**ВСТУП**

Специфіка математичної науки полягає в тому, що твердження або постулюються, або їх істинність перевіряється в ході доведення. Ідея доведення зародилась ще в стародавні часи. Математична теорія будується аксіоматичним методом, який і є засобом обгрунтування.

***Що вам відомо про аксіоматичний метод?***

Ті факти, що залучаються до процедури обґрунтування, що служать опорою для нього, сформульовані у вигляді аксіом. Всі інші факти виводяться з аксіом лише за правилами логіки. Головна мета звернень до філософських обґрунтувань в тому, щоб зрозуміти, яке відношення математичної теорії до реальності, що саме стоїть за математичним об'єктом. Філософські дискусії в математиці XIX ст. були пов'язані в основному з розвитком геометрії, а саме з тлумаченням неевклідових геометрій. В галузі математичного аналізу також виникли принципові труднощі, але до кінця XIX ст.-середини XX ст. вони були усунені. Неевклідові геометрії були фактом зовсім іншого роду. Питання про природу математичного знання виникло у зв'язку з ними знову і не менш гостро, ніж в попередньому столітті, у зв'язку з обґрунтуванням обчислення нескінченно малих.

Проблема обґрунтування визрівала історично, має глибоке коріння. Віхами на шляху становлення проблеми були кризи в основах математики, які і звели постановку цієї теми в ранг актуальних.

***Що вам відомо про кризи в математиці?***

Під обґрунтуванням математики розуміють **демонстрацію можливості існування** її об'єктів і **дослідження зв’язку між твердженнями про** ці **об’єкти**. При такому підході доведення потребують і такі твердження, які є інтуїтивно очевидними. Саме це і називається математичною строгістю. В розвитку математичної науки були періоди надмірного захоплення формалізмом. Багато сучасних математиків вважають це захоплення іноді недоцільним. Але в процесі навчання математична строгість є необхідною. Лише професійний математик здатен визначити, коли евристичний аргумент можна довести до необхідного ступеня строгості, але ця здатність формується лише в процесі навчання проведенню формально строгих доведень.

***Як можна описати предмет математики, що вона досліджує?***

До XIX ст. самі математики вважали, що математика досліджує числа, величини, фігури, а також, що досліджувані об’єкти даються нам разом з їх структурою. Наприклад, натуральні числа разом з операціями додавання та множення, множина дійсних чисел разом з функцією відстані. Внаслідок розвитку функціонального аналізу математики усвідомили, що на одній і тій же множині можна побудувати різні структури, а також, що одна і та сама математична структура може бути побудована на різних множинах. Це дало **можливість дивитись на математику як на науку, що досліджує математичні структури, а основним методом дослідження є аксіоматичний.**

**Метою курсу є** ознайомлення із сутністю аксіоматичного методу, аналіз його характерних рис, розгляд можливостей використання зв’язків між елементарною та вищою математикою.

**Завдання:**

* вивчення загальних питань аксіоматики;
* ознайомлення з основними проблемами аксіоматичної побудови математичної теорії;
* ознайомлення з аксіоматичними теоріями числових систем;
* вивчення основних фактів геометрії Лобачевського, як першої неевклідової геометрії;
* систематизація набутих при вивченні базових математичних дисциплін знань, вмінь та навичок.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**Знати:**

* суть аксіоматичного методу побудови математики;
* систему аксіом теорії множин;
* систему аксіом Пеано арифметики натуральних чисел;
* зміст аксіоматичних теорій Вейля і Гілберта евклідової геометрії;
* основні факти геометрії Лобачевського;
* основні моделі геометрії Лобачевського.

**Вміти:**

* розв’язувати основні типи задач аксіоматичних теорій числових систем;
* розв’язувати основні типи задач планіметрії Евкліда;
* доводити еквівалентність п’ятого постулату і деяких тверджень евклідової геометрії;
* доводити найпростіші теореми геометрії Лобачевського.

**1. Предмет основ математики. Історична довідка. Суть аксіоматичного методу.**

В математиці, на відміну від експериментальних наук, основна частина її положень не може бути перевірена експериментально. Тому в математиці переважає логічний спосіб доведення. Це пояснюється абстрактним характером об’єктів.

Аксіоматична побудова математики стала можливою після накопичення великої кількості математичних фактів. Перша спроба аксіоматичної побудови математики була зроблена в 3 ст. до н.е. в Стародавній Греції Евклідом. Ним була написана робота «Начала», яка складалася з 13 книг. В «Началах» Евкліда формулюються аксіоми та постулати, доводяться теореми на основі аксіом та постулатів. Незважаючи на наявність недоліків в запропонованій Евклідом аксіоматичній побудові геометрії, «Начала» до середини 19 сторіччя вважалися зразком наукової строгості.

В розвитку аксіоматичного методу виділяють три етапи:

1. Від Евкліда до середини 19 сторіччя.

2. Середина 19 сторіччя. Цей період пов’язаний з відкриттям Лобачевським неевклідової геометрії. Також в цей час активно створюються інші аксіоматики евклідової геометрії: Гільберта, Вейля та ін.

3. На початку 20 сторіччя виникли труднощі в обґрунтуванні математики, обумовленні появою парадоксів в теорії множин. Для подолання цих труднощів Гільберт запропонував свою теорію доведень, яка була названа метаматематикою.

Аксіоматичний метод є цінним інструментом наукових досліджень, за допомогою якого вдається розкрити зв’язки між поняттями та твердженнями. Він дозволяє зробити викладення теорії математично строгим. Цього можна досягти шляхом чіткого розбиття всього матеріалу на ряд точно сформульованих тверджень, якими є аксіоми, теореми, означення.

***Наведіть означення понять: аксіома, означення, теорема.***

*Аксіомою* називається твердження, яке **приймається** без доведення.

Твердження, справедливість якого перевіряється за допомогою доведення, називається *теоремою*.

Твердження, що встановлює зміст нового поняття та розкриває смисл нового терміну, називається *означенням*.

Як правило, означення нового поняття дається на базі раніше означених, тобто маємо справу з неперервним ланцюжком означень. Тому виникає необхідність прийняти без означення деякі поняття. Їх називають *основними* або *неозначуваними*. Основні поняття діляться на *основні об’єкти* та *основні відношення.*

Таким чином, дедуктивна схема викладення теорії полягає в наступному:

1. перераховуються основні поняття;
2. з їх допомогою даються означення інших понять;
3. формулюються аксіоми (система аксіом);
4. на базі аксіом доводяться теореми.

Під *доведенням* розуміють ланцюжок тверджень, які випливають одне з іншого за правилами логіки. Строго довести яке-небудь твердження означає вивести його з аксіом.

Зрозуміло, що у виборі аксіом, які покладаються в основу теорії, є певний ступінь довільності. Але зазвичай аксіоми виникають природним чином, з пізнання дійсності.

Суть аксіоматичного методу полягає в наступному:

* + кожне поняття повинно бути або внесено до списку неозначуваних понять, або означене;
  + кожне твердження повинно бути або внесено до списку аксіом, або доведене.

**Характерною рисою аксіоматичного методу є його абстрактність. Про основні поняття відомо лише те, що про них сказано в аксіомах, вони позбавлені конкретного змісту.**

**2. Поняття математичної структури, аксіоматичної теорії математичної структури, ізоморфізму математичних структур. Поняття моделі (інтерпретації) системи аксіом.**

*Математичною структурою* називається сукупність елементів однієї або кількох множин, відношень, які задані між цими елементами, та аксіом, яким задовольняють ці відношення. Будемо позначати



**Приклад.** Математична структура групи має вигляд , де  - будь-яка непуста множина,  - алгебраїчна операція  на ,

,

, елемент  називають *нейтральним елементом*,

, елемент  називають *симетричним до  елементом.*

*Аксіоматичною теорією* даної математичної структури називається сукупність тверджень, які можна вивести із системи аксіом цієї структури, користуючись лише правилами логіки.

Для однієї математичної структури можна будувати різні аксіоматичні теорії. Вони можуть відрізнятись списками аксіом, теорем, означень. Геометрію, наприклад евклідову, можна викласти аксіоматичним методом, базуючись на різних системах аксіом.

*Моделлю* (або *інтерпретацією*) системи аксіом називаються множини елементів конкретної природи, на яких означені всі відношення та виконані всі аксіоми даної структури.

**Приклад.** Модель структури групи.

Нехай  є множиною  цілих чисел,  - додавання цілих чисел. Ця алгебраїчна операція є асоціативною, , для кожного цілого числа  маємо .

Дві *математичні структури* (або їх *моделі*) називаються *ізоморфними*, якщо між елементами множин та відношеннями встановлена бієкція так, що елементам однієї структури (моделі), які знаходяться у деякому відношенні, відповідають елементи другої структури (моделі), які знаходяться у відповідному відношенні.

Аксіоматичним методом теорія будується формально, без опори на інтуїцію, очевидність і т. ін., але один раз побудована теорія може бути реалізована на різних множинах об’єктів – на різних інтерпретаціях.

***Наведіть приклади математичних структур та їх моделей з університетського курсу.***

**3. Вимоги до системи аксіом.**

1. Несуперечливість (сумісність).
2. Незалежність (мінімальність).
3. Повнота (достатність).

**Означення.** Система аксіом називається *внутрішньо несуперечливою*, якщо з неї не можна вивести 2 протилежних твердження:  і .

Система аксіом називається *змістовно несуперечливою*, якщо існує хоча б одна її модель. Отже, питання про змістовну несуперечливість системи аксіом зводиться до питання несуперечливості її моделі.

**Означення.** Говорять, що *аксіома*  в системі аксіом  є *незалежною*, якщо вона не є наслідком інших аксіом цієї системи. *Система аксіом* називається *незалежною*, якщо в ній кожна аксіома незалежна.

**Теорема.** Нехай задано систему аксіом . Розглянемо нову систему аксіом . Якщо система аксіом  несуперечлива, то аксіома  в системі аксіом  є незалежною.

**Доведення.** Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що аксіома  в системі  є залежною, тобто в аксіоматичній теорії, побудованій на базі системи аксіом , твердження  є теоремою. Але тоді в аксіоматичній теорії, побудованій на базі системи аксіом , справедливі твердження  (теорема) і  (аксіома), отже система аксіом  суперечлива. Теорема доведена.

**Означення.** *Система аксіом* називається *повною*, якщо її не можна доповнити твердженням, яке б:

1. не суперечило аксіомам системи,

2. не залежало від них,

3. не вводило нових неозначуваних понять.

**Теорема.** Якщо будь-які дві моделі даної системи аксіом ізоморфні, то вона повна.

**Доведення.** Нехай система аксіом  є неповною. За означенням існує твердження  таке, що не містить нових неозначуваних понять, система  є несуперечливою і твердження  в ній є незалежним. Розглянемо моделі систем аксіом  і . Вони є також моделями системи аксіом , причому не ізоморфними, адже в одній моделі виконується , а в іншій . Теорема доведена.

**4. Огляд системи аксіом Вейля. Доведення несуперечливості системи аксіом Вейля евклідової геометрії.**

В 1918 році німецьким математиком Г.Вейлем була запропонована точково-векторна аксіоматика евклідової геометрії (**Додаток А**).

Основними об’єктами системи аксіом Вейля є «точка» та «вектор». Основними відношеннями є «додавання векторів», «множення вектора на число», «скалярний добуток векторів», «відкладання вектора від точки». Аксіоматика Вейля складається з п’яти груп аксіом. Аксіоми перших трьох груп складають аксіоматику векторного простору, перших чотирьох груп – аксіоматику векторного евклідового простору, всю систему аксіом називають ще системою аксіом евклідового точково-векторного простору.

Несуперечливість системи аксіом Вейля доводиться шляхом побудови *арифметичної моделі*. В цій моделі «точкою» і «вектором» називають будь-яку впорядковану трійку дійсних чисел. При цьому для позначення точок будемо використовувати круглі дужки. Наприклад, точкою  є трійка . Для позначення векторів використовують кутові дужки. Наприклад, вектором  є трійка .

Для основного відношення першої групи введемо таке означення: *сумою векторів* та  будемо називати вектор . Можна переконатися, що таке означення для суми векторів забезпечує виконання аксіом 1.1-1.4.

*Множення дійсного числа  на вектор*  (або вектора  на число ) визначається наступним чином: . Так визначена операція задовольняє всім аксіомам другої групи

В третій групі основного відношення немає. Розглянемо набір векторів , ,, він утворює базис тривимірного простору. Крім цього, для будь-якого вектора  цього простору маємо , тобто вектори , , ,  лінійно залежні. Аксіома розмірності виконується.

*Скалярним добутком векторів* та  називається число . Перші три аксіоми четвертої групи перевіряються безпосередньо. Скалярний квадрат вектора  має вигляд , звідки випливає, що  і що .

Відношення п’ятої групи визначається так: будь-якій парі точок  та  відповідає вектор , який будемо позначати символом . В аксіомі 5.1 задано ненульовий вектор  та точка . Легко переконатись, що точка  задовольняє цю аксіому. Справедливість аксіоми 5.2 перевіряється безпосередньо.

Отже, можемо зробити висновок: система аксіом Вейля несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика дійсних чисел.

**5. Доведення повноти системи Вейля.**

Позначимо символом  довільну модель системи аксіом Вейля. Якщо в цій моделі вектори  утворюють базис, то для будь-якого вектора  отримаємо розклад , де дійсні числа  називаються координатами  в базисі . Зафіксуємо точку . Будь-яка точка  відносно репера  має координати , якщо розклад радіус-вектора  має вигляд .

Позначимо символом  арифметичну модель системи аксіом Вейля. Розглянемо таку відповідність між моделями  та . Точці  поставимо у відповідність впорядковану трійку , вектору  поставимо у відповідність впорядковану трійку , сумі векторів з моделі  поставимо у відповідність суму відповідних векторам впорядкованих трійок, і так само між іншими операціями встановимо відповідність. Очевидно, вказана відповідність є бієктивною і має властивість ізоморфізму. Оскільки ізоморфізм є відношенням еквівалентності, то доведений ізоморфізм моделей  та  дозволяє зробити висновок про ізоморфізм будь-якої пари моделей системи аксіом Вейля. Отже, ця система аксіом повна.

**Задача.** Дано математичну структуру , де  – множина точок,  – множина прямих,  – відношення належності таке, що виконуються аксіоми:

: для будь-яких двох різних точок існує пряма, що містить кожну з них.

 : для будь-яких двох різних точок існує не більше однієї прямої, що містить кожну з них.

: на кожній прямій існує принаймні дві точки.

: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

Дослідити систему аксіом на несуперечність, на незалежність і повноту.

***Розв’язання.*** Для перевірки системи аксіом на несуперечність побудуємо модель цієї системи. Визначимо основні поняття даної структури: "точка" – будь-яка з трьох точок  евклідової площини, "пряма" – будь-яка з невпорядкованих пар , "належати" – як елемент множині , . Перевіримо, чи виконуються аксіоми.

: Візьмемо, наприклад, точки , для них існує пряма , якій вони належать. Для інших двох пар точок висновок такий самий.

: Для кожної з трьох можливих пар точок існує єдина пряма, якій вони належать.

: На кожній з трьох означених прямих існують по дві точки.

:Існують три точки , що одночасно не належать жодній із означених прямих .

Таким чином, побудовано модель цієї системи аксіом, а значить вона є несуперечливою.

Перевіримо аксіому  на незалежність. Розглянемо систему , де аксіома : «Існує принаймні дві різні точки, для яких не існує прямої, якій обидві ці точки належать» є запереченням аксіоми . Треба перевірити систему  на несуперечливість. Розглянемо наступну модель цієї системи. "Точкою" назвемо будь-яку з трьох точок  евклідової площини, "прямою" – будь-яку з невпорядкованих пар , "належати" – в теоретико-множинному сенсі (елемент належить множині). Перевіримо, чи виконуються аксіоми.

: Для точок  не існує прямої, якій обидві ці точки належать.

Очевидно, що і аксіоми  виконуються, отже система  –несуперечлива. Значить аксіома  не залежить від аксіом .

Далі перевіримо незалежність аксіоми . Розглянемо систему , де : «Існують принаймні дві різних точки, для яких існують принаймні дві різні прямі, що містять ці точки». Визначимо поняття: "точка" – будь-яка з трьох точок  евклідової площини, "пряма" – будь-яка з впорядкованих пар ,, "належати" – як елемент множині. Легко бачити, що аксіоми  виконуються. Для доведення аксіоми  розглянемо точки  та . Для них існують дві різні прямі  і , що їх містять. Отже, система  – несуперечлива, а значить,. аксіома  не залежить від аксіом .

Аналогічно доводиться незалежність аксіом  (самостійно). Доведено незалежність заданої системи аксіом.

Дана система аксіом не буде повною, бо існують не ізоморфні моделі цієї системи. Наприклад, модель , в якій три точки  та три прямі  та модель , в якій чотири точки  та шість прямих пов’язані відношенням належності в зазначеному вище сенсі, не ізоморфні.

**Практичне заняття 1**

**Задача 1 (самостійно).** Дано математичну структуру , де  – множина точок,  – множина прямих,  – відношення приналежності таке, що виконуються аксіоми:

 : для будь-яких двох різних точок існує єдина пряма, що містить кожну з них.

 : на кожній прямій існує принаймні дві точки.

: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

: через будь-яку точку, що не належить даній прямій, проходить єдина пряма, що не перетинає дану пряму.

Дослідити систему аксіом на несуперечність, аксіому  на незалежність.

***Розв’язання.*** Визначимо поняття: "точка" – будь-яка з чотирьох точок  евклідової площини, "пряма" – будь-яка з невпорядкованих пар ,, "належати" – як елемент множині: , "паралельні прямі" – ті, що не мають спільних точок із точок .

Дослідження систему аксіом на несуперечністьпроводиться аналогічно задачі 1. Очевидно, що аксіоми , ,  виконуються. Доведемо аксіому . Нехай  – дана пряма, а  – точка, що їй не належить. Тоді серед прямих , що містять точку , лише одна пряма  паралельна прямій . Так само для інших п’яти прямих.

Для перевірки аксіоми  на незалежність треба дослідити систему аксіом  на несуперечливість.

**Задача 2.** Довести, що система аксіом метричної структури залежна.

***Доведення*.** Нагадаємо означення метрики: Метрикою (або відстанню) на довільній непорожній множині  називається дійсна функція , визначена для всіх , яка задовольняє наступним аксіомам:

.Для будь-яких  (аксіома невід’ємності);

. (аксіома тотожності);

.Для будь-яких  (аксіома симетрії);

.Для будь-яких  (нерівність трикутника).

Доведемо, що досить прийняти лише аксіоми 2 і 4, а аксіоми 1 і 3 отримати як наслідки. Запишемо аксіому  для набору , отримаємо

,

звідки, з урахуванням аксіоми 

,

тобто виконується аксіома .

Далі, для набору  аксіома  прийме вигляд

, або ,

а для набору  –

, або .

Отже, , тобто аксіома  теж доведена.

**Задача 3.** Довести незалежність аксіоми 4.4 системи аксіом Вейля.

***Розв’язання.*** Для доведення незалежності аксіоми 4.4 від інших аксіом системи аксіом Вейля розглянемо систему , де

: «Існують принаймні два таких ненульових вектора , що ».

Побудуємо модель. Основні поняття «точка», «вектор», «сума векторів», «добуток вектора на число» та «відкладання вектора від точки» означимо так само як і при побудові арифметичної моделі. Скалярний добуток векторів  та  означимо формулою

.

Очевидно, що аксіоми 4.1, 4.2, 4.3 виконуються. Для перевірки аксіоми  розглянемо вектори  та  і знайдемо їх скалярні квадрати:

, .

Таким чином, система  – несуперечлива, отже , аксіома 4.4 не залежить від інших аксіом системи Вейля.

**Задача 4.** Довести, не використовуючи комутативність додавання векторів, наступні твердження:

1). .

2). .

3). .

4). .

5). .

6). .

***Розв’язання.*** Над знаками «=» будемо інколи записувати номер аксіоми або доведеного твердження

1). . З аксіоми 1.3 випливає, що .

2). , отже .

3). .

4). .

5). .

6). .

**Задача 5.** Довести залежність аксіоми 1.1:   комутативності суми векторів від аксіом перших двох груп аксіоматики Вейля.

***Розв’язання.*** Почнемо з лівої частини рівності і застосуємо аксіоми та доведені в попередній задачі властивостями, записуючи їх номери над знаками рівності, отримаємо



Висновок. Система аксіом Вейля залежна.

**Завдання 1**

***(надіслати в папку Самостійна робота 1)***

Які з наступних тверджень справедливі для вказаних множин точок і прямих і відношення належності:

1) «Точка» - довільна внутрішня точка круга на евклідовій площині, «пряма» - довільна хорда цього круга (без кінців), «належить», «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі.

2) «Точка» - довільне коло радіуса  на евклідовій площині, «пряма» - довільна пара паралельних прямих, евклідова відстань між якими дорівнює , «точка належить прямій» - коло дотикається до пари паралельних прямих, «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі

3) «Точка» - довільна сфера радіуса  в евклідовому просторі, «пряма» - довільний круговий циліндр радіуса , «точка належить прямій» - сфера дотикається до поверхні циліндра, «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі.

4) «Точка» - довільна пряма зв’язки прямих з центром О в евклідовому просторі, «пряма» - довільна площина цієї зв’язки, «точка належить прямій» - пряма зв’язки належить площині зв’язки, «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі. (зв’язка – множина прямих і площин, що проходять через одну точку).

**Твердження:**

: для будь-яких двох різних точок існує єдина пряма, якій належить кожна з точок.

: для будь-яких двох різних прямих існує єдина точка, яка належить кожній з прямих.

: кожній прямій належать принаймні дві точки.

: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

: через будь-яку точку, що не належить цій прямій, проходить єдина пряма, що не перетинає цю пряму.

: через будь-яку точку, що не належить цій прямій, проходить дві прямі, що не перетинають цю пряму.

: існує чотири точки, ніякі три з яких не належать одній прямій