Тема 3. Поведінка суб'єктів ризику. Теорія корисності

3.1 Поведінка суб'єктів ризику

Дії суб'єкта ризику при прийнятті рішення у ситуації, пов'язаній з ризиком, можна подати у вигляді наступного алгоритму:

1) аналіз та діагностика ризикованих ситуацій;

2) визначення цілей керування суб'єктом ризику;

3) визначення факторів, що впливають на ситуацію;

4) розробка альтернативних варіантів дій;

5) оцінка кожної альтернативи;

6) вибір оптимальної альтернативи;

7) реалізація альтернативи.

Для суб'єктів ризику притаманне зовнішнє або внутрішнє пристосування до ризику. *Зовнішнє пристосування до ризику (екстравертність*) полягає у намаганні суб'єкта ризику вплинути на зовнішнє середовище, щоб мінімізувати ризик. *Внутрішнє пристосування до ризику (інтравертність)* полягає у зменшенні ризику шляхом збору додаткової інформації, залученні керівників до прийняття рішення тощо.

3.2 Теорія корисності Неймана – Моргенштерна. Функція корисності

При виборі альтернативи в умовах ризику істотним є відношення до ризику його суб'єкта.

Нехай пропонується лотерея. За вартість лотерейного квитка 10 у.г.о. суб'єкт ризику з рівною ймовірністю $p = 0,5$ може нічого не виграти або виграти 100 г.о.. Одна людина за таких умов не купить квиток, інша ладна сплатити за нього навіть 50 у.г.о.

Безумовним грошовим еквівалентом лотереї називають максимальну суму, яку суб'єкт ризику готовий віддати за участь у лотереї. У подальшому під *лотереєю* $L(x_1, p, x_2)$ будемо розуміти ситуацію, у якій можна отримати виграш x_1 з ймовірністю p або x_2 з ймовірністю $1-p$. Якщо існує ймовірність отримання виграшів $x_1, x_2, ..., x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n$, то лотерею будемо позначати $L(x_1, p_1, x_2, p_2, ..., x_n, p_n)$. При цьому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Корисністю виграшу x називають ймовірність p, при якій суб'єкту ризику байдуже, що вибрати: виграш x гарантовано, чи участь у лотереї $L(x_1, p, x_2)$. Наприклад, суб'єкту ризику пропонують альтернативу гарантованого отримання суми 1000 у.г.о. або участі у лотереї $L(-50; 0,5; 2100)$. Математичне сподівання виграшу у цій лотереї $M = -50 \cdot 0,5 + 2100 \cdot 0,5 = 1025$ у.г.о. Виходячи з математичного сподівання виграшу, обидві альтернативи є практично еквівалентними, хоча гравець, схильний до ризику, вибере участь у лотереї, інакше вибір залежатиме від фінансового стану суб'єкта ризику.

Методика прийняття рішення в умовах ризику, що ґрунтується на концепції корисності, містить у своїй основі наступну систему аксіом.

Аксіома 1 (порівнянності). Для будь-якої пари x та y можливих результатів для суб'єкта ризику результат x є більш пріоритетним, ніж y $(x \succ y)$, або y є більш пріоритетним, ніж x $(y \succ x)$, або вони є еквівалентними $(x \sim y)$.

Аксіома 2 (транзитивності). Якщо $x \succ y, y \succ z$, то $x \succ z$. Якщо $x \sim y, y \sim z$, то $x \sim z$.

Аксіома 3 (незалежності). Якщо для суб'єкта ризику $x \sim y$,то він є байдужим у відношенні до вибору між лотереєю $L(x, p, z)$ та лотереєю $L(y, p, z)$, тобто $L(x, p, z) \sim L(y, p, z)$.

Аксіома 4 (вимірності). Якщо $x \succ y \sim z$ або $x \sim y \succ z$, то існує єдина ймовірність p, така, що $y \sim L(x, p, z)$.

Аксіома 5 (ранжування). Якщо результати y та u по пріоритетності знаходяться між альтернативами x та z і можна визначити лотереї $L(x, p_1, z)$ та $L(x, p_2, z)$ такі, що суб'єкт ризику байдужий до вибору між y та $L(x, p_1, z)$, а також до вибору між u та $L(x, p_2, z)$, то при $p_1 > p_2$ $y \succ u$.

Якщо виконуються ці аксіоми, то суб'єкт ризику при виборі альтернативи намагатиметься максимізувати корисність. Тут під *корисністю результату* x розуміють рівень задоволення суб'єкта ризику від отримання цього результату. Корисність вимірюється у балах або процентах.

Функцією корисності називають функцію $u(x)$, визначену на множині X деяких результатів x з введеними на цій множині відношеннями пріоритету, для якої $u(x) > u(y)$, якщо $x \succ y$ і $u(x) = u(y)$ при $x \sim y$.

Ця функція характеризує залежність оцінки корисності виграшу x від його величини. Функцію корисності можна будувати також для показників, що характеризують економічні та виробничі процеси.

У якості прикладу розглянемо побудову функції корисності для показника «експлуатаційна готовність обладнання», яку виконує група експертів. Вона здійснюється за наступною схемою.

1. Визначають у процентах найкраще та найгірше з усіх можливих значень показника і надають їм значення корисності. Наприклад, найгіршим значенням показника є 80% готовності, найкращим – 100%. Їм ставлять у відповідність значення функції корисності $u(80) = 0$, $u(100) = 1$.

2. Розглядають ще декілька проміжних значень, наприклад, значень показника 85%, 90%, 95%, 98% і визначають для них значення функції корисності.

3. Після того, як кожний експерт виконав самостійну оцінку корисності проміжних значень, знаходять середні значення цих оцінок.

4. При великих відхиленнях оцінок у різних експертів повертаються до етапу 2 і узгоджують експертні оцінки.

5. По відомим значенням функції корисності $u(x)$, $x \in [80;100]$ з допомогою статистичних методів визначають її аналітичний вигляд.

Функція корисності є лінійною, коли оцінка корисності прямо пропорційна величині виграшу.

Концепцію корисності для оцінки альтернатив при прийнятті рішень в умовах ризику запропонували американські вчені Д. Нейман та О. Моргенштерн.

3.3 Корисність та детермінований еквівалент лотереї

Концепція корисності Неймана – Моргенштерна ґрунтується на виборі в умовах ризику, що формалізується з допомогою лотереї.

З множини різних можливих значень виграшу (або значень деякого показника) виділяються найгірше та найкраще значення x_1 та x_2, такі, що для довільного значення x $x \succ x_1$ та $x_2 \succ x$. Суб'єкту ризику пропонують порівняти альтернативи: 1) отримати гарантоване значення виграшу x; 2) прийняти участь у лотереї $L(x_1, p, x_2)$. *Детермінованим еквівалентом лотереї* називають гарантовану суму $\tilde{x}$, отримання якої для суб'єкта ризику еквівалентне участі у цій лотереї: $\tilde{x} \sim L(x_1, p, x_2)$.

Для значень x_1 та x_2 $u(x_1) = 0$, $u(x_2) = 1$.

Для лотереї $L(x_1, p_1, x_2, p_2, ..., x_n, p_n)$ детермінований еквівалент лотереї визначається з рівняння:

$$u(\tilde{x}) = \bar{u}, \tag{3.1}$$

де $\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) p_i$.

Приклад 3.1. У підприємця є можливість інвестувати кошти у проект, у результаті якого можна отримувати прибуток 20 у.г.о. з ймовірністю 0,4, 10 у.г.о. з ймовірністю 0,2, 0 з ймовірністю 0,1 або збиток 10 у.г.о. з ймовірністю 0,3. Для цього підприємця має місце нейтральна стратегія поведінки, що моделюється лінійною функцією корисності $u(x)=0{,}05x$. Знайти математичне сподівання виграшу та детермінований еквівалент лотереї $L(20;0{,}4;10;0{,}2;0;0{,}1;-10;0{,}3)$.

Розв'язання. Математичне сподівання виграшу:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=20\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1-10\cdot 0{,}3=7 \text{ (у.г.о.)}$$

Детермінований еквівалент лотереї L знаходимо з рівняння $u(\tilde{x})=\bar{u}$. Маємо:

$$\bar{u}=0{,}05\cdot(20\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1-10\cdot 0{,}3)=0{,}05\cdot 7=0{,}35.$$

$$0{,}05\cdot\tilde{x}=0{,}35\Rightarrow\tilde{x}=7 \text{ (у.г.о.).}$$

Для лінійної функції корисності $u=kx$ математичне сподівання виграшу завжди співпадає з детермінованим еквівалентом лотереї.

Суб'єкт ризику вважається *несхильним до ризику*, якщо для нього більш пріоритетною є можливість гарантовано отримати сподіваний виграш у лотереї (математичне сподівання виграшу), ніж прийняти у ній участь. Умова несхильності до ризику має вигляд: $u(\bar{x})>\bar{u}$. При $u(\bar{x})<\bar{u}$ маємо схильність до ризику, $u(\bar{x})=\bar{u}$ – умова байдужості.

Наведемо типові функції корисності для суб'єктів з різним відношенням до ризику:

1) зростаюча функція корисності для суб'єкта ризику, байдужого до ризику: $u=a+bx, b>0$;

2) зростаюча функція корисності для суб'єкта ризику, несхильного до ризику: $u=\lg(x+b)$;

3) зростаюча функція корисності для суб'єкта ризику, схильного до ризику: $u=x^2$.

Премія за ризик – це сума з математичного сподівання виграшу, якою суб'єкт ризику згоден знехтувати, щоб уникнути ризику, пов'язаного з лотереєю. Ця сума менша, ніж математичне сподівання виграшу.

Приклад 3.2. Суб'єкт ризику має функцію корисності $u=0,2x^2$. Знайти математичне сподівання виграшу, детермінований еквівалент та премію за ризик для лотереї $L(4;0,5;12)$.

Розв'язання. Математичне сподівання виграшу $\overline{x}=4\cdot 0,5+12\cdot 0,5=8$. Знайдемо математичне сподівання корисності лотереї: $\overline{u}=u(4)\cdot 0,5+u(12)\cdot 0,5=0,2\cdot 0,5\cdot\left(4^2+12^2\right)=16$. Детермінований еквівалент лотереї визначаємо з рівняння $u(\tilde{x})=\overline{u}$, звідси $0,2\cdot\tilde{x}^2=16\Rightarrow\tilde{x}\approx 8,94$. Премія за ризик дорівнює різниці між математичним сподіванням виграшу та детермінованим еквівалентом лотереї: $\overline{x}-\tilde{x}=8-8,94=-0,94$.

Локальна несхильність до ризику у деякій точці x з області визначення функції корисності $u(x)$ визначається за формулою:

$$r(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}. \tag{3.2}$$

Приклад 3.3. Визначити локальну несхильність до ризику для його суб'єкта з функцією корисності $u=10-2e^{-5x}$, $x>0$.

Розв'язання. Використаємо формулу (3.2). Знаходимо: $u'(x)=10e^{-5x}$, $u''(x)=-50e^{-5x}$. $r(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}=5$.

3.4 Криві байдужості. Функція корисності з інтервальною нейтральністю

Нехай на вісь абсцис координатної площини наносять рівень ризику σ, а на вісь ординат – очікуваний розмір (математичне сподівання) виграшу m. Геометричне місце точок (σ,m), для яких значення функції корисності дорівнює сталій величині, називають *кривою байдужості*.

Лінійна функція корисності відповідає нейтральній стратегії поведінки суб'єкта ризику, проте для всього інтервалу можливої зміни виграшу його відношення до ризику не буде нейтральним. Цей інтервал можна розбити на кілька інтервалів, на кожному з яких функція корисності є лінійною, тобто відображає нейтральне відношення до ризику. Отримуємо *функцію корисності з інтервальною нейтральністю*. Її можна подати у наступному вигляді:

$$u(x)=\begin{cases} a_0x+b_0,\ 0\le x\le x_0, \\ a_1x+b_1,\ x_0\le x\le x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx+b_n,\ x_{n-1}\le x\le x_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Функція корисності з інтервальною нейтральністю є неперервною у своїй області визначення, у тому числі і у кінцях $x_i,\ i=0,1,\dots,n$ інтервалів нейтральності.

Використовуючи функції корисності з інтервальною нейтральністю, можна апроксимувати з будь-якою точністю нелінійні функції корисності.