

Приклад №32. [10] Яке буде реальне значення прибутку, якщо компанія вкладе 4 млн. грош. од. у нове обладнання і щороку отримуватиме 2 млн. грош. од. прибутку протягом 5 років, а номінальна облікова щорічна ставка становитиме 10%.

Розв'язання. За формулою (2.32) реальне значення загального прибутку становитиме:

$$P = \int_0^5 2e^{-0{,}1t} dt - 4 = (-20e^{0{,}1t})\Big|_0^5 - 4 = 20\left(1 - e^{-0{,}5}\right) - 4 = 3{,}87 \text{ млн. грош. од.}$$

Відповідь: 3,87 млн. грош. од.

Завдання №9

Завдання складається з п'яти задач, умови яких однакові для всіх варіантів.

А. Вважаючи, що продуктивність праці протягом робочого дня змінюється, а функція продуктивності праці має вигляд: $f(t) = (2h + N)t\sqrt{\left(5t^2 - 2\right)} - \dfrac{(N + h)}{t^2 + 9} + 10t^h$ * (деталей/день), знайти скільки деталей зробить робітник за даний час роботи ($t = h+1$)? (Тут t – відрізок часу до кінця робочого дня, який складає вісім годин, тобто при $t = 7$ – це відрізок часу від 2 до 8).

Б. Чисті інвестиції задані функцією $f(t) = Nt^h\left(t^{h+1} - 25N\right)^2 + 5200N\sqrt[3]{ht + 5N} + 1000$*.

Визначити: а) приріст капіталу за $t = N + h$ років; б) через скільки років приріст капіталу становитиме $Q = 100000 \cdot (N + 2h)$ грош. од.[1]

В. Нехай дана функція маргінальних витрат виробництва x од. продукції за певний час має вигляд $f(x) = 10Nx(h+1)^{hN - x^2} - 2 \cdot (3h + 0{,}5N)x^h + \dfrac{N}{\sqrt[h+1]{hx + N(h+1)^2}}$ *. Пояснити, як зміняться витрати виробництва (у грош. од.) при збільшенні випуску продукції від 2 до 5 од.

Г. За даними дослідження розподілу доходів певної держави крива Лоренца описується рівнянням $y = \dfrac{2N - h}{2N + h}x^2 + \dfrac{2h}{2N + h}x$ *. Знайти значення коефіцієнта Джіні та яку частину доходу отримують $10 \cdot h$% найбільш низькооплачуваного населення.

Д. Компанія повинна вибрати із двох можливих стратегій розвитку: а) вкласти $5 \cdot h$ млн. грош. од. у нове обладнання і отримувати $2 \cdot h$ млн. грош. од. щорічного прибутку протягом $10 + \dfrac{11N + 5h}{N + 4h}$ років; б) закупити на $10 \cdot h$ млн. грош. од. досконалішого обладнання, що дасть змогу одержувати $3 \cdot h$ млн. грош. од. щорічного прибутку протягом $5 + \dfrac{7N - h}{N + 3h}$ років. Яку

---

[1] Значення t та Q обчислити приблизно будь-яким численним способом або підбором...

стратегію слід вибрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна ставка становить $10\cdot\left(\frac{N+h}{N}\right)$%? (число років округлити до цілих, відсотки – до десятих).

*h – номер групи, N – номер варіанту.

Модуль «Теорія ймовірностей»

§10 Класичне поняття ймовірності

Приклад 3.2 Монету кинуто два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться герб.

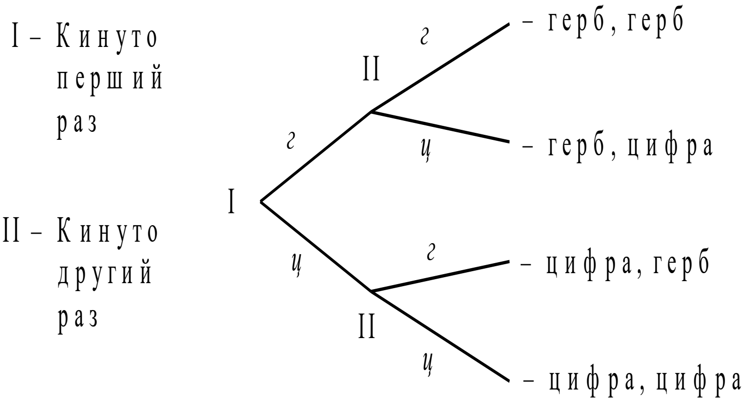


Рис. 3.1

Розв'язання. Побудуємо дерево ймовірностей (рис. 3.1). Нехай ***г*** – випав герб, а ***ц*** – цифра. Отже, загальна кількість можливих випадків $n = 4$. Хоча б один раз герб з'являється у трьох подіях, тобто $m = 3$. Тоді отримаємо $P(A) = 3/4$.

Приклад 3.3 На станції відправлення є вісім замовлень на відправлення товарів: п'ять замовлень у межах країни і три на експорт. Яка ймовірність того, що два взяті навмання: 1) внутрішні замовлення; 2) одне замовлення у межах країни й одне на експорт; 3) два замовлення на експорт?

Розв'язання. Для кожного питання знайдемо числа усіх можливих та сприятливих появі даних подій:

1) $n = C_8^2$; $\quad m = C_5^2$, $\quad$ тоді $P(A) = \dfrac{C_5^2}{C_8^2}$;

2) $n = C_8^2$; $\quad m = C_5^1 \times C_3^1$, $\quad$ тоді $P(A) = \dfrac{C_5^1 \times C_3^1}{C_8^2}$;

3) $n = C_8^2$; $\quad m = C_3^2$, $\quad$ тоді $P(A) = \dfrac{C_3^2}{C_8^2}$.

Зауваження. Правильність отриманого розв'язку можна перевірити так: сума верхніх (нижніх) індексів чисельника повинна дорівнювати верхньому (нижньому) індексу знаменника (див. випадок 2)). Особливо це стосується верхніх індексів, оскільки при виборі нуль об'єктів число сполучень буде дорівнювати одиниці (див. випадки 1 або 3).

Завдання №10

1. Бібліотека складається з десяти різних книг, причому п'ять книг стоять по 4 грн. кожна, три книги – по одній грн. і дві книги – по 3 грн. Знайти ймовірність того, що узяті наугад дві книги коштують 5 грн.
2. В групі 15 студентів, серед яких 7 відмінників. За списком випадково вибрали 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед вибраних 4 відмінника.
3. В цеху працюють 8 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами навмання відбирають трьох працівників. Знайти ймовірність того, що усі відібрані будуть чоловіками.
4. В ящику є 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Збирач випадково витягає 3 деталі. Знайти імовірність того, що витягнуті деталі виявляться пофарбованими.
5. Відомо, що серед 10 виробів верхнього одягу є три, що не минули контроль якості. Яка ймовірність серед 5 випадково відібраних виробів два не минули контроль.

6. Для зменшення загальної кількості ігор на змаганнях 16 баскетбольних команд розбиті за жеребкуванням на дві підгрупи (по 8 команд у кожній). Знайти ймовірність того, що 2 найбільш сильні команди виявляться: а) у різних підгрупах; б) в одній підгрупі.

7. З 10 білетів виграшних є 2. Визначити ймовірність того, що серед навмання взятих 5 білетів хоча б один буде виграшним.

8. З 20 посібників по математиці 3 з теорії ймовірностей. Студент наугад узяв два посібника. Знайти ймовірність того, що серед узятих: а) немає посібників з теорії ймовірностей, б) один посібник з теорії ймовірностей.

9. З 40 вимірювальних приборів 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що 2 відібраних прибори будуть нестандартними.

10. З колоди в 52 карти навмання вибираються 4. Яка ймовірність наступних подій: 1) всі витягнуті карти – валети; 2) витягнута хоча б одна бубна.

11. З коробки, в якій знаходиться 10 ламп, виймають випадковим чином 4 лампи. Яка ймовірність того, що буде вийнята рівно одна згоріла лампа, якщо в коробці знаходитися 3 згорілі і 7 годних лампочок?

12. З трьох бухгалтерів, вісім менеджерів і шість науковців необхідно сформувати комітет з 10 осіб. Знайти ймовірність того, що в комітеті опиняться: один бухгалтер, п'ять менеджерів і чотири науковці.

13. Коли Костя Кривенко, учень 6 класу, знайшов таки у буфеті кульок з цукерками, він почув, як відчинилися вхідні двері. Це прийшла з магазину бабуся Пелагея Марківна. Часу на вибір не було, і Костя, запустивши руку в кульок, ледь устиг перемістити до себе в кишеню дві цукерки. Яка імовірність того, що йому дістався хоча б один "Ведмедик на Півночі", якщо в кульку було сім цукерок з помадкою, п'ять соєвих батончиків і три "Ведмедика на Півночі"?

14. Магазин отримує товар партіями по 100 штук. Якщо п'ять, взятих навмання зразків відповідають стандартам, партія товару надходить на реалізацію. У черговій партії 8 одиниць товару з дефектом. Яка ймовірність того, що товар надійде в реалізацію?

15. На складі є 15 телевізорів, з яких 8 імпортного виробництва. Знайти вірогідність того, що серед п'яти навмання узятих телевізорів: 1) виявиться більше 2 імпортних; 2) всі будуть вітчизняного виробництва.

16. На складі є 20 трансформаторів, причому з них 15 Запорізького заводу. Знайти імовірність того, що серед випадково узятих п'яти трансформаторів три Запорізького заводу.

17. Порожні горщики з медом Вінні-Пух ставить на поличку разом з повними для того, щоб вид зменшуваного числа горщиків не занадто псував йому настрій. В даний момент у Пуховому буфеті вперемішку стоять 5 горщиків з медом і 6 абсолютно порожніх. Яка імовірність того, що в двох узятих на вечерю горщиках виявиться мед?

18. При стрільбі з гвинтівки відносна частота попадання в ціль виявилася рівною 0,85. Знайти число попадань, якщо всього було проведено 120 пострілів.

19. Серед 10 електричних лампочок 3 нестандартні. Знайти імовірність того, що узяті 2 одночасно лампочки виявляться нестандартними.

20. У групі з 28 студентів чверть народилася влітку. Наугад відбираються 4 студенти. Знайти ймовірність подій: 1) серед відібраних двоє народилися влітку; 2) серед відібраних хоча б один народився влітку.

21. У книзі 208 сторінок. Яка імовірність того, що порядковий номер навмання відкритої сторінки буде закінчуватися цифрою 5?

22. У команді спортсменів шість бігунів на короткі дистанції, три бігуни на довгі дистанції, п'ять метальників молота, сім борців і чотири боксери. Визначити імовірність того, що випадково вибрані два спортсмени будуть легкоатлетами.

23. У лабораторії є 16 пробірок з пробою молока, причому в шести пробірках молоко із зниженою жирністю. Для заключного аналізу навмання відбирають чотири пробірки. Знайти ймовірність того, що всі відібрані пробірки будуть з підвищеною жирністю.

24. У лотереї 80 квитків, з них 20 – виграшні. Визначити ймовірність того, що обидва ку-

плені квитки будуть виграшні.

25. У магазині працюють два чоловіки і сім жінок. Троє з них повинні піти у відпустку влітку. Хто саме – визначається долею. Знайти ймовірність того, що влітку у відпустку піде хоча б один чоловік.

26. У механізмі три однакові деталі. Якщо при зборці механізму поставити три деталі більшого розміру ніж позначено у кресленні, то механізм не працює. У збирача залишилось 12 деталей, з яких п’ять більшого розміру. Знайти ймовірність того, що робота першого зібраного з цих деталей механізму порушиться, якщо збирач бере деталі навмання.

27. У партії з 100 деталей відділ технічного контролю знайшов п’ять нестандартних деталей. Чому рівна відносна частота появи нестандартних деталей?

28. У партії з 300 деталей 65 бракованих. Визначити імовірність того, що з трьох обраних навмання деталей дві виявляться придатними, а одна бракована.

29. У пачці 10 зошитів, серед них чотири зошити в клітку, а інші в лінійку. Знайти ймовірність того, що серед наугад узятих трьох зошитів хоча б один буде в клітку.

30. У телевізорі знаходяться 12 радіоламп, які зовні не відрізняються одна від одної. Телевізор ламався і відомо, що дві радіолампи в ньому згоріли. Навмання з телевізора виймають дві радіолампи. Яка ймовірність того, що вони обидва будуть згорілими?

§11 Ймовірності складних подій

Приклад 4.2 На шести секторах кожного з чотирьох дисків замка автоматичної камери зберігання нанесені різні цифри. Замок відмикається при фіксуванні на кожному диску у відповідних секторах (на зовнішній стороні замка) тих цифр, які зафіксовані на внутрішній стороні замка при замиканні його. Яка ймовірність того, що при разовому встановленні навмання цифр на дисках такого замка він відімкнеться?

Розв’язання. Позначимо подія A – замок відімкнувся, а подія B_i ($i = \overline{1,4}$) – на i-му диску встановлена потрібна цифра. Тоді $A = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4$ і події B_i незалежні. Тому:

$$\mathrm{P}(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \cdot P(B_4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6^4} \approx 0{,}00077.$$

Приклад 4.3 Радист тричі викликає кореспондента. Ймовірність того, що перший виклик буде прийнятий – 0,2; ймовірність прийняття другого виклику –0,3; третього – 0,4. Події, які полягають у тому, що цей виклик буде прийнятий, незалежні. Знайти ймовірність того, що кореспондента буде почуто.

Розв’язання. Позначимо A – радиста почують у перший раз; B – радиста почують у другий раз; C – радиста почують утретє. Ці події сумісні, тому складемо суму несумісних подій і тоді ймовірність дорівнює:

$$Đ = (À + \overline{À} \times Â + \overline{À \times Â} \times Ñ) = Đ(À) + Đ(\overline{À} \times Â) + Đ(\overline{À \times Â} \times Ñ) =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}664.$$

Приклад 5.2 Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити оргкомітет із трьох чоловік. Яка ймовірність того, що всі троє, які увійдуть в оргкомітет, є бухгалтери.

Розв’язання. Позначимо події

A_1 – перший бухгалтер, який увійде в оргкомітет,

A_2 – другий бухгалтер, який увійде в оргкомітет,

A_3 – третій бухгалтер, який увійде в оргкомітет,

B – три бухгалтери, які увійдуть в оргкомітет, тоді $B = A_1 \times A_2 \times A_3$;

$$Đ(Â) = P(A_1 \times A_2 \times A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \times A_2}(A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}, \text{ або } \quad P(B) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}.$$

Приклад 5.3 У шухляді 12 деталей, з яких п’ять пофарбовані. Збирач випадково взяв три деталі. Знайти імовірність того, що хоча б одна з деталей буде пофарбована.

Розв'язання. Позначимо подія A – хоча б одна із трьох деталей пофарбована. Тоді $\overline{A}$ – жодна з трьох деталей не пофарбована. Оскільки протилежна подія $\overline{A}$ складається тільки з одного варіанту, то знайдемо її ймовірність, використовуючи класичне визначення ймовірності, тобто $n = C_{12}^3$, $m = C_7^3$, де сім – число нефарбованих деталей. Звідки за формулою (3.1) одержимо: $P(\overline{A}) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44}$. Тепер за формулою (5.4) одержимо шукану ймовірність $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$.

Завдання №11

1. 32 букви російського алфавіту написані на картках розрізної абетки. П'ять карток виймають навмання послідовно одну за іншою і укладають на стіл. Знайти імовірність того, що вийде слово "АУДИТ".
2. Батарея з трьох гармат зробила залп, причому два снаряди потрапили в ціль. Знайти імовірність того, що перша гармата влучила, якщо імовірності влучення в ціль першою, другою і третьою гарматами відповідно дорівнюють 0,4; 0,3; 0,5.
3. Відомо, що 3% випущених деталей для телевізора є бракованими, а 80% небракованих деталей – першосортними. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь є першосортною?
4. ВТК перевіряє вироби на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти імовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один стандартний.
5. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою відмовили. Знайти імовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо імовірності відмовлення першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,2; 0,3; 0,4.
6. Для деякої місцевості середнє число ясних днів у липні дорівнює 21. Знайти імовірність того, що перші три дні липня будуть ясними.
7. Для повідомлення про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатора-автомата. Ймовірність того, що при аварії спрацює, перший сигналізатор, дорівнює 0,95, а другий – 0,9. Знайти ймовірності того, що при аварії поступить сигнал: а) хоча б від одного сигналізатора; б) тільки від одного сигналізатора.
8. Для руйнування моста досить влучення однієї бомби. Знайти імовірність того, що міст буде зруйнований, якщо на нього скинути три бомби, імовірності влучення яких відповідно дорівнюють 0,5; 0,7; 0,8.
9. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірності того, що студент на перше та друге питання відповість відповідно дорівнюють по 0,8, а на третє – 0,5. Знайти імовірність того, що студент здасть іспит, якщо для цього необхідно відповісти хоча б на два питання.
10. Є п'ять різних ключів, з яких тільки одним можна відімкнути замок дверей. Навмання вибирається ключ і робиться спроба відімкнути замок. Ключ, що не підходить більше не використовується. Знайти ймовірність того, що: а) замок буде відімкнений першим ключем; б) для відімкнення замка буде використано не більше двох ключів.
11. Імовірність банкрутства для однієї фірми становить 0,4, а для іншої – на 25% менше. Визначити ймовірність того, що збанкрутує хоча б одна з них.
12. Імовірність ліквідації заборгованості за користування електроенергією першим підприємством становить 0,6; другим – є додатним коренем рівняння 5р2 – 4р = 0, а третім – 50% від суми двох перших ймовірностей. Визначити ймовірність того, що лише два підприємства ліквідують заборгованість.
13. Імовірність ураження цілі дорівнює 0,4. Знайти імовірність того, що ціль буде уражена після трьох пострілів.
14. Імовірність успіху для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени вико-

нують вправи по черзі, причому кожний робить по дві спроби. Той, хто виконав вправу першим, одержує приз. Знайти імовірність одержання призу спортсменами.

15. Інвестор вирішив внести порівну коштів у три підприємства за умов повернення йому кожним підприємством через визначений строк 150% від внесеної суми. Ймовірність банкрутства кожного з підприємств 0,2. Знайти ймовірність того, що після закінчення терміну кредитування інвестор одержить назад хоча б внесену суму.

16. Інженер розшукує формулу в двох довідниках. Імовірність того, що вона міститься в першому довіднику дорівнює 0,7; у другому – 0,8. Знайти імовірність того, що вона міститься тільки в одному довіднику.

17. На стелажі бібліотеки у випадковому порядку розставлено 14 підручників. Причому 9 з них у плетінні. Бібліотекар бере випадково 4 підручники. Знайти імовірність того, що хоча б один з узятих підручників буде в плетінні.

18. Одна фірма може отримати запланований прибуток з ймовірністю 0,8, а для другої фірми ця ймовірність є коренем рівняння 5p2 + 2p – 3 = 0. Визначити ймовірність того, що прибуток отримає принаймні одна фірма.

19. Підприємство виготовляє 95% виробів стандартних, причому з них 86% – першого сорту. Знайти ймовірність того, що узятий наугад виріб, виготовлений на цьому підприємстві, виявиться першого сорту.

20. Покупець придбав телевізор і радіоприймач. Ймовірність того, що протягом гарантійного терміну телевізор не вийде з ладу 0,85; а приймач – 0,98. Знайти ймовірність того, що хоча б один з них витримає гарантійний термін.

21. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом зміни перший верстат зажадає уваги робітника дорівнює – 0,2; другий – 0,3; третій – 0,5. Знайти імовірність того, що протягом зміни тільки два верстати зажадають уваги робітника.

22. Студент знає 20 з 25 питань програми. Залік зданий, якщо студент відповість не менше ніж на три з чотирьох питань у білеті. Поглянувши на перше питання, студент виявив, що знає його. Яка ймовірність, що студент здасть залік?

23. Студентка Люся до заліку устигла вивчити тільки 10 питань з 20, але сподівається, що у випадку невдачі умовить професора Аркадія Аристарховича задати їй друге питання. За багаторічними спостереженнями професора можна розжалити у двох випадках із трьох, і це співвідношення не міняється з роками. Які шанси у Люсі здати залік?

24. Студентка Люся знає до заліку тільки 15 питань з 30. Вона вважає, що якщо піде відповідати друга, то її шанси витягнути щасливий білет збільшаться. Чи права вона? Доведіть.

25. Три підприємства заключають договір про постачання певної продукції. Ймовірність виконання договору першим підприємство становить 0,9; другим – на 20% менше, а третім – 50% від суми двох перших ймовірностей. Визначити ймовірність того, що договір виконає хоча б одне підприємство.

26. Три підручники з економічної теорії та два з менеджменту довільно розміщено на книжковій полиці. Яка ймовірність того, що всі підручники з одного предмета виявляться поруч?

27. У автогосподарстві є дві автоцистерни. Ймовірність технічної справності цих машин складає, відповідно, 0,9 та 0,8. Знайти ймовірність виконання автоцистерною роботи замовнику, що зробив напередодні замовлення на автоцистерну.

28. У дитячій групі вихователь відлучився до телефону. Ймовірність того, що протягом цього часу п'ять граючих дітей не зажадає увага вихователя, дорівнюють 0,7; 0,8; 0,9; 0,85; 0,75. Знайти ймовірність того, що за час відсутності вихователя жодна дитина не зажадає його уваги.

29. У ящику лежать однотипні деталі, причому 30% пофарбовані, а інші – ні. Визначити імовірність того, що вийняті випадково дві деталі будуть одного кольору (тобто пофарбовані).

30. Учень 6б класу Костя Горулько і його приятель, зайнявши вигідну позицію поблизу шкільних дверей, обстрілювали сніжками усіх дівчаток, що виходили звідти. Коли двері в

черговий раз відкрилися, два сніжки одночасно полетіли в голову застиглого на порозі завуча – Маргарити Вікентіївни. Яка імовірність того, що ціль була уражена, якщо відомо, що Костя звичайно попадає вісім разів з 10, а його приятель тільки сім?

§12 Формула повної ймовірності. Гіпотези. Формула Байєса

Приклад 6.1 На першому заводі на кожні сто лампочок виробляється в середньому 90 стандартних, на другому – 95, на третьому – 85, а продукція їх складає відповідно: 50%, 30%, 20% усіх електроламп, що поставляються в крамниці цього району. Знайти ймовірність придбання стандартної електролампочки ?

Розв'язання. Позначимо події: A – придбана стандартна електролампочка; H_1 – придбана електролампочка заводу №1; H_2 – придбана електролампочка заводу №2; H_3 – придбана електролампочка заводу №3. Отже, відповідні ймовірності гіпотез H_i будуть $P(H_1) = 0,5$; $P(H_2) = 0,3$; $P(H_3) = 0,2$; імовірності придбання стандартної електролампочки для кожного заводу відповідно $P_{H_1}(A) = 0,9$; $P_{H_2}(A) = 0,95$; $P_{H_3}(A) = 0,85$.

Тоді ймовірність придбання стандартної електролампочки будь-якого заводу з (6.1) $P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) = 0,905$.

Приклад 6.2 Фірма має три джерела постачання комплектуючих: A, B, C. На фірму A припадає 50% загального обсягу постачань, на B – 30% і на C – 20%. З практики відомо, що 10% деталей, які поставляються фірмою A, браковані, фірмою B – 5%, фірмою C – 6%. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь була отримана від фірми A, та яка ймовірність того, що взята навмання бракована деталь була отримана від фірми A? Може B?

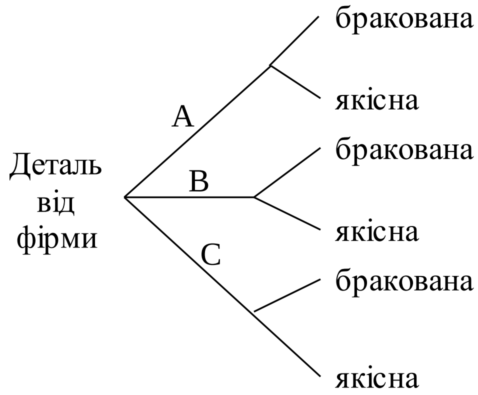


Рис. 6.1

Розв'язання. Оскільки 50% комплектуючих деталей постачається фірмою A, то ймовірність того, що взята навмання деталь буде від фірми A: $P(A) = 0,5$.

Для вирішення другого питання розглянемо дерево ймовірностей (рис. 6.1). Імовірність того, що деталь вироблена фірмою A і при цьому бракована буде $0,5 \cdot 0,1$, для фірми B ймовірність буде $0,3 \cdot 0,05$, а для фірми C – $0,2 \cdot 0,06$.

Нехай подія D – бракована деталь будь-якої фірми, тоді $D = A + B + C$. Імовірність цієї події

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,05 + 0,015 + 0,012 = 0,077.$$

Обчислимо частку фірми A в загальній кількості бракованих деталей

$$Đ\left(A/\text{äåòàëü áðàêîâàíà}\right) = \frac{0,05}{0,077} = 0,65.$$

Таким чином імовірність того, що обрана деталь була отримана від фірми A за умови, коли вона виявилася бракованою змінилася з 0,5 до 0,65.

Завдання №12

1. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох товарознавців. Імовірність того, що виріб попаде до першого товарознавця дорівнює 0,7, до другого – 0,3. Імовірність того, що виріб буде визнано стандартним першим товарознавцем 0,92; другим – 0,85. Знайти імовірність того, що виріб буде визнано при перевірці стандартним.
2. Відомо, що 34% людей мають першу групу крові, 37% – другу, 21% – третю і 8% – четверту. Хворому з першою групою можна переливати тільки кров першої групи, із другою – кров першої та другої груп, із третьою – кров першої та третьої груп і людині з четвертою

групою можна переливати кров будь-якої групи. Яка імовірність, що довільно узятому хворому можна перелити кров довільно обраного донора?

3. Відомо, що 80% продукції – стандартні. Спрощений контроль визнає за годну стандартну продукцію з вірогідністю 0,9 і нестандартну з вірогідністю 0,3. Знайти вірогідність того, що визнане годним виріб – стандартний.

4. Випробовується прилад, який складається з двох вузлів. Надійності вузлів дорівнюють 0,8 і 0,9 відповідно. Вузли відмовляють незалежно один від одного. Через деякий час виявилося, що прилад несправний. Знайти з урахуванням цього ймовірність того, що несправний тільки перший вузол, якщо для відмови приладу достатньо поломки хоча б одного вузла.

5. Два автомати випускають деталі. Продуктивність першого в два рази більше другого. Перший автомат дає 12% браку, другий – 23%. Випадково з загальної партії узята деталь виявилася відмінної якості. Знайти імовірність того, що вона зроблена другим автоматом.

6. Два автомати випускають деталі. Продуктивність першого вдвічі більше другого. Перший автомат дає 65% деталей відмінної якості, другий – 82%. Випадково з загальної партії узята деталь виявилася відмінної якості. Знайти імовірність, що належать першому автомату.

7. Дві секретарки заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність того, що помилки в документі зробить перша секретарка, становить 0,05, а другою – 0,1. Перша секретарка заповнила 20 документів, друга – 30. Навмання взятий з папки документ виявився бракованим. Визначити ймовірність того, що його заповнювала перша секретарка.

8. До групи спортсменів входить 20 стрибунів у висоту, шість велосипедистів та чотири бігуни. Ймовірність виконання норми розряду для стрибуна у висоту становить 0,95; для велосипедиста – 0,8; для бігуна – 0,75. Визначити ймовірність того, що вибраний навмання спортсмен виконує норму розряду.

9. Є набір радіоламп: три партії по вісім штук, у кожній з яких шість придатних і дві бракованих, і дві партії по 10 штук, із яких сім придатних і три бракованих. Навмання з цих п’яти партій береться одна партія і з цієї партії вибирається одна деталь. Визначити імовірність того, що обрана деталь буде придатною.

10. Збирач одержує однакові деталі, що виготовили на трьох верстатах. Імовірність браку для кожного з верстатів відповідно дорівнює 0,02; 0,03; 0,05. На першому верстаті виготовлено 50, на другому 20, на третьому 30 деталей. Знайти імовірність того, що узята випадково деталь буде бракованою.

11. Збирач одержує однакові деталі, що виготовляються на двох верстатах, імовірність браку для кожного з верстатів дорівнює відповідно 0,01 і 0,03. На першому верстаті виготовлено – 50, а на другому – 30 деталей. Узята випадково деталь виявилася бракованою, знайти імовірність того, що вона виготовлена на першому верстаті.

12. Ймовірність застудитися в дощ людині, яка не займається спортом складає 0,3, а людині, яка займається спортом – 0,1. Яка ймовірність застудитися випадковій людині, якщо спортом займається 35% населення?

13. На двох верстатах обробляються однотипні деталі. Імовірність браку для першого верстата складає 0,01, а для другого верстата – 0,02. Оброблені деталі складаються в одне місце, причому перший верстат випускає деталей у три рази більше, ніж другий верстат. Обчислити імовірність, що узята випадково деталь буде бракована.

14. На підприємствах «Зоря», «Схід», «Струмочок» випускають однакову продукцію, причому 42% продукції, яка випускається на всіх підприємствах, випускається на «Зорі», 33% – на «Сході», 25% – на «Струмочку». На цих підприємствах браковані вироби зустрічаються з ймовірністю відповідно: 0,02, 0,04, 0,03. З продукції цих заводів узятий навмання виріб. Яка ймовірність того, що він не бракований? Яка ймовірність того, що він випущений підприємством «Зоря»?

15. На радіостанції можуть передаватися повідомлення по одному з каналів зв’язку, які знаходяться в різних станах: п’ять каналів у відмінному стані, чотири – в доброму, три – в поганому. Ймовірність передачі повідомлення для різного виду каналів відповідно дорівнює 0,5; 0,3; 0,2. Знайти ймовірність того, що повідомлення було передано по поганому каналу

зв’язку, якщо відомо, що воно прийнято правильно.

16. На підприємстві виготовляються вироби певного виду на трьох робочих лініях. Продуктивність першої лінії 38% від всього загального виробництва, на другій – 35%, на третій – 27%. Кожна з ліній характеризується відповідно наступними відсотками придатності виробів: 95%, 98% і 97%. Визначити ймовірність того, що наугад узятий виріб, випущений підприємством, виявиться бракованим, а також ймовірність того, що цей бракований виріб зроблений відповідно на першій, другій і третій лініях.

17. На складі зберігаються 800 виробів заводу №1 і 1200 виробів заводу №2. Серед виробів заводу №1 в середньому 95% вищої якості, а серед виробів заводу №2 – 80%. Чому дорівнює ймовірність того, що перший принесений зі складу виріб виявиться низької якості.

18. На фабриці відбулася зупинка роботи цеху. Існує чотири гіпотези цієї зупинки. За статистикою, ймовірності цих гіпотез відповідно дорівнює: 0,3; 0,4; 0,2; 0,1. При детальному огляді цеху з’ясувалося, що згорів рубильник. Умовна ймовірність цієї події при даних гіпотезах відповідно до тієї ж статистиці дорівнюють: 0,9; 0; 0,2; 0,3. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

19. Прилади одного типу виробляються двома заводами. Перший постачає 3/5 всіх виробів, другий – 2/5. Надійність приладу, виробленого першим заводом – 0,74, другим – 0,82. Визначити повну надійність приладу, що надійшов на виробництво.

20. Припустимо, що 5% усіх чоловіків і 0,25% усіх жінок – дальтоніки. Навмання обрана особа страждає дальтонізмом. Яка імовірність, що це чоловік? Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість.

21. Серед випускників однієї школи 60% становлять дівчата. Відомо 20% хлопців і 10% дівчат цього випуску збираються вступати до гуманітарних вишів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання випускник школи виявиться хлопець, який не збирається вступати до гуманітарного вишу?

22. У лабораторії є шість клавішних автоматів і чотири клавішних напівавтомати. Імовірність того, що за час виконання розрахунку автомат не вийде з ладу, дорівнює 0,95, а напівавтомат – 0,8. Робиться деякий розрахунок на навмання обраній машині. Знайти імовірність, що до закінчення розрахунку машина не вийде з ладу.

23. У піраміді 10 гвинтівок, з яких чотири з оптичним прицілом. Імовірність ураження цілі з гвинтівки з оптикою дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптики – 0,8. Стрілець уразив ціль з випадково узятої гвинтівки. Що імовірніше: стрілець стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

24. У понеділок, після двох вихідних, токар Григорій виточує лівогвинтові шурупи замість звичайних правогвинтових з імовірністю 0.5. У вівторок цей показник знижується до середньо-цехового – 0,2. В інші дні тижня Григорій ударно трудиться і відсоток браку серед шурупів, що виготовляються ним, складає 10%. При перевірці тижневої партії шурупів, виточених Григорієм, випадково обраний шуруп виявився дефектним. Яка імовірність того, що шуруп виготовлений у понеділок?

25. У продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 20% телевізорів із прихованим дефектом, другого – 10% і третього – 5%. Яка імовірність придбати справний телевізор, якщо в магазин поступило 30% телевізорів з першого заводу, 20% – з другого і 50% – з третього?

26. У середньому з кожних 100 клієнтів відділення банку 60 обслуговуються першим операціоністом та 40 – другим операціоністом. Ймовірність того, що клієнт буде обслугований без допомогою завідуючого відділення, тільки самим операціоністом, складає 0,9 та 0,75 відповідно для першого та другого співробітників банку. Знайти ймовірність повного обслуговування клієнта першим операціоністом.

27. У телеграфному повідомленні "точка" і "тире" зустрічаються в співвідношенні 4:3. Відомо, що спотворюються 25% "точок" і 20% тире. Знайти ймовірність того, що прийнятий переданий сигнал, якщо прийнято "тире".

28. Учень 6б класу Костя Петренко і два його приятелі засіли з рогатками в кущах шкіль-

ного двору, щоб постріляти по голубах, що воркочуть на карнизі вікна директорського кабінету. Ледь вони зробили по одному пострілу, як шибка з дзенькотом розлетілася, і компанії довелося рятуватися втечею від завгоспа, що вискочив у двір. Яка імовірність того, що розбите вікно справа рук Кості Петренка, якщо з 10 пострілів він звичайно попадає вісім разів, а його приятелі по сім? (*Примітка*: випадок колективного влучення у вікно виключається.)

29. Фірма має три джерела поставки комплектуючих – фірми «Альфа», «Ветта», «Гамма». На частку фірми «Альфа» припадає 50% загального обсягу поставок, «Ветта» – 30% і «Гамма» – 20%. Відомо, що 10% поставляються фірмою «Альфа» деталей браковані, фірмою «Ветта» – 5% і фірмою «Гамма» – 6%. Яка ймовірність, що узята навмання деталь буде бракованою?

30. Число вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка відноситься до числа легкових машин, що проїжджають по тому ж шосе як 3:2. Імовірність того, що буде заправлятися вантажна машина дорівнює 0,3; для легкової машини ця імовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала машина для заправлення. Знайти імовірність того, що це легкова машина.

§13 Повторення дослідів. Формула Бернуллі

Приклад 7.1 Для нормальної роботи автобази на лінії має бути не менше восьми машин, а їх є десять. Імовірність невиходу кожної машини на лінію – 0,1. Знайти ймовірність нормальної роботи автобази в найближчий день.

Розв'язання. Позначимо події A – на лінії вісім машин; B – на лінії дев'ять машин; C – на лінії десять машин; $F = A + B + C$ – нормальна робота автобази. Тоді $P(F) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$, де $P(A) = P_8(10) = C_{10}^8 \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}1937$;

$P(B) = P_9(10) = C_{10}^9 \cdot 0{,}9^9 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}3874$; $P(C) = P_{10}(10) = C_{10}^{10} \cdot 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1^0 = 0{,}3487$;

P(F) = 0,1937 + 0,3874 + 0,3487 = 0,9298.

Приклад 7.4 Схожість насіння складає приблизно 80%. Знайти найімовірніше число схожого насіння серед 9.

Розв'язання. Ймовірність схожості для кожного насіння $p = 0{,}8$, тоді підрахуємо добуток $(n + 1) \cdot p$, тобто $k = (1 + 9) \cdot 0{,}8 = 8$, оскільки число вийшло ціле, існує два найімовірніших числа схожості насіння $m_0 = 8$ або 7.

Завдання №13

1. В середньому 20% пакетів акцій продаються на аукціоні за заявленою ціною. Знайти ймовірність того, що з дев'яти пакетів акцій за первинною ціною буде продано: а) менше двох пакетів, б) хоча б один пакет.

2. В середньому по 15% договорів страхова компанія виплачує страхову суму. Знайти ймовірність того, що з 10 договорів з настанням страхового випадку страхова сума виплатить по: а) трьом договорам, б) менше ніж по двом договорам.

3. В цеху працює шість моторів. Для кожного мотора імовірність того, що він у даний момент включений дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що в даний момент включені чотири мотори.

4. Гравець Сміт кидає шість гральних кісток і виграє, якщо випаде хоча б одна одиниця. Гравець Джонс кидає 12 гральних кісток і виграє, якщо випаде хоча б дві одиниці. У кого більше шансів виграти?

5. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого сорту. Імовірність того, що випадково узятий виріб виявиться вищого сорту, дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що з десятьох перевірених виробів тільки п'ять виробів вищого сорту.

6. За багаторічними спостереженнями з 30 листопадових ночей ясних буває в середньому

10. Групі астрономів, що збираються зробити світове відкриття, виділено чотири ночі для спостережень. Знайти імовірність того, що світове відкриття буде зроблено, якщо для цього потрібно принаймні дві ясні ночі.

7. Імовірність влучення в ціль дорівнює 0,3. Визначити імовірність того, що при шести пострілах три кулі потраплять у ціль.

8. Імовірність того, що узята напрокат річ буде повернута справною, дорівнює 0,8. Визначити імовірність того, що з п'яти узятих речей три будуть повернуті справними.

9. Імовірність хоча б одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти імовірність влучення в ціль при одному пострілі, якщо при кожному пострілі ймовірність влучення однакова.

10. Ймовірність виготовлення якісного виробу рівна 0,9. Яка ймовірність того, що з 4 узятих навмання виробів не менше три виявляться якісними?

11. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при трьох пострілах рівна 0,973. Знайти ймовірність попадання при одному пострілі.

12. Контрольний тест складається з чотирьох питань. На кожне питання пропонується чотири варіанти відповідей, серед яких тільки один правильний. Знайти ймовірність правильної відповіді на три питання тесту для непідготовленої людини (вибір відповіді наугад).

13. Контрольну роботу з математики успішно виконують 70% студентів. Знайти ймовірність того, що з 7 студентів роботу виконають 3.

14. На перевезення вантажу направлені чотири автомобілі. Ймовірність знаходження кожної з машин у справному стані дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в роботі приймають участь хоча б один з виділених для цього автомобілів.

15. На факультеті налічується 1825 студентів. Знайти ймовірність того, що 1 вересня є днем народження чотирьох студентів.

16. Нехай імовірність того, що покупцю необхідне взуття 41-го розміру дорівнює 0,5. Знайти імовірність того, що хоча б один з п'яти перших покупців зажадає взуття 41-го розміру.

17. Передбачається, що 10% нових малих підприємств припиняють діяльність протягом року. Знайти ймовірність того, що з шести підприємств два припинять діяльність.

18. Практика показує, що 7% накладних, що проходять перевірку в бухгалтерії, виявляються неправильно оформлені. Навмання відбирають 20 накладних. Знайти ймовірність того, що: а) три з них оформлені правильно; б) як мінімум три оформлені неправильно.

19. Сама правдива людина на світі барон Мюнхаузен іноді все-таки любить трохи прикрасити дійсність і в одному випадку з п'яти грішить проти істини. Яка імовірність того, що з чотирьох розказаних їм історій – про чудесне штопання коня, розрубаного навпіл, про подорож на ядрі у вороже місто, про оленя, підстреленого вишневою кісточкою і про смажених куріпок на шомполі, – хоча б дві абсолютно правдиві.

20. Серед 10 документів, що поступили в офіс, два оформлені з помилками. Для перевірки наугад узяли чотири документи. Яка ймовірність того, що серед них виявиться: а) хоча б один невірно оформлений документ, б) тільки один невірно оформлений документ.

21. Серед 15 рахунків три рахунки оформлено невірно. Ревізор наугад бере п'ять рахунків. Знайти ймовірність того, що серед узятих рахунків: а) два оформлені невірно, б) всі оформлено вірно.

22. Студентка Люся зі своїм приятелем Петром катаються на лижах. Люся – першокласна лижниця. Їй нічого не варто з'їхати з довгої крутої гори, на якій потрібно до того ж зробити п'ять поворотів. Що стосується Петра, то його шанси упасти чи не упасти на кожному повороті рівні. Яка імовірність того, що Петро з'їде з гори, упавши не більше двох разів?

23. Технологічний процес контролюється за 15 параметрами. Ймовірність виходу кожного параметра за межі технічних допусків складає 0,2. Знайти: а) найімовірніше число параметрів, що виходять за межі технічних допусків і відповідну ймовірність; б) ймовірність виходу за межі технічних допусків не менше чотири параметрів.

24. Том Сойєр ставить свого дохлого пацюка на мотузці проти приятельського зламаного

будильника, що при підкиданні шести монет випаде три герби. Том вважає, що шанси одержати чи не одержати загаданий результат рівні. Чи прав він?

25. У селищі на кожні 100 сімей 80 мають холодильники. Знайти ймовірність того, що з 400 сімей 300 мають холодильники.

26. У шести тварин є захворювання, причому ймовірність одужання рівна 0,98. Яка ймовірність того, що: а) одужають всі шість тварин, б) одужають чотири?

27. Фасувальниця Клава важить пряники в пакети – по 1 кг у пакет. Пакети Клава складає в коробки – по 20 штук у коробку. Кожний з 10 пакетів Клава недоважує. Контролер ВТК Іван Кузьмич підозрює Клаву в нечесності. З десяти довільних коробок він бере по одному пакету на перевірку. Яка імовірність того, що в Івана Кузьмича в руках виявиться три недоважених пакети?

28. Фірма вирішила почати розпродаж своїх акцій на біржі. Відомо, що 80% брокерів порадили своїм клієнтам придбати ці акції. Навмання відібрали шість брокерів. Знайти ймовірність того, що принаймні чотири з них запропонували своїм клієнтам купити акції фірми.

29. Монету кинуто 5 разів. Знайти імовірність таких подій: а) хоча б один раз з'явиться "герб"; б) "герб" випаде менш 2-х разів.

30. Оптова база постачає товар до 90 крамниць. Ймовірність заявки на даний день від кожної крамниці p = 0,4. Знайти найімовірніше число заявок на даний день та його ймовірність.

§14 Дискретні випадкові величини та їх характеристики

Приклад 9.3 Команда нараховує два стрільців. Кількість балів, що вибиваються кожним з них після одного пострілу, є випадкові величини X та Y, які характеризуються такими законами розподілу:

Число балів x_i	3	4	5
$P(x_i)$	0,3	0,4	0,3

Число балів y_i	1	2	3	4	5
$P(y_i)$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,5

Причому результати пострілів одного з них не впливають на результати іншого.

Потрібно а) скласти закон розподілу числа балів, що вибиваються командою, якщо стрільці роблять по одному пострілу; б) знайти математичне сподівання та дисперсію для команди; в) скласти та побудувати функцію розподілу.

Розв'язання.

1. Складемо таблицю

№	x_i	y_i	$x_i + y_i$	$P(x_i + y_i) = P(x_i)\cdot P(y_i)$
1	3	1	4	0,3·0,1=0,03
2	3	2	5	0,3·0,1=0,03
3	3	3	6	0,3·0,1=0,03
4	3	4	7	0,3·0,2=0,06
5	3	5	8	0,3·0,5=0,15
6	4	1	5	0,4·0,1=0,04
7	4	2	6	0,4·0,1=0,04
8	4	3	7	0,4·0,1=0,04
9	4	4	8	0,4·0,2=0,08
10	4	5	9	0,4·0,5=0,2
11	5	1	6	0,3·0,1=0,03
12	5	2	7	0,3·0,1=0,03
13	5	3	8	0,3·0,1=0,03

№	x_i	y_i	$x_i + y_i$	$P(x_i + y_i) = P(x_i)\cdot P(y_i)$
14	5	4	9	0,3·0,2=0,06
15	5	5	10	0,3·0,5=0,15

Таким чином, закон розподілу числа отриманих балів команди буде:

x_i	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,03	0,07	0,1	0,13	0,26	0,26	0,15

2. Знаходимо математичне сподівання:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 4\cdot 0{,}03 + 5\cdot 0{,}07 + 6\cdot 0{,}1 + 7\cdot 0{,}13 + 8\cdot 0{,}26 + 9\cdot 0{,}26 + 10\cdot 0{,}15 = 7{,}9.$$

Для знаходження дисперсії скористуємось формулою (9.3). Для чого, спочатку обчислимо математичне сподівання випадкової величини x^2 і складемо закон розподілу цієї величини:

x^2	16	25	36	49	64	81	100
p_i	0,03	0,07	0,1	0,13	0,26	0,26	0,15

Таким чином, отримаємо:

$$M(x^2) = 16\cdot 0{,}03 + 25\cdot 0{,}07 + 36\cdot 0{,}1 + 49\cdot 0{,}13 + 64\cdot 0{,}26 + 81\cdot 0{,}26 + 100\cdot 0{,}15 = 64{,}9.$$

і оскільки $M^2(x) = 62{,}41$, то отримаємо дисперсію: $D = 64{,}9 – 62{,}41 = 2{,}49$.

3. Функцію розподілу знаходимо за визначенням $P(x_1 \le x < x_2) = F(x)$, тобто,

1) $P(-\infty \le x < 4) = 0$;
2) $P(4 \le x < 5) = 0{,}03$;
3) $P(5 \le x < 6) = 0{,}03 + 0{,}07 = 0{,}1$;
4) $P(6 \le x < 7) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$;
5) $P(7 \le x < 8) = 0{,}2 + 0{,}13 = 0{,}33$;
6) $P(8 \le x < 9) = 0{,}33 + 0{,}26 = 0{,}59$;
7) $P(9 \le x < 10) = 0{,}59 + 0{,}26 = 0{,}85$;
8) $P(10 \le x < \infty) = 0{,}85 + 0{,}15 = 1$.

Тоді, графік функції розподілу матиме такий вигляд (рис. 9.1):

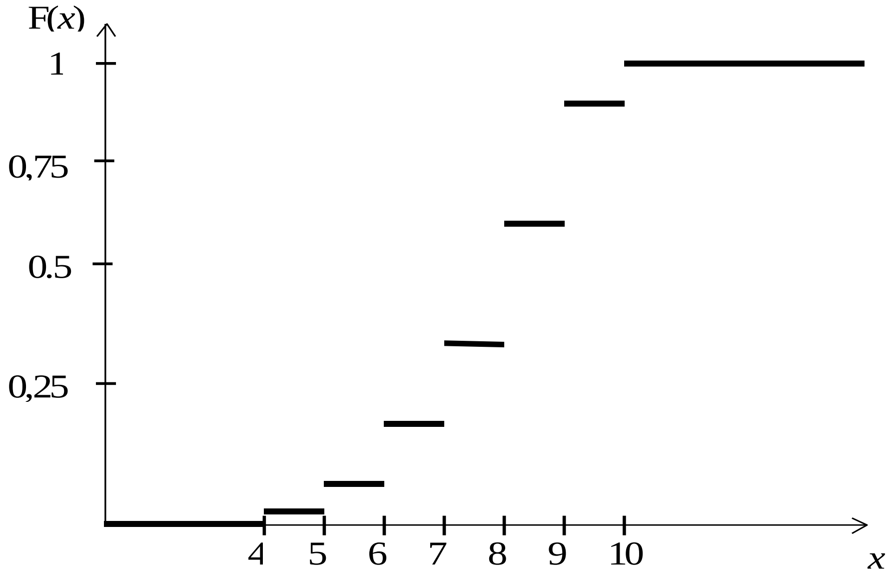


Рис. 9.1.

Приклад 9.4 Ймовірнісний прогноз для відсоткової зміни вартості акцій по відношенню до їх поточного курсу (величина X) протягом шести місяців представлений у вигляді закону розподілу

X	5	10	15	20	25	30
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Знайти ймовірність того, що покупка акцій буде більш вигідною, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 3% на місяць строком на 6 місяців.

Розв'язання. Приріст суми на банківському депозиті за умов 3% на місяць складе через 6 місяців $[(1{,}03)^6 - 1]\cdot 100\% = 19{,}4\%$. Ймовірність того, що покупка акцій вигідніше банківського депозиту, визначається сумою ймовірностей, відповідних більш високому росту курсу акцій: $P(X > 19{,}4) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6$.

Приклад 9.5 Нехай щоденні витрати на обслуговування та рекламу автомобілів у автосалоні складають в середньому 120 тис. грош. од., а число продаж автомашин (X) протягом дня підпорядковане закону розподілу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку при ціні машини у 150 тис. грош. од. та дисперсію щоденної продажі числа автомашин.

Розв'язання. Щоденний прибуток обчислюється за формулою: $П = (150X - 120)$. Шукана характеристика $M(П)$ знаходиться з використанням властивостей математичного сподівання (тис. грош. од.): $M(П) = M(150X - 120) = 150\,M(X) - 120$. Знайдемо за формулою (9.1) значення $M(X) = 0\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}2 + + 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}05 + 7\cdot 0{,}05 + 8\cdot 0{,}025 + 9\cdot 0{,}025 = 2{,}675$. Таким чином математичне сподівання щоденного прибутку складе: $M(П) = 150\cdot 2{,}675 - - 120 = 281{,}25$ тис. грош. од.

Дисперсію знайдемо за формулою (9.3) і для цього знайдемо математичне сподівання $M(X^2) = 0\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}1 + 25\cdot 0{,}1 + 36\cdot 0{,}05 + 49\cdot 0{,}05 + 64\cdot 0{,}025 + 81\cdot 0{,}025 = 13{,}475$. Тоді шукана величина дисперсії буде такою: $D(X) = 13{,}475 - 2{,}675^2 = 6{,}319$.

Завдання №14

1. Банк видає п'ять кредитів. Ймовірність неповернення кредиту дорівнює 0,2 для кожного із позичальників. Скласти закон розподілу кількості позичальників, що не повернули кредит по закінченню терміну кредитування. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.
2. До магазину завезено 10 ящиків з продуктами, у двох з яких вони неякісні. Навмання для продажу беруть два ящики. Визначити закон розподілу та функцію розподілу дискретної випадкової величини, що дорівнює числу ящиків з якісними продуктами. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.
3. У партії з 100 радіоламп знаходитися 15 бракованих. Випадковим чином з цієї партії узяли чотири радіолампи. Знайти закон розподілу числа бракованих радіоламп з цих вибраних. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.
4. На елеваторі проводиться помел зерна, для контролю періодично проводитися перевірка якості помелу, тобто відповідність вищому сорту. Для цього беруть підряд мішки із зерном (не більше чотирьох) і при виявленні мішка із зерном, який не відповідає вищому сорту, припиняють роботу елеватора для регулювання. Вважаючи, що ймовірність помелу вищого сорту дорівнює 0,8, скласти теоретичний закон кількості перевірок, зроблених при одній серії випробувань. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.
5. Ймовірний прогноз для відсоткової зміни вартості акцій до їх поточного курсу (X) протягом семи місяців представлений таким законом розподілу

X	5	10	15	20	25	30	35
p_i	0,08	0,1	0,2	0,3	0,2	0,07	0,05

Знайти ймовірність того, що покупка акцій буде більш вигідною, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 2% на місяць строком на 8 місяців.

6. Щоденні витрати на обслуговування та рекламу офісної техніки у сервісному центрі складають в середньому 3 тис. грош. од., а число продаж офісної техніки (X) протягом дня підпорядковується закону розподілу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0,2	0,25	0,12	0,11	0,1	0,09	0,06	0,04	0,03

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку при середній ціні од. офісної техніки у 4,5 тис. грош. од. та середньоквадратичне відхилення щоденної продажі числа офісної техніки.

7. Клієнти банку не повертають кредити з ймовірністю 0,1. Скласти закон розподілу числа повернених кредитів з чотирьох виданих. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

8. До магазину завезено вісім ящиків з продуктами, у трьох з яких вони неякісні. Навмання для продажу беруть два ящики. Визначити закон розподілу та функцію розподілу дискретної випадкової величини, що дорівнює числу ящиків з якісними продуктами. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

9. У партії з 88 дитячих іграшок знаходитися 12 бракованих. Випадковим чином з цієї партії узяли чотири іграшки. Знайти закон розподілу числа небракованих іграшок з цих вибраних. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

10. На верстатах виробляються механічні вироби і для контролю періодично проводитися перевірка виробленої продукції, тобто відповідність зазначеним кресленням. Для цього беруть підряд вироби (не більше п’яти) і при виявленні неякісного виробу, припиняють роботу верстатів для регулювання. Вважаючи, що ймовірність вироблення якісного виробу дорівнює 0,85, скласти теоретичний закон кількості перевірок, зроблених при одній серії випробувань. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

11. Ймовірний прогноз для відсоткової зміни вартості акцій до їх поточного курсу (X) протягом восьми місяців представлений таким законом розподілу

X	10	15	20	25	30	35	40	45
p_i	0,08	0,1	0,2	0,3	0,15	0,09	0,06	0,02

Знайти ймовірність того, що покупка акцій буде більш вигідною, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 3% на місяць строком на 9 місяців.

12. Щоденні витрати на обслуговування та рекламу холодильників у сервісному центрі складають в середньому 2 тис. грош. од., а число продаж холодильників (X) протягом дня підпорядковується закону розподілу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,2	0,21	0,15	0,14	0,11	0,09	0,06	0,04

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку при середній ціні одного холодильника у 3,5 тис. грош. од. та середньоквадратичне відхилення щоденної продажі числа холодильників.

13. Банк видає чотири автокредитів на тиждень. Ймовірність повернення кредиту дорівнює 0,87 для кожного із позичальників. Скласти закон розподілу кількості позичальників, що не повернули кредит по закінченню терміну кредитування. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

14. До магазину завезено дев’ять клітин з кавунами, у двох з яких вони неякісні. Навмання для продажу беруть три клітини. Визначити закон розподілу та функцію розподілу дискретної випадкової величини, що дорівнює числу клітин з якісними кавунами. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

15. В коробці зі 95 свердел знаходитися 12 підвищеної крихкості. Випадковим чином з

цієї коробки узяли п'ять свердел. Знайти закон розподілу числа свердел підвищеної крихкості з цих вибраних. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

16. На виробництві відбувається штампування виробів і для контролю періодично проводитися перевірка якості штампованих виробів, тобто відповідності зазначеним кресленням. Для цього беруть підряд штамповані вироби (не більше шести) і при виявленні неякісного виробу, який не відповідає кресленню, припиняють роботу виробництва для регулювання. Вважаючи, що ймовірність виготовлення якісного виробу дорівнює 0,9, скласти теоретичний закон кількості перевірок, зроблених при одній серії випробувань. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

17. Ймовірний прогноз для відсоткової зміни вартості акцій до їх поточного курсу (X) протягом семи місяців представлений таким законом розподілу

X	3	8	13	18	23	28	33
p_i	0,08	0,12	0,18	0,28	0,2	0,09	0,05

Знайти ймовірність того, що покупка акцій буде більш вигідною, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 2,5% на місяць терміном на 8 місяців.

18. Щоденні витрати на обслуговування та рекламу оргтехніки у сервісному центрі складають в середньому 1,5 тис. грош. од., а число продаж оргтехніки (X) протягом дня підпорядковується закону розподілу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,12	0,18	0,21	0,15	0,11	0,07	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку при середній ціні од. оргтехніки у 2,3 тис. грош. од. та середньоквадратичне відхилення щоденної продажі числа оргтехніки.

19. За спостереженнями клієнти банку не повертають кредити з ймовірністю 0,2. Скласти закон розподілу числа повернених кредитів з п'яти виданих. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

20. До супермаркету завезено 12 коробок із ківі, у трьох з яких вони неякісні. Навмання для продажу беруть три коробки. Визначити закон розподілу та функцію розподілу дискретної випадкової величини, що дорівнює числу коробок з якісними ківі. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

21. До кожного з 10 етапів збирання верстату додається документація. Випадковим чином з пакету документації узяли документацію до трьох етапів збирання. Знайти закон розподілу числа документацій без помилок з цих вибраних, якщо ймовірність помилки у документації складає 0,15. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

22. На складі відбувається фасування пшеничного зерна у пакети і для контролю періодично проводитися перевірка якості фасування, тобто відповідність зазначеним нормам фасування. Для цього беруть підряд фасовані пакети із зерном (не більше шести) і при виявленні пакета із зерном, який не відповідає зазначеним нормам, припиняють роботу верстата для регулювання. Вважаючи, що ймовірність правильного розфасування дорівнює 0,7, скласти теоретичний закон кількості перевірок, зроблених при одній серії випробувань. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

23. Ймовірний прогноз для відсоткової зміни вартості акцій до їх поточного курсу (X) протягом восьми місяців представлений таким законом розподілу

X	4	8	12	16	20	24	28	32
p_i	0,07	0,11	0,18	0,24	0,2	0,1	0,06	0,04

Знайти ймовірність того, що покупка акцій буде більш вигідною, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 1,5% на місяць строком на 10 місяців.

24. Щоденні витрати на обслуговування та рекламу побутової техніки у сервісному центрі складають в середньому 2 тис. грош. од., а число продаж побутової техніки (X) протягом дня підпорядковується закону розподілу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,18	0,22	0,14	0,12	0,1	0,09	0,07	0,04	0,03	0,02

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку при середній ціні од. побутової техніки у 3,5 тис. грош. од. та середньоквадратичне відхилення щоденної продажі числа побутової техніки.

25. Банк видає шість кредитів під ремонт квартир на тиждень. Ймовірність неповернення кредиту дорівнює 0,12 для кожного із позичальників. Скласти закон розподілу кількості позичальників, що повернули кредит по закінченню терміну кредитування. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

26. До гіпермаркету завезено 24 горщиків з декоративними квітами, у чотирьох з яких квіти усохли. Навмання для продажу беруть п'ять горщиків. Визначити закон розподілу та функцію розподілу дискретної випадкової величини, що дорівнює числу горщиків з живими квітами. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

27. Поступила партія зі 50 жіночих костюмів, серед яких 30 першого сорту. Випадковим чином з цієї партії узяли 6 костюмів. Знайти закон розподілу числа костюмів першого сорту з цих вибраних. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

28. На потоковій лінії збирають дитячі іграшки і для контролю періодично проводитися перевірка якості зібраної іграшки, тобто відповідність її зазначеному стандарту. Для цього беруть підряд іграшки (не більше чотирьох) і при виявленні іграшки, яка не відповідає зазначеному стандарту, припиняють роботу потокової лінії для регулювання. Вважаючи, що ймовірність помелу вищого сорту дорівнює 0,75, скласти теоретичний закон кількості перевірок, зроблених при одній серії випробувань. Знайти функцію розподілу, побудувати за функцією графік, знайти математичне сподівання, дисперсію та квадратичний відхил.

29. Ймовірний прогноз для відсоткової зміни вартості акцій до їх поточного курсу (X) протягом дев'яти місяців представлений таким законом розподілу

X	5	9	13	17	21	25	29	33	37
p_i	0,07	0,12	0,15	0,27	0,2	0,1	0,05	0,03	0,01

Знайти ймовірність того, що покупка акцій буде більш вигідною, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 1,8% на місяць строком на 10 місяців.

30. Щоденні витрати на обслуговування та рекламу комп'ютерної техніки у сервісному центрі складають в середньому 2,7 тис. грош. од., а число продаж комп'ютерної техніки (X) протягом дня підпорядковується закону розподілу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,2	0,23	0,15	0,13	0,1	0,09	0,07	0,03

Знайти математичне сподівання щоденного прибутку при середній ціні од. комп'ютерної техніки у 5 тис. грош. од. та середньоквадратичне відхилення щоденної продажі числа комп'ютерної техніки.

Модуль «Математичне програмування»

§15 Математична модель. Графічний і симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування. Двоїста задача

1. **Поняття про математичні моделі.** *Література*: [16], розд. V, §1, стор. 230-234.

2. **Графічний метод розв'язання задач.** *Література*: [16], розд. V, §4, стор. 220-244.

Приклад №1. Для виготовлення виробів виду A та B є 100 кг металу. На виготовлення одного виробу типу A витрачається 2 кг метали, а виробу типу B – 4 кг. Скласти план виробництва, що забезпечує одержання найбільшого прибутку від продажу виробів, якщо вартість одного виробу типу A – 3 грн, а виробу типу B – 2 грн, причому виробів типу A потрібно виготовити не більш 40 шт., а виробів типу B – не більш 20 шт.

Розв'язання. Складемо математичну модель даної задачі. Для одержання найбільшого прибутку від продажу виробів типів A та B необхідно знати їхню виготовлену кількість, тому припустимо, що x_1 – виготовлена кількість виробів A, а x_2 – виготовлена кількість виробів виду B. Прибуток $F = 3x_1 + 2x_2$, а відповідно до умови задачі запишемо обмеження:

1) на метал: $2x_1 + 4x_2 \le 100$.

2) на кількість виробів: $x_1 \le 40$, $x_2 \le 40$.

Отже, математична модель даної задачі:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 100 \\ x_1 \le 40 \\ x_2 \le 20 \end{cases}, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{1.9}$$

Графічне розв'язання задачі починаємо з побудови прямих, при цьому перше рівняння для полегшення побудови, приведемо до рівняння у відрізках на осях.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 100 & (I) \\ x_1 = 40 & (II) \\ x_2 = 20 & (III) \end{cases} \qquad \frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{25} = 1 \quad \text{(I)}$$

Відповідно знакам системи нерівностей (1.9) виділяємо многокутник розв'язків (рис. 1.2) – заштрихована область.

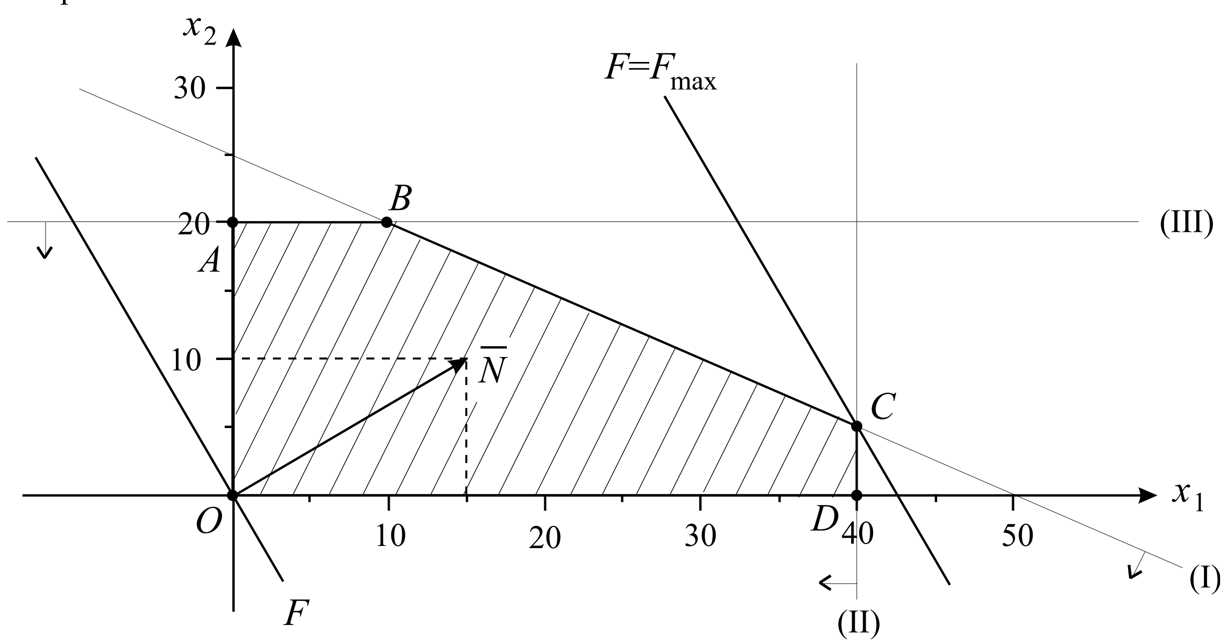


Рис. 1.2

З цільової функції (1.8) запишемо вектор нормалі $\overline{N}(3;2)$. Для зручності побудови координати цього вектора можна множити (ділити) на будь-яке число, наприклад, на 5 і побудувати вектор $\overline{N}(15;10)$. Перпендикулярно вектору нормалі будуємо цільову функцію *F* (1.8) і переміщуючи її уздовж вектора нормалі будуємо лінію рівня, що проходить через точку *C*.

Очевидно, що в точці *C* цільова функція *F* досягає свого максимуму. Знайдемо координати цієї точки, як точки перетину прямих (I) і (II)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 100 \\ x_1 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 80 + 4x_2 = 100 \\ x_1 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 5 \Rightarrow C(40;\ 5).$$

Знаючи координати точки *C*, підставляємо їх у цільову функцію $F = 3{\cdot}40 + 2{\cdot}5 = 130$.

Відповідь: максимальний прибуток від реалізації виробів дорівнює 130 гривням.

3. **Симплекс-метод.** *Література*: [16], розд. V, §5, стор. 245-259.

Приклад №2. Розв'яжемо наведену задачу (1.8), (1.9) симплекс-методом.

Розв'язання. Приведемо систему обмежень (1.9) до канонічного виду; тобто в ліві частини кожної нерівності додамо балансові змінні і одержимо рівняння:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 + x_4 = 40 \\ x_2 + x_5 = 20 \end{cases}, \quad x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Складемо першу симплекс-таблицю (табл. 1.3). Для цього випишемо матрицю коефіцієнтів отриманої системи обмежень і за базис приймемо змінні, що складають одиничну матрицю, тобто x_3, x_4, x_5, тоді змінні x_1, x_2 – вільні. Цільова функція повинна бути записана через вільні змінні. В умові задачі ця вимога виконується. Для заповнення останнього рядка симплекс-таблиці цільову функцію представляємо у вигляді:

$$F - 3x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \max.$$

Таблиця 1.3

Симплекс-таблиця №1

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Права частина	Оцінки
x_3	2	4	1	0	0	100	$\frac{100}{2} = 50$
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	0	40	$\frac{40}{1} = 40$ ←
x_5	0	1	0	0	1	20	$\frac{20}{0} = \infty$
F	–3 ↑	–2	0	0	0	0	max

Вибираємо найменше від'ємне значення в рядку *F* й одержимо провідний стовпець (позначимо його стрілочкою). Далі, значення правих частин ділимо на відповідні значення провідного стовпця і заповнюємо стовпець "Оцінки". З отриманих оцінок вибираємо найменшу (40), що і визначить провідний рядок (виділяємо стрілочкою). Відзначимо, що від'ємні оцінки не розглядаються. Крім цього, *якщо немає додатних оцінок, то дана задача або не обмежена, або не має розв'язків.* На перетині провідного рядка і провідного стовпця одержуємо провідний елемент (обводимо рамочкою). Для складання симплекса-таблиці №2 (табл. 1.4) базисну змінну x_4 заміняємо на x_1 і провідний рядок переписуємо в симплекс-таблицю №2 без змін.

Далі, у провідному стовпці необхідно одержати нулі, крім провідного елемента, який повинний дорівнювати **1**. У випадку, якщо провідний елемент не дорівнює **1**, то необхідно всі елементи провідного рядка розділити на значення провідного елемента. Для одержання нулів у провідному стовпці виконуємо дії з провідним рядком. Тобто для одержання нуля в першому рядку провідного стовпця, другий рядок множимо на (–2) і додаємо до першого рядка. У третьому рядку вже є нуль у провідному стовпці тому рядок переписуємо без змін. В останньому рядку провідного стовпця одержимо нуль, якщо провідний рядок помножимо на 3 і додамо до останнього рядка. Одержуємо симплекс-таблицю №2 (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Симплекс-таблиця №2

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Права частина	Оцінки	
x_3	0	$\boxed{4}$	1	–2	0	20	$\frac{20}{4}=5$	←
x_1	1	0	0	1	0	40	$\frac{40}{0}=\infty$	
x_5	0	1	0	0	1	20	$\frac{20}{1}=20$	
F	0	–2	0	3	0	120	max	

Пророблюючи аналогічні перетворення із симплекс-таблицею №2, одержимо симплекс-таблицю №3 (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

Симплекс-таблиця №3

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Права частина	Оцінки
x_2	0	1	0,25	–0,5	0	5	
x_1	1	0	0	1	0	40	
x_5	0	0	–0,25	0,5	1	15	
F	0	0	0,5	2	0	130	

В останньому рядку симплекс-таблиці №3 немає від'ємних значень, отже, отримали максимум. Тоді компоненти плану приймають значення базисних змінних (точніше, правих частин), а вільні змінні будуть нульовими, тобто $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X(40; 5; 0; 0; 15)$.

Максимальному значенню цільової функції відповідає 130, тобто $F_{\max} = 130$. Дійсно, можна зробити перевірку і при підстановці $x_1 = 40$, $x_2 = 5$ у початкову цільову функцію, одержимо: $F = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 5 = 130$.

Економічний зміст розв'язку. Отже, необхідно виготовити 40 виробів типу А та 5 виробів типу В, тільки за цих умов буде досягнутий максимальний прибуток, що складе 130 грн. При цьому, в базисних змінних залишилася тільки одна балансова змінна x_5, що має значення 15. Відповідно інші балансові змінні дорівнюють нулю. Це означає, що при даних обмеженнях цілком витрачається весь запас металу, виробів типу А випускається рівно 40, тобто не більше заданого, а для випуску виробів В потрібно ще ресурсів, тобто запас складає 15 штук. Елементи, що стоять на перетині рядка цільової функції і стовпців балансових змінних, тобто x_3, x_4, відповідають тіньовим цінам ресурсів. Тіньова ціна для першого обмеження, тобто ціна ресурсу складає 0,5 грн. за одиницю, а тіньова ціна для другого обмеження складає 2 грн. за одиницю. Це означає, що якщо збільшити запас металу на 1 кг, то прибуток за тиждень зросте на 0,5 грн. Аналогічно, якщо вироблять наднормативну кількість продукції А в 1 одиницю, зростання прибутку за тиждень складе 2 грн. мінус будь-які додаткові витрати.

4. **Двоїста задача та її властивості** *Література*: [16], розд. V, §9, стор. 270-283.

Приклад №3. Скласти двоїсту задачу до (1.8), (1.9) та знайти її розв'язок.

Розв'язання. Нагадаємо математичне формулювання задачі (1.8)-(1.9):

$$F = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 100 \\ x_1 \le 40 \\ x_2 \le 20 \end{cases}, \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Складаємо двоїсту задачу:

1. Всі нерівності системи обмежень (1.9) мають потрібний знак, тобто ≤.
2. Випишемо розширену матрицю системи і рядок коефіцієнтів цільової функції

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 100 \\ 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 20 \\ \hline 3 & 2 & F \end{array}\right).$$

3. Складаємо транспоновану матрицю

$$A^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 100 & 40 & 20 & Z \end{array}\right)$$

4. Формулюємо двоїсту задачу:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 3 \\ 4y_1 + y_3 \ge 2 \end{cases}, \ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

$$Z = 50y_1 + 40y_2 + 20y_3 \Rightarrow \min.$$

З першої теореми двоїстості випливає $Z_{\min} = F_{\max}$. Тоді з розв’язку прикладу №2 можна записати $Z_{\min} = 130$. За другою теоремою двоїстості показуємо відповідність змінних

Змінні вихідної задачі

Первісні		Додаткові		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_4	y_5	y_1	y_2	y_3
Додаткові		Первісні		

Змінні двоїстої задачі.

Тепер з розв’язку прикладу №2, тобто із симплекс-таблиці №3, з останнього рядка цільової функції виписуємо розв’язок двоїстої задачі. Отже, y_1 відповідає x_3 – це означає, що у стовпці x_3 дивимось на значення цільової функції, яке дорівнює 0,5, тоді $y_1 = 0{,}5$. Аналогічно знаходимо $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$. Таким чином, одержали план двоїстої задачі $Y = (1;\ 2;\ 0;\ 0;\ 0)$. Зробимо перевірку, підставивши у цільову функцію двоїстої задачі значення змінних “ y_i”: $Z = 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 20 \cdot 0 = 130$.

Завдання №15

Скласти математичну модель, записати двоїсту задачу. Розв’язати графічним і симплекс-методами задачу на максимум. Одержавши розв’язок задачі на максимум, записати розв’язок двоїстої задачі. Визначити економічний зміст отриманих розв’язків.

1. Продукцією міського молочного заводу є кефір і сметана, розфасовані в пляшки. На виробництво 1 т кефіру потрібно 1010 кг молока, а для сметани 9450 кг. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т кефіру складають 0,19 машино-год., на розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Усього для виробництва суцільномолочної продукції завод може використовувати 136000 кг молока. Основне устаткування може бути зайняте протягом 21,4 машино-год, а автомати по розфасовці сметани – протягом 16,25 ч.

прибуток від реалізації 1 т кефіру і сметани відповідно дорівнює 1600 і 2300 грн. Потрібно визначити, яку продукцію й у якій кількості варто щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації була максимальним.

2. Для будівництва будівель обрані два проекти. За кожним з проектів відомі тривалість закладки фундаментів, будівництва іншої частини будинку й опоряджувальних робіт, а також житлова площа будинку. Паралельно можна вести закладку 10 фундаментів, будівництво 12 будівель і робити опоряджувальні роботи в 5 будинках.

Вид роботи	Тривалість виконання (дні) для типового проекту	
	I	II
Закладка фундаменту	20	30
Опоряджувальні роботи	10	5
Інші роботи	30	15
Житлова площа	3000	2000

Скласти план будівництва, що максимізує уведення житлової площі протягом року (300 робочих днів).

3. Металургійний цех випускає два види продукції: А та Б. Прибуток від тонни зробленої продукції кожного виду складає відповідно 35 і 40 грн. Цех має у своєму розпорядженні необхідне устаткування. Кожен тип якого має свій фонд робочого часу і продуктивність.

Тип устаткування	Фонд часу	Продуктивність (т/год) виду продукції	
		А	Б
Піч випалу	2766	11	7
Травильний агрегат	624	5	2
Прокатний стан	416	1	1

Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимум прибутку.

4. При складанні добового раціону годівлі худоби можна використовувати свіже сіно, силос і комбікорми. Раціон повинний містити не менш: 100 г кальцію і 80 г фосфору. В табл. приведені дані про зміст зазначених компонентів у 1 кг кожного корму і собівартість цих кормів.

Корм	Компоненти		Собівартість грн./кг
	кальцій г/кг	фосфор г/кг	
Сіно свіже	1,25	2	1,2
Силос	2,5	1	0,8
Комбікорм	3	1,5	2

Визначити оптимальний раціон виходячи з умови мінімуму його вартості.

5. При підгодівлі посіву потрібно внести на 1 га ґрунти не менш 8 одиниць хімічної речовини А та 21 – речовини Б. Радгосп закуповує комбіновані добрива трьох видів I, II і III. У таблиці зазначені зміст хімічних речовин і ціна на одиницю ваги кожного виду добрив.

Хімічні речовини	Зміст речовини в одиниці ваги добрива		
	I	II	III
А	1	5	4
Б	12	3	4
Ціна	5	2	4

Мінімізувати витрати по закупівлі необхідного радгоспові кількості добрив.

6. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна одержати не менш 60 од. живильної речовини А та не менш 50 од. речовини В. Зазначені живильні речовини містять три види корму. Зміст живильних речовин у 1 кг кожний з видів кормів приведено в наступній таблиці.

Живильні речовини	Кількість одиниць живильних речовин у 1 кг корми виду		
	I	II	III
А	1	3	4
В	2	4	2

Скласти денний раціон, що забезпечує одержання необхідної кількості живильних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1 кг корму I виду складає 19 грн., корму II виду – 24 грн. і корму III виду – 25 грн.

7. З Москви до Санкт-Петербургу необхідно перевезти устаткування двох типів: не менш 84 одиниць типу I і 80 одиниць II типу. Для перевезення устаткування завод може замовити три види транспорту А, Б и В. Кількість устаткування кожного типу транспорту, що вміщається на визначений вид, а також змінні витрати, зв'язані з експлуатацією одиниці транспорту (у грн.), приведені в таблиці.

Тип устаткування	Кількість устаткування для виду транспорту		
	А	Б	В
I	3	2	3
II	4	1	5
Витрати	8	12	10

Спланувати перевезення так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

8. Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі А та В використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрати сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду приведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрати сировини (т) на 1 т карамелі		Загальна кількість сировини (т)
	А	В	
Цукровий пісок	0,8	0,5	800
Патока	0,4	0,4	600
Фруктове пюре	–	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн.)	108	112	

Знайти план виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

9. Для виробництва двох видів виробів А та В підприємство використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду приведені в таблиці. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, що може бути використано підприємством.

Вид сировини	Норми витрати сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

З огляду на те, що вироби А та В можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їхнього випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації усіх виробів буде максимальним.

10. Трикотажна фабрика використовує для виробництва светрів і кофточок чисту вовну, силон і нітрон, запаси якого складають відповідно 900, 400 і 300 кг. Кількість пряжі кожного виду (у кг), необхідної для виготовлення 10 виробів, а також прибуток, одержуваний від їхньої реалізації, приведені в таблиці.

Вид сировини	Витрати пряжі на 10 шт.	
	Светри	Кофточки
Вовна	4	2
Силон	2	1
Нітрон	1	1
Прибуток	6	5

Установити план випуску виробів, що максимізує прибуток.

11. Для виробництва двох видів виробів A та B використовується токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Норми витрат часу для кожного з типів устаткування на один виріб даного виду приведені в таблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип устаткування	Витрати часу (верстато-год) на обробку одного виробу		Загальний фонд робочого часу устаткування (год)
	A	B	
Фрезерне	10	8	168
Токарське	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	14	18	

Знайти план випуску виробів A та B, що забезпечує максимальний прибуток від їхньої реалізації.

12. На меблевій фабриці зі стандартних аркушів фанери необхідно вирізувати заготівлі двох видів у кількостях, відповідно не менше 24 і 31 шт. Кожен лист фанери може бути розрізаний на заготівлі трьома способами. Кількість одержуваних при даному способі розкрою приведено в таблиці. У ній зазначена величина відходів, що виходять при даному способі розкрою одного листа фанери.

Вид заготівлі	Кількість заготівель (шт.) при розкрої за способом		
	1	2	3
I	2	3	4
II	5	4	2
Величина відходів (см^2)	12	16	13

Визначити, скільки аркушів фанери варто розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготівель при мінімальних відходах.

13. Знайти оптимальне поєднання посівів двох культур: пшениці і гречки. Ефективність оброблення названих культур (у розрахунку на 1 га) характеризується показниками, значення яких приведені в таблиці. Виробничі ресурси: 2000 га ріллі, 5000 людино-днів праці механізаторів, 6000 людино-днів кінно-ручної праці. Критерій оптимальності – максимум прибутку.

Показники	Гречка	Пшениця
Врожайність, ц	40	80
Витрати праці механізаторів, людино-днів	4	2
Витрати кінно-ручної праці , людино-днів	5	3
Прибуток від реалізації 1 ц продукції, грн.	40	16

14. На швейній фабриці для виготовлення двох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрати тканин всіх артикулів на пошиття одного виробу приведені в таблиці. У ній же зазначені наявне в розпорядженні фабрики загальна кількість тканин даного артикула і ціна одного виробу даного виду.

Артикул тканини	Норма витрати тканини (м) на один виріб виду		Загальна кількість тканини (м)
	1	2	
I	1	–	180
II	–	1	210
III	4	2	800
Ціна одного виробу (грн.)	9	6	

Визначити, скільки виробів кожного виду повинна зробити фабрика, щоб вартість продукції була максимальною.

15. Нафтопереробний завод одержує три напівфабрикати: 400 тис. л алкілата, 250 тис. л крекінг-бензину і 200 тис. л ізопентону. В результаті змішання цих трьох компонентів у від-

ношенні 2:3:2 утвориться бензин А-95 вартістю 1200 грн. за 1 тис. л, у відношенні 3:1:1 – бензин А-76 вартістю 900 грн. за 1 тис. л. Скласти план, при якому вартість усієї випущеної продукції буде максимальною.

16. Підприємство випускає два види продукції і використовує три типи основного устаткування: токарське, фрезерне і шліфувальне. Витрати часу на виготовлення однієї одиниці продукції для кожного з типів устаткування приведені в таблиці. В ній же зазначені загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Тип устаткування	Витрати часу (верстато-год) на одиницю продукції виду		Загальний фонд робочого часу (год)
	1	2	
Токарне	2	1	300
Фрезерне	1	–	70
Шліфувальне	1	2	340
Прибуток від реалізації одиниці продукції (грн.)	8	3	

Визначити такий обсяг випуску кожного з виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації є максимальним.

17. Цех випускає два види виробів. Добові ресурси: 780 одиниць виробничого устаткування (верстати, машини і т.п.), 850 одиниць сировини (метал і т.п.) і 790 одиниць електроенергії. Їхня витрата на один виріб зазначені в таблиці.

Ресурси	Витрата ресурсів на виріб	
	I	II
Устаткування	2	3
Сировина	1	4
Електроенергія	3	4

Скільки треба робити виробів кожного виду, щоб вартість продукції була максимальною, якщо вартість виробу I – 8 грн., виробу II – 7 грн.

18. Машинобудівне підприємство для виготовлення двох видів продукції використовує токарське, розточувальне устаткування, а також комплектуючі вироби. Норми витрат усіх видів ресурсів на виготовлення кожного з виробів приведені в таблиці. У цій же таблиці зазначений наявний фонд кожного з ресурсів, прибуток від реалізації одиниці продукції даного виду.

Ресурси	Норми витрат на виготовлення одного виробу		Загальний обсяг ресурсів
	1	2	
Продуктивність устаткування (людино-год):			
Токарського	550	–	6400
Розточувального	160	128	2600
Комплектуючі вироби (шт.)	3	4	52
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	31	37	

Знайти план продукції, при якому прибуток від її реалізації є максимальною.

19. Для вантажних перевезень створюється автоколона. На придбання автомашин виділено 600 тис. грн. Можна замовити машини двох марок – А та Б, що характеризуються даними приведеними в таблиці. Кількість машин не повинна перевищувати 30, а загальне число водіїв в автоколоні повинне бути не більше 144 осіб.

Марка автомашини	Вартість машини, тис. грн.	Кількість водіїв, що обслуговують машину за зміну	Продуктивність машини за зміну, т/км
А	10	1	2100
Б	23	2	3780

Скільки автомашин кожної марки варто замовити, щоб автоколона мала максимально можливу продуктивність (т/км) у розрахунку на одну добу.

20. На ткацькій фабриці для виготовлення двох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох типів, пряжа і барвники. У таблиці зазначені продуктивність верстатів кожного типу, норми витрати пряжі і барвників, ціна 1 м тканини даного артикула, а також загальний фонд робочого часу верстатів кожного типу, які є в розпорядженні фабрики, фонди пряжі і барвників.

Ресурси	Норми витрат на 1 м тканині артикула		Загальна кількість ресурсів
	1	2	
Продуктивність верстатів (верстато-год):	0,06	0,03	700
Пряжа (кг)	1,0	1,5	15000
Барвники (кг)	0,03	0,02	450
Ціна 1 м тканини (грн.)	5	8	

Скласти такий план виготовлення тканин, відповідно до якого буде зроблено тканин кожного артикула, з максимальною загальною вартістю.

21. На звірофермі можуть вирощуватися чорно-бурі лисиці і песці. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, що повинні щодня одержувати лисиці і песці, приведено в таблиці. У ній же зазначені загальна кількість корму кожного виду, що може бути використано звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці та песця.

Вид корму	Кількість одиниць корму, що щодня повинні одержувати		Загальна кількість корму
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (грн.)	16	12	

Визначити скільки лисиць і песців варто вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їхніх шкурок була максимальним.

22. При виробництві двох видів кабелю виконується три групи технологічних операцій. Норми витрат на 1 км кабелю даного виду на кожній з груп операцій, прибуток від реалізації 1 км кожного виду кабелю, а також загальний фонд робочого часу, протягом якого можуть виконуватися ці операції, зазначені в таблиці.

Технологічна операція	Норми витрат часу (ч) на обробку 1 км кабелю виду		Загальний фонд робочого часу (год)
	1	2	
Волочіння	1,2	1,8	720
Накладення ізоляції	1,0	0,4	560
Освінцовування	3,0	–	360
Прибуток від реалізації 1 км кабелю (грн.)	1,2	0,8	

Визначити такий план випуску кабелю, при якому загальний прибуток від реалізації виготовленої продукції є максимальним.

23. З двох видів сировини необхідно скласти суміш, до складу якої повинно входити не менш 26 одиниць хімічної речовини А та 30 одиниць – речовини В. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1 кг сировини кожного виду, зазначено в таблиці. В ній же приведена ціна 1 кг сировини кожного виду.

Речовина	Кількість одиниць речовини, що міститься в 1 кг сировини виду		
	1	2	3
А	1	1	–
В	2	–	3
Ціна 1 кг сировини (грн.)	5	6	4

Скласти суміш, що містить не менш потрібної кількості речовин даного виду, та має мінімальну вартість.

24. Для виробництва продукції двох видів А та В використовуються три різні види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно не більшому, ніж 180, 210 і 236 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду і ціна одиниці продукції кожного виду приведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції	
	виріб А	виріб В
I	4	2
II	3	1
III	1	2
Ціна одиниці продукції (грн.)	10	14

Потрібно визначити план випуску продукції, що забезпечує максимальний її випуск у вартісному вираженні.

25. Для виготовлення взуття двох моделей на фабриці використовується два сорти шкіри. Ресурси робочої сили і матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції приведені в таблиці.

Ресурси	Запас ресурсів	Витрати ресурсів на одну пару взуття за моделями	
		№1	№2
Робочий час, люд-год	1000	1	2
Шкіра I сорту	500	2	0
Шкіра II сорту	1200	0	4
Прибуток, грн.		2	10

Скласти план випуску взуття за асортиментом, який максимізує прибуток.

26. Для підтримки нормальної життєдіяльності людині щодня необхідно споживати не менш 118 г білків і 56 г жирів. Кількість живильних речовин, що утримуються в 1 кг кожного виду споживаних продуктів, а також ціна 1 кг кожного з цих продуктів приведені в таблиці.

Живильні речовини	Зміст (г) живильних речовин у 1 кг продуктів			
	м’ясо	риба	молоко	картопля
Білки	180	190	30	21
Жири	20	3	40	2
Ціна 1 кг продуктів (грн.)	1,8	1,0	0,28	0,1

Скласти денний раціон, що містить не менш добової норми потреби людини в необхідних живильних речовинах при мінімальній загальній вартості споживаних продуктів.

27. Для виготовлення різних виробів А та В підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А та В, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використано підприємством, приведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
I	18	15	360
II	6	4	192
III	5	3	180
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	9	10	

Вироби А та В можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду. Скласти такий план виробництва виробів, при якому загальна вартість усієї зробленої підприємством продукції є максимальною.

28. У сплав може входити не менш 4% нікелю і не менш 60% заліза. Для складання сплаву використовуються три види сировини, що містять нікель, залізо та інші речовини. Вар-

тість різних видів сировини і процентний вміст у ньому відповідних компонентів сплаву представлені в таблиці.

Компоненти сплаву	Зміст компонентів для виду сировини, %		
	I	II	III
Залізо	70	90	85
Нікель	5	2	7
Вартість, коп./кг	60	40	50

Визначити склад шихти таким чином, щоб вартість 1 кг сплаву була мінімальною.

29. На промисловому комплексі по виробництву м'яса відгодовують свиней трьох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Вид корму	Запаси корму	Необхідна кількість корму (ц) для породи свиней		
		ранньостиглої (до 1 року)	середньостиглої (до 1,5 років)	пізньостиглої (до 2 років)
Грубі (сінне борошно, трав'ян.)	не менш 8000	3	2	3
Комбікорми	не менш 3000	1	2	1
Вартість відгодівлі, грн.		90	100	140

Потрібно знайти таке поголів'я свиней кожної породи, щоб собі вартість 1 ц м'яса була мінімальною.

30. Для виробництва столів і шаф фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість наявних ресурсів кожного виду приведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина ($м^3$):			
I виду	0,2	0,1	40
II виду	0,1	0,3	60
Трудомісткість (людино-год)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	6	8	

Визначити, скільки столів і шаф фабриці варто виготовляти, щоб прибуток від їхньої реалізації була максимальним.

§16 Транспортна задача

1. **Типи транспортних задач. Перший опорний план.** *Література*: [16], розд. V, §12, стор. 288-293.

Приклад №2. На три бази A_1, A_2, A_3 надійшов однорідний вантаж у кількості 300 т, 150 т, 250 т відповідно. Отриманий вантаж потрібно перевезти до 5 пунктів: 170 т – до пункту B_1, 110 т – B_2, 100 т – B_3, 120 т – B_4, 200 т – B_5. Відстані між пунктами відправлення зазначені в таблиці перевезень. Потрібно знайти оптимальний план перевезень.

Споживачі / Бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	70	50	15	80	70	300
A_2	80	90	40	60	85	150
A_3	50	10	90	11	25	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

Розв'язання. Загальна кількість вантажу на базах дорівнює 700, а загальна кількість необхідного вантажу теж дорівнює 700. Таким чином, перед нами закрита транспортна задача.

Побудуємо опорні плани двома способами:

1. Метод північно-західного кута.

Споживачі бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{80}$	$\boxed{70}$	300
A_2	$\boxed{80}$	$\boxed{90}$	$\boxed{40}$ 80	$\boxed{60}$ 70	$\boxed{85}$	150
A_3	$\boxed{50}$	$\boxed{10}$	$\boxed{90}$	$\boxed{11}$ 50	$\boxed{25}$ 200	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

$S = 170 \cdot 70 + 110 \cdot 50 + 20 \cdot 15 + 80 \cdot 40 + 70 \cdot 60 + 50 \cdot 11 + 200 \cdot 25 = 30650.$

2. Метод найменшої вартості.

споживачі бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	$\boxed{70}$ 20	$\boxed{50}$	$\boxed{15}$ 100	$\boxed{80}$	$\boxed{70}$ 180	300
A_2	$\boxed{80}$ 150	$\boxed{90}$	$\boxed{40}$	$\boxed{60}$	$\boxed{85}$	150
A_3	$\boxed{50}$	$\boxed{10}$ 110	$\boxed{90}$	$\boxed{11}$ 120	$\boxed{25}$ 20	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

$S = 20 \cdot 70 + 100 \cdot 15 + 180 \cdot 70 + 150 \cdot 80 + 110 \cdot 10 + 120 \cdot 11 + 200 \cdot 25 = 30420.$

Очевидно, що за допомогою методу найменшої вартості отриманий більш оптимальний план, чим за допомогою методу північно-західного кута.

2. **Цикли перерахування.** *Література*: [16], розд. V, §13, стор. 293-296.

3. **Поліпшення плану перевезень. Потенціали.** *Література*: [16], розд. V, §14-15, стор. 296-304.

Визначення. Перший опорний план є допустимим, якщо виконується така рівність

Число баз + число споживачів – 1 = число зайнятих кліток. (2.1)

Приклад №3. Знайти оптимальний план для прикладу №2 за допомогою методу потенціалів.

Розв'язання. Скористаємося першим опорним планом, побудованим за допомогою методу найменшої вартості. Розв'язок припустимий, оскільки виконується рівність (2.1), яка дорівнює 7.

Обчислюємо тарифи для зайнятих кліток:

$\alpha_1 + \beta_1 = 70;$ $\alpha_2 + \beta_1 = 80;$ $\alpha_3 + \beta_5 = 25;$ $\alpha_1 + \beta_3 = 15;$

$\alpha_3 + \beta_2 = 10;$ $\alpha_1 + \beta_5 = 70;$ $\alpha_3 + \beta_4 = 11.$

Розв'язок системи:

нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = -45$, $\beta_1 = 70$, $\beta_2 = 55$, $\beta_3 = 15$, $\beta_4 = 56$, $\beta_5 = 70$.

Знайдемо непрямі тарифи для незайнятих кліток і порівняємо їх з істинними:

$\underline{\alpha_1 + \beta_2 = 55 > 50}$ $\alpha_2 + \beta_3 = 25 < 40$ $\alpha_3 + \beta_1 = 25 < 50$

$\alpha_1 + \beta_4 = 56 < 80$ $\underline{\alpha_2 + \beta_4 = 66 > 60}$ $\alpha_3 + \beta_3 = -30 < 90$

$\alpha_2 + \beta_2 = 65 < 90$ $\alpha_2 + \beta_5 = 80 < 85.$

В отриманих нерівностях два знаки більше. Значить план не оптимальний. Для перерозподілу вантажу виберемо клітку A_2B_4. Будуємо цикл і перерозподіляємо вантаж (120 од.).

споживачі бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	70 20 +	50	15 100	80	70 – 180	300
A_2	80 150 –	90	40	60 +	85	150
A_3	50	10 110	90	11 120 –	25 + 20	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

Будуємо другу симплекс-таблицю.

споживачі бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	70 140	50	15 100	80	70 60	300
A_2	80 30	90	40	60 120	85	150
A_3	50	10 110	90	11	25 140	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

$S = 140 \cdot 70 + 100 \cdot 15 + 60 \cdot 70 + 30 \cdot 80 + 120 \cdot 60 + 110 \cdot 10 + 140 \cdot 25 = 29700.$

Розв’язок припустимий, оскільки виконується рівність (2.1).

Обчислюємо тарифи для зайнятих кліток:

$\alpha_1 + \beta_1 = 70;$ $\alpha_2 + \beta_1 = 80;$ $\alpha_3 + \beta_2 = 10;$ $\alpha_1 + \beta_3 = 15;$

$\alpha_2 + \beta_4 = 60;$ $\alpha_3 + \beta_5 = 25;$ $\alpha_1 + \beta_5 = 70.$

Розв’язок системи:

нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = –45$, $\beta_1 = 70$, $\beta_2 = 55$, $\beta_3 = 15$, $\beta_4 = 50$, $\beta_5 = 70$.

Знайдемо непрямі тарифи для незайнятих кліток і порівняємо їх з істинними:

$\underline{\alpha_1 + \beta_2 = 55 > 50}$ $\alpha_2 + \beta_2 = 65 < 90$ $\alpha_3 + \beta_1 = 25 < 50$

$\alpha_1 + \beta_4 = 50 < 80$ $\alpha_2 + \beta_3 = 25 < 40$ $\alpha_3 + \beta_3 = – 30 < 90$

$\alpha_2 + \beta_5 = 80 < 85$ $\alpha_3 + \beta_4 = 5 < 11.$

В отриманих нерівностях є знак більше. Значить план не оптимальний. Для перерозподілу вантажу беремо клітку A_1B_2. Будуємо цикл і перерозподіляємо вантаж, рівний 60 од.

споживачі бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	70 140	50 +	15 100	80	70 – 60	300
A_2	80 30	90	40	60 120	85	150
A_3	50	10 110 –	90	11	25 + 140	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

Будуємо третю симплекс-таблицю.

споживачі бази	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	70 140	50 60	15 100	80	70	300
A_2	80 30	90	40	60 120	85	150
A_3	50	10 90	90	11	25 200	250
Потреби	170	110	100	120	200	700

$S = 140 \cdot 70 + 60 \cdot 50 + 100 \cdot 15 + 30 \cdot 80 + 120 \cdot 60 + 50 \cdot 10 + 200 \cdot 25 = 29400.$

Розв'язок припустимий, оскільки виконується рівність (2.1).

Обчислюємо тарифи для зайнятих кліток:

$\alpha_1 + \beta_1 = 70;$ $\alpha_2 + \beta_1 = 80;$ $\alpha_3 + \beta_2 = 10;$ $\alpha_1 + \beta_2 = 50;$

$\alpha_2 + \beta_4 = 60;$ $\alpha_3 + \beta_5 = 25;$ $\alpha_1 + \beta_3 = 15.$

Обчислюємо тарифи для зайнятих кліток:

Розв'язок системи:

нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = -40$, $\beta_1 = 70$, $\beta_2 = 50$, $\beta_3 = 15$, $\beta_4 = 50$, $\beta_5 = 65$.

Знайдемо непрямі тарифи для незайнятих кліток і порівняємо їх з істинними:

$\alpha_2 + \beta_2 = 65 < 90$ $\alpha_3 + \beta_1 = 30 < 50$ $\alpha_1 + \beta_4 = 50 < 80$

$\alpha_2 + \beta_3 = 25 < 40$ $\alpha_3 + \beta_3 = -30 < 90$ $\alpha_1 + \beta_5 = 65 < 70$

$\alpha_2 + \beta_5 = 75 < 85$ $\alpha_3 + \beta_4 = 10 < 11.$

Оскільки усі знаки менше, то ми одержали оптимальний розв'язок.

Тобто матриця перевезень вантажу буде такою: $\begin{pmatrix} 140 & 60 & 100 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$.

Завдання №16

Розв'язати транспортну задачу, побудувавши перший опорний план двома способами.

1. Три судна доставили до порту 6000 т чавуна, 4000 т залізної руди і 3000 т апатитів. Розвантаження судів може бути здійснена або безпосереднє в залізничні вагони або на склади. У першому випадку можна розвантажити 8000 т, а залишок (5000 т) прийдеться відправити на склад. Вартість вивантаження 1 т у вагони складає відповідно 4,30; 5,25 і 2,20, а при відправленні на склад – 7,80; 6,40 і 3,25 грош. од. Спланувати розвантаження з мінімальними витратами, з огляду на те, що подані в порт вагони не пристосовані для перевезення апатитів.

2. Знайти оптимальний розподіл трьох видів механізмів, що є в кількостях 45, 20 і 35, між чотирма ділянками робіт, потреби яких відповідно дорівнюють 10, 20, 30 і 40, при такій матриці продуктивності кожного з механізмів на відповідній ділянці роботи: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Нульові елементи означають, що даний механізм не може бути використаний на даній ділянці роботи.

3. Чотири різних підприємства можуть випускати кожний з чотирьох видів продукції. Виробничі потужності підприємств дозволяють забезпечити випуск продукції кожного виду в кількостях 50, 70, 100 і 30 тис. штук, а планове завдання складає відповідно 30, 80, 40 і 100 тис. штук. Матриця $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ характеризує собівартість одиниці кожного виду продукції при виробництві його на кожнім підприємстві. Знайти оптимальний розподіл планового завдання між підприємствами.

4. Є 4 трактори марки А, 20 – марки Б, 10 – марки В та 4 – марки Г. Розподілити сільськогосподарські роботи за марками тракторів таким чином, щоб загальні витрати на виконання робіт були мінімальними. При цьому необхідно врахувати, що на культивації просапних і сінокосінні не можна використовувати трактор марки А, а на культивації просапних – трактор марки Б, усі необхідні дані приведені в таблиці.

Вид робіт	Обсяг робіт, га умовної оранки	Собівартість 1 га робіт (грн.) для марки трактора			
		А	Б	В	Г
Культивація пари	9300	0,8	1	0,9	0,9
Культивація просапних	2850	–	–	1	0,95
Сінокосіння	1850	–	0,8	0,75	0,85
Сезонна норма виробітку на кожен трактор, га умовної оранки.		500	385	310	300

5. У місті є чотири хлібозаводи, що забезпечуються борошном трьома мелькомбінатами. Усі необхідні дані приведені в таблиці.

Мелькомбінат	Хлібозавод				Добова продуктивність
	№1	№2	№3	№4	
№1	4	2	4	7	25
№2	7	6	6	8	20
№3	2	2	3	6	35
Добова потреба в борошні, т	30	20	12	18	

Потрібно розподілити постачання борошна при мінімальних витратах.

6. Заводи №1, 2 і 3 роблять однорідну продукцію в кількостях відповідно 390, 350 і 370 одиниць. Собівартість виробництва одиниці продукції на заводі №1 складає 25, на заводі №2 – 2, на заводі №3 – 23. Продукція надходить до пунктів А, Б та В, потреби яких відповідно дорівнюють 350, 340 і 420 одиницям. Вартості перевезень одиниці продукції задаються матрицею $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Скласти оптимальний план перевезення продукції з урахуванням її собівартості.

7. Завод має три цехи А, Б та В і чотири склади №1, 2, 3 і 4. Цех А робить 30, цех Б – 40, цех В – 20 тис. виробів. Пропускна здатність складів за той же час характеризується такими показниками: склад №1 – 25, склад №2 – 25, склад №3 – 25, склад №4 – 15 тис. виробів. Вартість перевезення з цеху А відповідно до складів №1, 2, 3 і 4 однієї тисячі виробів дорівнює 2; 3; 0,5 і 4 грн.; з цеху Б – 3; 2; 5 і 1 грн.; а з цеху В – 4, 3; 2 і 6 грн. Скласти план перевезення виробів до складів, що мінімізує транспортні витрати.

8. Фермерські господарства A_1, A_2, A_3 виділяють відповідно 30, 40 і 20 ц молока для щоденного постачання пунктів B_1, B_2, B_3, B_4. Вартість перевезення і потреби пунктів дані в таблиці.

Фермерське господарство	Споживач				Призначено для вивозу
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	5	4	30
A_2	3	2	4	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Потреба	20	25	35	10	

Потрібно організувати постачання таким способом, щоб цілком забезпечити споживачів молоком і щоб транспортні витрати були мінімальними.

9. У резерві трьох залізничних станцій А, Б та В знаходяться відповідно 60, 70 і 80 вагонів. Скласти оптимальний план перегону цих вагонів до чотирьох пунктів навантаження зерна, якщо №1 потрібно 40, пункту №2 – 60, пункту №3 – 45, а пункту №4 – 65 вагонів. Вартість перегону одного вагона зі станції А в зазначені пункти відповідно дорівнює 11, 12, 15 і 14 грн., зі станції Б – 14, 13, 12 і 11 грн., зі станції В – 15, 12, 14 і 16 грн.

10. Для контролю за роботою космічної ракети встановлені датчики чотирьох типів $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ і $Д_4$ у кількості 40, 40, 60 і 80 шт. відповідно. Кожен датчик визначає одну з характеристик (температуру, тиск і т.п.) і результат передає по окремому каналі зв’язку кожному з трьох типів наземних автоматичних пристроїв, що реєструють, P_1, P_2 і P_3, кількість яких від-

повідно дорівнює 70, 90 і 60 шт. Витрати часу на включення відповідного каналу зв'язки визначаються елементами матриці $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, де 4, наприклад, час, затрачуваний на включення каналу зв'язку датчика $Д_2$ з регістром $Р_3$. Як закріпити датчики за пристроями, що реєструють, щоб сумарні витрати часу на переключення каналів зв'язку були мінімальними?

11. На три бази $А_1$, $А_2$, $А_3$ надійшов однорідний вантаж у кількостях, відповідно рівних 140, 180 і 160 од. Цей вантаж потрібно перевезти до п'ять пунктів призначення $В_1$, $В_2$, $В_3$, $В_4$, $В_5$ відповідно в кількостях 60, 70, 120, 130 і 100 одиниць. Тарифи перевезень одиниці вантажу з кожного з пунктів відправлення у відповідні пункти призначення зазначені в таблиці:

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	$В_1$	$В_2$	$В_3$	$В_4$	$В_5$	
$А_1$	2	3	4	2	4	140
$А_2$	8	4	1	4	1	180
$А_3$	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	

Знайти план перевезень даної транспортної задачі.

12. На заводах №1, 2 і 3 виробляється однорідна продукція в кількості відповідно 500, 700 і 600 одиниць. При цьому витрати на виробництво одиниці продукції на зазначених заводах складають 10, 3 і 6. для чотирьох споживачів потрібно відповідно 400, 700, 200 і 500 одиниць продукції. Витрати по перевезенню продукції з кожного заводу кожному споживачу задаються елементами матриці $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Побудувати оптимальний план виробництва продукції для задоволення споживачів.

13. Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують три види сировини. Потреби в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 120, 50, 190 і 110 од. Сировина зосереджена в трьох місцях її виробітку, а запаси відповідно дорівнюють 160, 140, і 170 од. На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого пункту її виробітку. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Скласти план перевезень, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

14. Скласти план посіву зернових культур за ділянками, який мінімізує витрати засобів. Усі необхідні дані приведені в таблиці.

Зернові культури	Врожайність за ділянками, ц/га				Посівна площа
	I	II	III	IV	
Пшениця	50	40	40	40	2400
Ячмінь	50	40	40	45	350
Жито	50	50	45	40	250
Просо	60	50	50	50	100
Розміри ділянок, га	2000	500	200	400	3100

15. Виробниче об'єднання має у своєму складі три філії, що роблять однорідну продукцію відповідно в кількостях, що дорівнюють 50, 30 і 10 одиниць. Цю продукцію одержують чотири споживачі, розташовані в різних місцях. Їхні потреби відповідно рівні 30, 30, 10 і 20 од. Тарифи перевезень одиниці продукції від кожної з філій відповідним споживачам зада-

ються матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Скласти такий план прикріплення одержувачів продукції до її постачальників, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

16. Три підприємства даного економічного району можуть робити деяку однорідну продукцію в кількостях, відповідно рівних 180, 350 і 20 од. Ця продукція повинна бути відповідно поставлена п'ятьом споживачам у кількостях, відповідно рівних 110, 90, 120, 80 і 150 од. Витрати, пов'язані з виробництвом і доставкою одиниці продукції, задаються матрицею $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Скласти такий план прикріплення споживачів до постачальників, при якому загальні витрати є мінімальними.

17. Для транспортної задачі, вихідні дані якої приведені в таблиці, знайти оптимальний план.

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Потреби	30	30	10	20	

18. Є три ділянки землі, на яких можуть бути засіяні кукурудза, пшениця, ячмінь і просо. Площа кожного з ділянок відповідно дорівнює 600, 180 і 220 га. З урахуванням наявності насіння, кукурудзою, пшеницею, ячменем і просом варто відповідно засіяти 290, 180, 110 і 420 га. Врожайність кожної з культур для кожної з ділянок різна і задається матрицею $C = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}$. Визначити, скільки гектарів кожної культури на кожній з ділянок варто засіяти так, щоб загальний збір зерна був максимальним.

19. На чотирьох токарських верстатах різних типів можна виконувати чотири операції по обробці деталей. При цьому за кожним з верстатів може бути закріплені лише одна операція і ця операція може виконуватися тільки одним верстатом. Знаючи час виконання кожної з операцій на кожному із верстатів, яке задається матрицею $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, скласти такий розподіл виконуваних операцій між верстатами, при якому сумарні витрати часу на обробку деталі є мінімальними.

20. На трьох хлібокомбінатах щодня виробляється 110, 190 і 90 т борошна. Це борошно споживається чотирма хлібозаводами, щоденні потреби яких рівні відповідно 80, 60, 170 і 80 т. Тарифи перевезень 1 т борошна з хлібокомбінатів до кожного з хлібозаводів задаються матрицею: $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Скласти такий план доставки борошна, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

21. Знайти розв'язок транспортної задачі, вихідні дані якої визначаються таблицею:

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	2	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потреби	120	80	160	90	50	

22. Для будівництва трьох об’єктів використовується цегла, виготовлена на трьох заводах. Щодня кожний із заводів може виготовляти 100, 150 і 50 умов. од. цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному зі споруджуваних об’єктів відповідно дорівнюють 75, 80, 60 і 85 умов. од. Відомі також тарифи перевезень 1 умов. од. цегли з заводів до кожного зі споруджуваних об’єктів: $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$. Скласти такий план перевезень цегли до споруджуваних об’єктів, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

23. У трьох сховищах пального щодня зберігається 175, 125 і 140 т бензину. Цей бензин щодня одержують чотири заправні станції в кількостях, рівних відповідно 180, 110, 90 і 60 т. Вартості перевезень 1 т бензину зі сховищ до заправних станцій задаються матрицею $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Скласти такий план перевезень бензину, при якому вартість перевезень є мінімальною.

24. Знайти розв’язок транспортної задачі, вихідні дані якої визначаються таблицею:

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	8	7	2	1	220
A_2	6	3	5	4	6	140
A_3	7	4	2	3	2	160
Потреби	80	140	90	130	80	520

25. На трьох складах оптової бази зосереджений однорідний вантаж у кількостях 180, 60 і 80 од. Цей вантаж необхідно перевезти до 4 магазинів. Кожний з магазинів повинний одержати відповідно 140, 40, 60 і 80 од. вантажу. Тарифи перевезень одиниці вантажу з кожного зі складів до усіх магазинів задаються матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

26. На трьох складах оптової бази зосереджене борошно в кількостях, рівних відповідно 140, 360 і 180 т. Це борошно необхідно завезти до 5 магазинів, кожний з яких повинний одержати відповідно 90, 120, 230, 180 і 60 т. Знаючи тарифи перевезення 1 т борошна з кожного зі складів до відповідного магазину, що визначаються матрицею $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ скласти план перевезень, що забезпечує мінімальну загальну вартість перевезень.

27. Для будівництва трьох доріг використовується гравій з чотирьох кар’єрів. Запаси гравію в кожному з кар’єрів відповідно дорівнюють 130, 220, 90 і 120 умов. од. Потреби в гравії для будівництва кожної з доріг відповідно дорівнюють 120, 280 і 160 ум. од. Відомі також тарифи перевезень 1 умов. од. гравію з кожного із кар’єрів до кожної зі споруджува-

них доріг, що задаються матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Скласти такий план перевезення гравію, при якому потреби в ньому кожної зі споруджуваних доріг були б задоволені при найменшій загальній вартості перевезень.

28. На кожній з чотирьох філій виробничого об'єднання можуть виготовлятися вироби чотирьох видів. З огляду на необхідність поглиблення спеціалізації, на філіях вирішено зосередити випуск тільки по одному виді виробів. Собівартість кожного з виробів на кожній з філій різна і визначається матрицею $C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти такий розподіл випуску продукції між філіями, щоб загальна собівартість продукції була мінімальною.

29. На трьох залізничних станціях A_1, A_2 і A_3 зібралося 120, 110 і 130 незавантажених вагонів. Ці вагони необхідно перегнати на залізничні станції B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5. На кожній з цих станцій потреба у вагонах відповідно дорівнює 80, 60, 70, 100 і 50. Знаючи, що тарифи перегонки одного вагона визначаються матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ скласти такий план перегону вагонів, щоб його загальна вартість була мінімальною.

30. М'ясокомбінат має у своєму складі чотири заводи, на кожнім з яких може виготовлятися три види ковбасних виробів. Потужності кожного з заводів відповідно дорівнюють 320, 280, 270 і 350 т/добу. Щоденні потреби в ковбасних виробах кожного виду також відомі і відповідно дорівнюють 450, 370 і 400 т. Знаючи собівартість 1 т кожного виду ковбасних виробів на кожному заводі, що визначаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, знайти такий розподіл випуску ковбасних виробів між заводами, при якому собівартість виготовленої продукції є мінімальною.

Глосарій

I. ТЕОРІЯ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Визначник II-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

2. Визначник III-го порядку

а) метод Саррюса: $\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$;

б) правило трикутника $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - b_1 a_2 c_3$.

3. Розклад визначника за елементами *i*-го рядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in},$$

де A_{ij} *– алгебраїчні доповнення елементу* a_{ij}*, причому* $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,

M_{ij} *– мінор елементу* a_{ij}*, тобто визначник* $(n-1)$*-го порядку, одержаний з визначника* Δ *викреслюванням i-го рядку та j-го стовпця.*

<u>Приклад</u>. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

Зауваження. *Визначники порядку вище за третій обчислюються з використанням основних властивостей визначники, тобто одержання максимальної кількості нулів у рядку (стовпці), а потім розклад визначника за елементами вказаного рядка (стовпця).*

II. АЛГЕБРА МАТРИЦЬ

1. Сума, різниця матриць *існують тільки для матриць, що мають однакові розміри:*

<u>Приклад</u>.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix};$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix}.$$

2. Добуток матриць *існує тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці, тобто*

$$A_{(m,\underline{\underline{n}})} \cdot B_{(\underline{\underline{n}},k)} = C_{(m,k)}; \quad c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Добуток матриць дорівнює сумі добутків відповідних елементів рядка на стовпець для усіх $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,k$.

<u>*Приклад*</u>.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix};$$

$$A_{(2,3)}\times B_{(3,2)}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

3. Ранг матриці – *найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці.*

4. Множення матриці на число *здійснюється множенням кожного елементу на дане число.*

5. Зворотна матриця $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ **;**

де E *– одинична матриця.*

D *– значення визначника матриці* A *;* $D\neq 0$

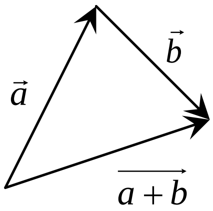
A_{ij} *– алгебраїчні доповнення, тобто*

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ *;* M_{ij} *– мінор елементу* a_{ij} .

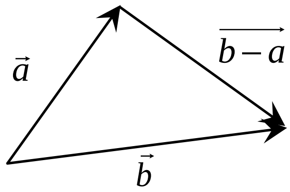
$$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

III. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

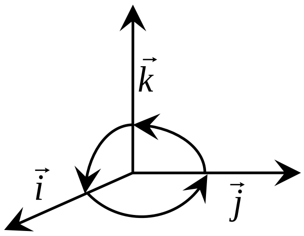
1. Сума



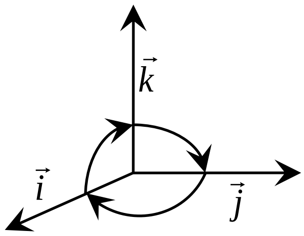
2. Різниця



3. Ортонормований базис $\vec{i}$ **,** $\vec{j}$ **,** $\vec{k}$ **, якщо вектори** $\vec{i}$ **,** $\vec{j}$ **,** $\vec{k}$ **– одиничні та попарно ортогональні:**



Правий базис



Лівий базис

4. Проекція вектора на число

$\text{ïð}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}=|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a},\wedge\vec{b})$**,** $\qquad |\vec{a}|$ *– модуль (довжина) вектору* $\vec{a}$.

5. Скалярний добуток

$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\wedge\vec{b})$, $\qquad$ *причому* $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$,

якщо $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, $\qquad$ *тоді* $(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

6. Довжина або модуль вектора $\vec{a}=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ **.**

7. *Якщо дані дві точки* $A(x_1,y_1,z_1)$ *і* $B(x_2,y_2,z_2)$, *тоді вектор* $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ *, де* $\vec{i}$ **,** $\vec{j}$ **,** $\vec{k}$ *– одиничні вектори правого базису.*

8. Відстань між вдома точка $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

9. Кут φ між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

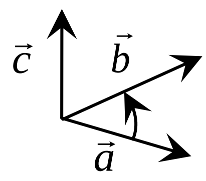
$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \textit{або} \qquad \cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

10. Умова ортогональності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$, *якщо* $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ *або* $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

11. Умова паралельності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$, *якщо* $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

12. Векторний добуток двох векторів:

$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \wedge \vec{b})$, *причому* $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

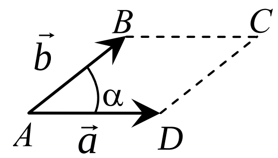


Якщо $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, *тоді* $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$,

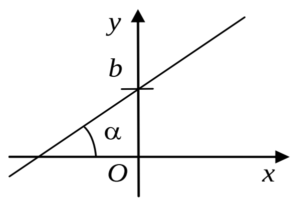
де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *– ортонормований правий базис.*

13. Геометричний зміст модуля векторного добутку.

$|\vec{c}| = S_{ABCD} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$.



IV. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

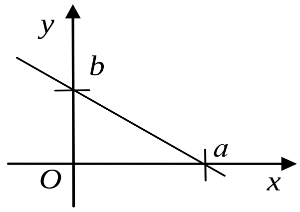


1. Рівняння прямої.

а) з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$; *де* $k = tg\alpha$, b *– відрізок, що відтинається даною прямою на вісі* Oy.

б) у відрізках на осях $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$,

де a, b *– відрізки, що відтинаються даною прямою на відповідних координатних осях;*

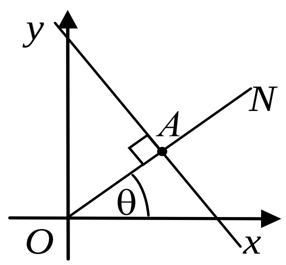


в) через одну точку $M(x_1; y_1)$: $\quad y - y_1 = k(x - x_1)$

г) через дві точки, тобто $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$: $\quad \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

д) нормальне рівняння $x\cos\theta + y\sin\theta - \rho = 0$

$\angle\theta$ *– кут між нормаллю* N *прямої і додатним напрямком вісі Ох.*



е) загальне рівняння прямої та його дослідження

Ax + By + C = 0;

A = 0; By + C = 0 – пряма паралельна вісі Ох;

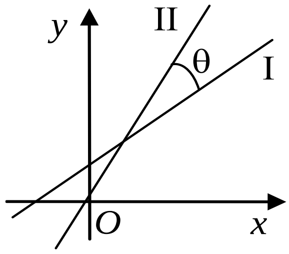
B = 0; Ax + C =0 – пряма паралельна вісі Оу;

C = 0; Ax + By = 0 – пряма проходить через початок координат;

A = C = 0; y = 0 – рівняння вісі Ох;

B = C= 0; x = 0 – рівняння вісі Оу.

2. Взаємне розташування двох прямих



а) $y = k_1x + b_1$; (I)

$y = k_2x + b_2$; (II)

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \Rightarrow$$

– *прямі* $||$ $k_1 = k_2$;

– *прямі* $\perp$ $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

б) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$; (I)

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$; (II)

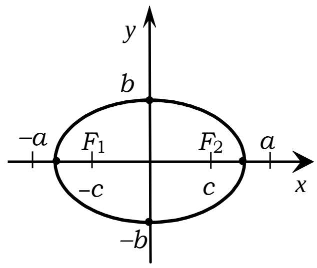
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \Rightarrow$$

– *умова* $||$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

– *умова* $\perp$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

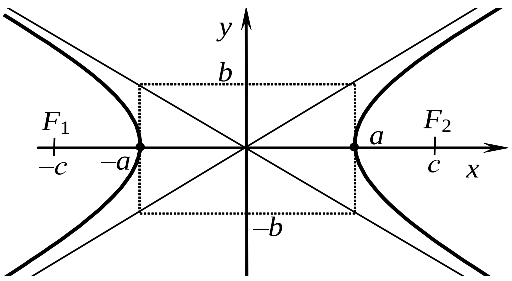
3. Відстань точки $M_0(x_0; y_0)$ **до прямої** $Ax + By + C = 0$**:** $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

4. Рівняння еліпса



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $b^2 = a^2 – c^2$, – *ексцентриситет.*

5. Рівняння гіперболи



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $b^2 = c^2 - a^2$,

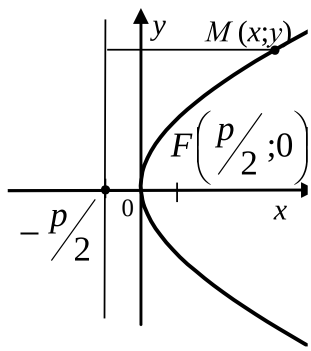
$\varepsilon = c/a$,

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – *рівняння асимптот.*

Спряжена гіпербола:

$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – *графік повернеться на* $90°$.

6. Рівняння параболи



$y^2 = 2px$, $r = d$.

$x^2 = 2py$ – *парабола симетрична відносна вісі Оу.*

V. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

1. Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

Нормальний вектор, перпендикулярний до площини $\vec{N}(A;B;C)$;

2. Рівняння площини через одну точку $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$**:**

$$Ax + By + C(z – z_0) = 0 \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

3. Рівняння площини через три точки $A(x_1, y_1, z_1)$**,** $B(x_2, y_2, z_2)$ **і** $C(x_3, y_3, z_3)$**:**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Дослідження загального рівняння площини:

а)	$D = 0$;	$Ax + By + Cz = 0$	– *площина проходить через т.* $O(0;0;0)$;
б)	$A = 0$;	$By + Cz + D = 0$	– *площина* $||$ *Ох;*
	$B = 0$;	$Ax + Cz + D = 0$	– *площина* $||$ *Оу;*
	$C = 0$;	$Ax + By + D = 0$	– *площина* $||$ *Оz;*
в)	$A = D = 0$;	$By + Cz = 0$	– *площина проходить через Ох;*

$B=D=0$; $Ax+Cz=0$ – *площина проходить через Oy;*

$C=D=0$; $Ax+By=0$ – *площина проходить через Oz;*

г) $A=B=0$; $Cz+D=0$ – *площина | | площині xOy;*

$A=C=0$; $By+D=0$ – *площина | | площині xOz;*

$B=C=0$; $Ax+D=0$ – *площина | | площині yOz;*

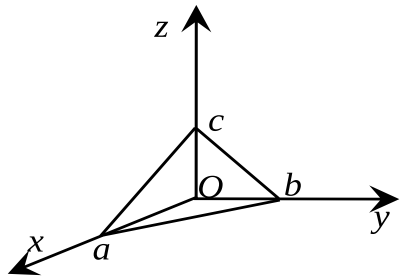
д) $A=B=D=0$ $z=0$ – *рівняння площини xOy;*

$A=C=D=0$ $y=0$ – *рівняння площини xOz;*

$C=B=D=0$ $x=0$ – *рівняння площини yOz;*

5. Рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$



6. Відстань точки M_0 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ **до площини** $Ax+By+Cz+D=0$**:**

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

7. Взаємне розташування двох площин $Ax+By+Cz+D=0$ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ **та** $Ax+By+Cz+D=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$**:**

а) Умова | | двох площин $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$;

б) Умова $\perp$ *двох площин* $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

в) Кут між двома площинами $\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

8. Загальне рівняння прямої у просторі: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

9. Канонічне рівняння прямої через одну точку M_0 (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

m, n, p – координати напрямного вектора $\vec{s}(m,n,p)$ *| | прямій.*

10. Приведення загального рівняння прямої до канонічного вигляду

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},\quad\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{pmatrix};\ \Rightarrow\quad m=\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix},\quad n=-\begin{vmatrix}A_1&C_1\\A_2&C_2\end{vmatrix}$$

та $p=\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}$, *координати* M_0 (x_0, y_0, z_0) *одержують при розв'язанні системи.*

11. Параметричне рівняння прямої $\begin{cases}x=mt+x_0,\\y=nt+y_0,\\z=pt+z_0,\end{cases}$

12. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ **та** $B(x_2, y_2, z_2)$**:**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

13. Взаємне розташування двох прямих:

а) Умова | | двох прямих $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$;

б) Умова $\perp$ *двох прямих* $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

в) Кут між двома прямими $\cos\theta = \dfrac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

14. Взаємне розташування прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ **та площини** $Ax + By + Cz + D = 0$**:**

а) Умова || прямої та площини $Am + Bn + Cp = 0$;

б) Умова $\perp$ *прямої та площини* $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;

в) Кут між прямою та площиною $\sin\theta = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

15. Умова приналежності прямої площині:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ap + Bn + Cp = 0 \end{cases}.$$

16. Точка перетину прямої $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases}$ **і площини** $Ax + By + Cz + D = 0$**:**

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases}$$

підставити до першого рівняння площини та знайти t, а потім підставити до параметричного рівняння і обчислити координати x, y, z.

17. Поверхні ІІ-го порядку

а) Сферична поверхня:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^3;$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – *точка центу сфери; R – радіус сфери.*

б) Еліпсоїд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

в) *Однопорожнинний гіперболоїд* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

г) *Двопорожнинний гіперболоїд* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$;

д) *Еліптичний параболоїд* $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$;

е) *Гіперболічний параболоїд* $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$;

є) *Конус* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

VI. ДЕЯКІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

1. Грецький алфавіт

Αα – альфа	Εε – епсилон	Νν – ню	Φφ – фі
Ββ – бета	Θθ – тета	Ππ – пі	Χχ – хі
Γγ – гамма	Λλ – лямбда	Ρρ – ро	Ψψ – псі
Δδ – дельта	Μμ – мю	Σσ – сигма	Ωω – омега

2. Позначення

N – множина всіх натуральних чисел

Z – множина всіх цілих чисел

R – множина всіх дійсних чисел

$\in$ – знак приналежності

$\Rightarrow$ – знак логічного слідування

$\Leftrightarrow$ – знак логічної равносильності

$[a;b]$ – закритий інтервал, проміжок

$(a;b)$ – відкритий інтервал

$[a;b);\ (a;b]$ – напіввідкритий інтервал

$D(f)$ – область визначення функції.

$E(f)$ – множина значень функції.

3. Деякі значення функцій:

$\sin 0^\circ = 0$	$\sin 45^\circ = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$	$\sin 90^\circ = \sin(\pi/2) = 1$	$a^0 = e^0 = 1$
$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 45^\circ = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$	$\cos 90^\circ = \cos(\pi/2) = 0$	$\log_a 1 = \ln 1 = 0$
$tg 0^\circ = 0$	$tg 45^\circ = tg(\pi/4) = 1$	$tg 90^\circ = \infty$	$e \approx 2{,}71828183\ldots$
$ctg 0^\circ = \infty$	$ctg 45^\circ = ctg(\pi/4) = 1$	$ctg 90^\circ = 0$	$\pi \approx 3{,}14159265\ldots$

VII. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. Таблиця похідних складних функцій

№ п/п	$f(U)$	$f'(U)\cdot U'$
1.	C	0
2.	x	1
3.	U^n	$n\,U^{n-1}\cdot U'$
4.	$\sqrt{U}$	$\frac{1}{2\sqrt{U}}\cdot U'$
5.	$\frac{1}{U}$	$-\frac{1}{U^2}\cdot U'$
6.	$\sin U$	$\cos U\cdot U'$
7.	$\cos U$	$-\sin U\cdot U'$
8.	$\mathrm{tg}\,U$	$\frac{1}{\cos^2 U}\cdot U'$
9.	$\mathrm{ctg}\,U$	$-\frac{1}{\sin^2 U}\cdot U'$
10.	e^U	$e^U\cdot U'$

№ п/п	$f(U)$	$f'(U)\cdot U'$
12.	$\ln U$	$\frac{1}{U}\cdot U'$
13.	$\log_a U$	$\frac{1}{\ln a\cdot U}\cdot U'$
14.	$\mathrm{arctg}\,U$	$\frac{1}{1+U^2}\cdot U'$
15.	$\mathrm{arcctg}\,U$	$-\frac{1}{1+U^2}\cdot U'$
16.	$\arcsin U$	$\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\cdot U'$
17.	$\arccos U$	$-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\cdot U'$
18.	$C\cdot U$	$C\cdot U'$
19.	$U\pm V$	$U'\pm V'$
20.	$U\cdot V$	$U'\cdot V + U\cdot V'$
21.	$\frac{U}{V}$	$\frac{U'\cdot V - U\cdot V'}{V^2}$

№ п/п	$f(U)$	$f'(U)\cdot U'$	№ п/п	$f(U)$	$f'(U)\cdot U'$
11.	a^U	$a^U \ln a \cdot U'$			

2. Похідні функції:

а) заданої неявно $F(x, y) = 0$: $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$;

б) заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$: $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$;

3. Диференціал функції $y = f(x)$**:** $dy = f'(x)\cdot dx$.

VIII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. Таблиця невизначених інтегралів

№ п/п	$\int f(U)dU$	$F(U)+C$	№ п/п	$\int f(U)dU$	$F(U)+C$
1.	$\int dU$	$U+C$	2.	$\int U^n dU$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}+C$
3.	$\int \frac{1}{U^2}dU$	$-\frac{1}{U}+C$	4.	$\int \frac{1}{\sqrt{U}}dU$	$2\sqrt{U}+C$
5.	$\int \frac{dU}{U}$	$\ln\lvert U\rvert+C$	6.	$\int e^U dU$	e^U+C
7.	$\int a^U dU$	$\frac{a^U}{\ln a}+C$	8.	$\int \frac{dU}{U^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{U-a}{U+a}\right\rvert+C$
9.	$\int \sin U dU$	$-\cos U+C$	10.	$\int \cos U dU$	$\sin U+C$
11.	$\int \frac{dU}{\cos^2 U}$	$\mathrm{tg}U+C$	12.	$\int \frac{dU}{\sin^2 U}$	$-\mathrm{ctg}U+C$
13.	$\int \mathrm{tg}U dU$	$-\ln\lvert\cos U\rvert+C$	14.	$\int \mathrm{ctg}U dU$	$\ln\lvert\sin U\rvert+C$
15.	$\int \frac{dU}{a^2+U^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{U}{a}+C$	16.	$\int \frac{dU}{\sqrt{a^2-U^2}}$	$\arcsin\frac{U}{a}+C$
17.	$\int \frac{dU}{\sqrt{U^2\pm a^2}}$	$\ln\left\lvert U+\sqrt{U^2\pm a^2}\right\rvert+C$	18.	$\int f(kU+b)dU$	$\frac{1}{k}F(kU+b)+C$

2. Основні методи інтегрування функцій:

а) частинами: $\int UdV = U\cdot V - \int VdU$ – використовується, коли підінтегральна функція є добутком x^α, $\alpha \in R$ та показникової, логарифмічної, тригонометричної або оберненої тригонометричної функцій, а також добутком інших різнойменних функцій;

б) заміна змінної: $\int f(x(t))x'(t)dt = \int f(x)dx$, *де* $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$;

в) в чисельнику точна похідна від знаменника: $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ або $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$;

г) універсальна тригонометрична підстановка $tg\frac{x}{2} = t$, якщо підінтегральна функція є раціональною від sin*x* або cos*x*, при цьому $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\mathrm{arctg}t$,

$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

IX. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. **Події** позначаються: A, B, C…; **протилежні** події: $\overline{A}, \ \overline{B}, \overline{C}$.
2. **Перестановка** з *n* елементів: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$
3. **Розміщення** з *n* елементів по *k*: $A_n^k = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ ñï³âìíîæíè} \quad \text{ê³â}}$
4. **Сполучення** з *n* елементів по *k:* $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}$
5. **Класичне** визначення ймовірності: $Ð(À) = \dfrac{m}{n}$, де *m* – число сприятливих випробувань;

n – загальне число випробувань.

6. Ймовірність **суми несумісних** подій $Ð(À_1 + À_2) = Ð(À_1) + Ð(À_2)$
7. Ймовірність **протилежної** події: $Ð(\overline{À}) = 1 - Ð(À)$
8. Ймовірність **добутку незалежних** подій: $P(A_1 \times A_2) = P(A_1)\times P(A_2)$.
9. Ймовірність **добутку** двох **залежних** подій *A* та *B*: $Ð(À\times Â) = Ð(À)\times Ð_À(Â)$
10. **Принцип протилежності** подій: ймовірність настання події *A*, що полягає в появі хоча б однієї з подій A_1, A_2, …, A_n дорівнює 1 – $[Ð(\overline{À}_1) + Ð(\overline{À}_2) + \ldots + Ð(\overline{À}_n)$.
11. Формула **повної ймовірності:** $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$, де H_1, H_2, …, H_n – гіпотези.
12. Теорема **Байєса**: $P_A(H_i) = P\left(Í_³ \big/ A\right) = \dfrac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$
13. Формула **Бернуллі:** $P_{m,n} = P_m(n) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, де $q = 1 - p$.
14. **Найймовірніше** число m_0 настання *A* в *n* незалежних випробуваннях: $m_0 = [(n+1)\cdot p]$.
15. **Випадкова величина**

	Математичне сподівання	**Дисперсія**
Дискретна	$M(x) = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$	$D(X) = M(x^2) - M^2(x)$
Неперервна	$\text{M}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$	$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx - M^2(x)$

16. **Середнє квадратичне відхилення** випадкової величини: $\sigma(x) = \sqrt{D}$.

Список літератури

1. Барковський В.В. Вища математика для економістів: Навч. посіб. для студ. економ. спец./ В.В.Барковський, Н.В.Барковська. – 3-є вид., перероб. та доп. – К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.

2. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, Лінійні моделі: Посібник для студентів вищих навч. закл. – К.-Ж.: Видавничий центр "Академія", 1998. – 272 с.

3. Васильченко І.П. Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002.- 454с.

4. Вища математика: Збірник задач у двох частинах. Ч. 1/ За заг. Ред. П.П. Овчинникова. – 2-ге вид. Стереот. – К.: Техніка, 2004. – 280 с.

5. Вища математика: Збірник задач у двох частинах. Ч. 2 / За заг. Ред. П.П. Овчинникова. – 2-ге вид. Стереот. – К.: Техніка, 2004. – 376 с.

6. Волкова Т.Д., Звьоздочкіна О.А. Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Загальний курс математики» для нематематичних спеціальностей заочної форми навчання (частини І, ІІ). – Запоріжжя: ЗНУ, 2006.

7. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

8. Гетманцев В.Д. Математика для економістів. – К.: КНЕУ, 2001. – 152с.

9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.

10. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія", 2002. – 624 с.

11. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Высшая школа, 1974.

12. Кремер Н. Практикум по высшей математике для экономистов. – М., 2005. – 423 с.

13. Солодовников А.С., Бабейцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: В 3 ч. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 224 с.

14. Справочник по математике для экономистов // Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: Высшая школа, 1987. – 336 с.

15. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Высшая математика. Общий курс. Сб. задач и упражнений. – 2-е изд., испр. и доп. – Х.: Рубрикон, 1999. – 320 с.

16. Толок В.О., Киричевський В.В., Волкова Т.Д. Курс математики для економістів. Навчальний посібник в трьох частинах. Ч.1 – К.: Наукова думка, 2002. — 336 с.

17. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1964. – 304 с.

Додаток А

Зміст дисципліни «Вища та прикладна математика»

Модуль 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Диференційне числення.

Тема 1. Лінійна алгебра. Визначники та їх властивості. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Гауса. Матриці та дії над ними. Теорема Кронекера-Капеллі. ФСР. Застосування СЛАР в економіці. Лінійна модель Леонтьева.

Тема 2. Векторна алгебра. Лінійний n-вимірний векторний простір. Базис. Власні значення та власні вектори. Поняття про декартову систему координат. Характеристики векторів та лінійні операції над ними. Проекція вектора на вісь. Довжина вектора. Скалярний, векторний та мішаний добутки 2-х векторів у декартовій системі координат та їх обчислення. Одиниці вимірювання кутів. Визначення кута між векторами. Лінійна залежність векторів.

Тема 3. Аналітична геометрія на площині та у просторі.. Пряма лінія на площині. Типи рівнянь прямих: загальне рівняння прямої та його дослідження; рівняння з кутовим коефіцієнтом, рівняння у відрізках на осях, нормальне рівняння. Загальне розташування двох прямих на площині; умови паралельності та перпендикулярності двох прямих. Визначення кута між прямими. Розв’язання системи нерівностей двома невідомими графічним методом. Поняття про криві 2-го порядку. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи та параболи. Визначення півосей, координат фокусів та ексцентриситету кривих другого порядку. Приведення до канонічного вигляду рівнянь другого порядку. Економічні задачі. Загальне рівняння площини та його дослідження. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин. Знаходження відстані від точки до площини. Визначення кута між площинами. Загальне, канонічне та параметричне рівняння прямої у просторі. Умови паралельності та перпендикулярності прямих та площин у просторі. Поверхні другого порядку. Канонічні рівняння циліндра, еліпсоїда, тощо.

Тема 4. Диференціальне числення функції однієї змінних. Дійсні, комплексні числа та дії над ними. Формула Ейлера. Числова послідовність. Поняття функції. Властивості функції. Функція однієї змінної, способи задання функції, класифікація функцій та неперервність функції. Поняття границі числової послідовності. Обчислення границі функції. Дві визначні границі. Основні методи обчислення границь та розкриття невизначеностей. Геометричний, фізичний та економічний зміcти похідної. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Означення диференціалу функції. Обчислення похідної функції, її диференціалу. Правила диференціювання функцій та правило Лопіталя для обчислення границі функції, яка містить невизначеність. Розклад функції в ряд Тейлора в околі заданої точки. Формула Тейлора. Обчислення похідних вищих порядків. Поняття екстремуму. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції однієї змінної. Види асимптот графіка функції. Дослідження функції на екстремум (метод інтервалів) та знаходження асимптот графіка функції. Побудова схематичного графіка функції.

Модуль 2. Теорія ймовірностей.

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей. Основні формули комбінаторики. Подія, ймовірність випадкової події. Класичне визначення ймовірності. Частість. Залежні та незалежні випадкові події й основні формули множення та додавання ймовірностей. Залежні події. Сумісні події. Повторні незалежні експерименти, локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Бернуллі. Наймовірніше число настання події.

Тема 2. Випадкові величини. Функція розподілу дискретної та неперервної величин. Математичне сподівання та дисперсія. Функції випадкових аргументів та їх числові характеристики. Неперервні випадкові величини. Неперервні величини. Закони їх розподілу.

Тема 3. Основні закони теорії ймовірностей. Основні закони неперервних випадкових величин. Нормальний, рівномірний, показниковий, закон Максвелла, закон Стьюдента. Закон великих чисел та його наслідки. Нерівність Чебишева. Теорема Чебишева. Наслідки теореми.

Модуль 3. Диференційне числення. Інтегральне числення.

Тема 1. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Відкриті та замкнуті множини. Область. Поняття про функцію багатьох змінних, область, границі та неперервність функції, частинні похідні, частинні диференціали функції. Економічний зміст частинних похідних функції багатьох змінних. Повний диференціал функцій. Похідна по напрямку, градієнт функції. Дослідження функцій багатьох змінних. Безумовні та умовні екстремуми функції. Задача інтерполяції. Дослідження на екстремум функції двох змінних та розв'язання задачі інтерполяції. Метод найменших квадратів.

Тема 2. Інтегральне числення функції однієї змінної. Первісна функція. Поняття про інтегрування. Невизначений та визначений інтеграли та їх властивості. Таблиця основних інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца. Економічний та геометричний зміст визначеного інтеграла. Обчислення інтегралів. Основні методи інтегрування: заміна змінної; частинами; інтегрування раціонального дробу. Поняття невласного інтегралу. Невласний інтеграл першого та другого родів. Дослідження на збіжність невласних інтегралів. Ряд Фур'є.

Тема 3. Ряди. Диференціальні рівняння. Числові ряди. Критерії збіжності рядів. Абсолютна та умовна збіжність. Функціональні та степеневі ряди. Область збіжності. Основні поняття диференціальних рівнянь. Лінійні неоднорідні та однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язання задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку. Лінійні неоднорідні та однорідні диференціальні рівняння вищих порядків. Характеристичне рівняння для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язання задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язання задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами. Типи неоднорідностей. Метод варіації змінної.

Модуль 4. Математичні методи дослідження операцій розв’язання задач та їх економічного тлумачення. Лінійне програмування. Транспортна задача. Нелінійне програмування.

Тема 1. Загальна постановка задачі лінійного програмування та її властивості. Геометричний метод розв’язку задач. Симплекс-метод. Двоїста задача та її особливості. Поняття математичної моделі для економічних задач. Види основної задачі лінійного програмування. Графічний розв’язок системи обмежень. Симплекс-метод розв’язання математичних моделей для економічних задач у випадку, коли число змінних більше двох. Метод штучного базису. Поняття та тлумачення з економічної точки зору двоїстої задачі. Основні теореми зв’язку вихідної задачі з двоїстою. Економічний зміст отриманих розв’язків.

Тема 2. Транспортна задача за умовою закритої моделі. Відкрита модель транспортної задачі. Поняття та постановка транспортної задачі. Методи побудови першого опорного плану. Поліпшення опорного плану методом потенціалів. Поняття циклу та перерахування опорного плану за циклом. Відкрита модель транспортної задачі. Поняття фіктивних споживачів та постачальників. Задачі, які зводяться до транспортної.

Тема 3. Методи оптимізації класичний та за допомогою множників Лагранжа. Поняття оптимізації економічних задач у випадку нелінійної залежності системи обмежень та цільової функції. Класичний метод дослідження нелінійної цільової функції на умовні та безумовні екстремуми. Метод множників Лагранжу.

Додаток Б

Приклад оформлення титульного листа індивідуального завдання

ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

кафедра математичного моделювання

Контрольна робота

з курсу «Вища та прикладна математика» ___________

номер варіанту

студента(ки) факультету _________________________ I курсу

групи ________________ заочної форми навчання

номер

____

прізвище, ім'я та по батькові

Запоріжжя – 201___

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Ю.О. Борисовська, О.С. Козлова, О.А. Лисенко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник до виконання контрольної роботи для студентів І курсу заочної форми навчання напряму підготовки «Менеджмент»

Рецензент *С.М. Гребенюк*

Відповідальний за випуск *С.І. Гоменюк*

Коректор *О.А. Лисенко*