

1. Поняття невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює його підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Отже, знаки похідної та невизначеного інтеграла взаємно знищуються, оскільки операції диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими. Внаслідок цього вірність виконання операції інтегрування можна перевірити диференціюванням отриманого виразу. Наприклад,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C, \text{ оскільки } \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$.

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа доданків.

6. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Цю властивість називають *інваріантністю формули інтегрування*. Вона означає, що формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною неперервно диференційовною функцією незалежної змінної. Користуючись властивістю інваріантності формули інтегрування, можна з однієї формули для обчислення невизначеного інтеграла отримати нескінченну кількість таких формул. Наприклад, з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ одержимо формулу $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$, де $u(x)$ – довільна неперервно диференційовна функція.

7. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, де a та b – довільні константи, $a \neq 0$.

Ця властивість випливає з попередньої властивості при $u = ax + b$. Тоді $du = a dx$ і

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Наприклад,

$$\int \cos x dx = \sin x + C \Rightarrow \int \cos(2x + 3) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C$$

.

Наведемо таблицю основних інтегралів. Частина формул з цієї таблиці безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до операції диференціювання та таблиці похідних. Справедливість інших формул можна перевірити диференціюванням. Інтеграли цієї таблиці називають *табличними*. **Їх треба знати напам'ять!**

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справедливі наступні формули.

$$1. \int du = u + C.$$

$$2. \int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1.$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$5. \int e^u du = e^u + C.$$

$$6. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$8. \int \operatorname{sh} u \cdot du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$9. \int \operatorname{ch} u \cdot du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$10. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$11. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C.$$

У найпростіших випадках обчислити невизначений інтеграл можна за допомогою основних властивостей, розглянутих вище, а також таблиці інтегралів. Такий метод обчислення інтегралів називають безпосереднім

інтегруванням. При цьому використовуються елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз, використавши основну тригонометричну тотожність:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Підставимо отриманий вираз в інтеграл. Використавши формули таблиці основних інтегралів, отримуємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)}$.

Розв'язання. Представимо підінтегральну функцію у вигляді суми двох дробів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} &= \frac{1}{4} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 3)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2 - 3} - \frac{1}{x^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

З врахуванням формул таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3)} &= \frac{1}{4} \left(\int \frac{dx}{x^2-3} - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \operatorname{arctg} x \right) + C.\end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання. У підінтегральній функції поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{aligned}\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} &= \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1+3x^{\frac{1}{2}}+3x+x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \\ &= x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}}.\end{aligned}$$

Інтегруємо отриману суму степеневих функцій за відповідною формулою таблиці основних інтегралів:

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \left(x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}} \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + \frac{18}{7} x^{\frac{7}{6}} + \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} + C = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7} x \sqrt[6]{x} + \frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Понизимо степінь у підінтегральному виразі.

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}.\end{aligned}$$

Підставивши отриманий вираз у інтеграл, знаходимо:

$$\int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8} \right) dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Тут ми використали властивість 7 невизначеного інтеграла, згідно з якою

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, де $a \neq 0$, $F(x)$ є первісною функції $f(x)$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину у підінтегральному виразі, отримаємо:

$$\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \int \frac{(x^2 - 1) + 4}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx =$$

$$= x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції:

$$4x^2 + 4x + 5 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 + 4 = (2x + 1)^2 + 4.$$

Підставивши у підінтегральний вираз, отримаємо інтеграл, що можна обчислити безпосереднім інтегруванням повної таблиці основних інтегралів:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{2} + C.$$

Приклад 7. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v = 3t^2 + 2$. Знайти закон руху тіла $s(t)$, якщо $s(0) = 0$.

Розв'язання. Маємо, що задана швидкість тіла, яка є похідною від його закону руху, дорівнює: $v = s'(t) = 3t^2 + 2$. Звідси знаходимо:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 2) dt = t^3 + 2t + C.$$

Оскільки в початковий момент часу $s = 0$, то маємо:

$$s(0) = C = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 2t.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x} dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута, представимо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x} = \frac{1 + \sin^2 x}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right).$$

$$\int \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) dx = \frac{-\operatorname{ctg} x + x}{2} + C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx$.

Розв'язання. Представимо підінтегральну функцію у вигляді суми:

$$\cos 3x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x).$$

Маємо

$$\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx = \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx$.

Розв'язання. Розкладемо на квадратні множники біквадратний тричлен, що знаходиться у знаменнику підінтегральної функції: $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$. Її можна представити у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} = \frac{x^2 - 2 + x^2 - 3}{(x^2 - 2)(x^2 - 3)} = \frac{1}{x^2 - 3} + \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Підставивши у інтеграл, маємо

$$\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 - 3} + \frac{1}{x^2 - 2} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C$$

.

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}.$

Розв'язання. Домноживши чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}$, одержимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} &= \\ &= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}{2a} dx = \frac{1}{3a} \left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - (x-a)^{\frac{3}{2}} \right] + C \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

Розв'язання. Оскільки $\frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, то інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = 2 \cdot \int 5^{-x} dx - \frac{1}{5} \cdot \int 2^{-x} dx = -2 \cdot \frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C.$$

Тут для інтегрування було використано формулу (4) повної таблиці основних інтегралів.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат під коренем у підінтегральній функції. Отримуємо:

$$7-6x-x^2 = 7-(x^2+2\cdot 3\cdot x+9)+9=16-(x+3)^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x+3)^2}} = \arcsin \frac{x+3}{4} + C.$$

Тут при інтегруванні було використано формулу (12) повної таблиці основних інтегралів.

Приклад 14. Знайти всі криві, кутовий коефіцієнт дотичних до яких у кожній точці дорівнює $2e^{2x}$.

Розв'язання. Нехай $y=y(x)$ – рівняння кривої. Тоді $y' = 2e^{2x} \Rightarrow y = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} + C$.

Приклад 15. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v = 3t^2 + 2$. Знайти закон руху тіла $s(t)$, якщо $s(0) = 0$.

Розв'язання.

$$v = s'(t) = 3t^2 + 2.$$

$s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 2) dt = t^3 + 2t + C$. Оскільки в початковий момент часу $s = 0$, то маємо $s(0) = C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 + 2t$.

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \cos(2x+3) dx$.

Розв'язання. Використаємо табличний інтеграл $\int \cos u du = \sin u + C$ і властивість 7. Маємо:

$$\int \cos(2x + 3) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$$

Приклад 17. Знайти інтеграл $\int (7x - 1)^{100} dx$.

Розв'язування. Використаємо табличний інтеграл $\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C$ та властивість 7:

$$\int (7x - 1)^{100} dx = \frac{1}{7} \frac{(7x-1)^{101}}{101} + C = \frac{(7x-1)^{101}}{707} + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти інтеграли:

1. $\int \left(2x^2 + \frac{3}{x} - 4\sqrt[3]{x} \right) dx.$

Відповідь: $\frac{2}{3} x^3 + 3 \ln|x| - 3x^{\frac{4}{3}} + C.$

2. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx.$

Відповідь: $\frac{18^x}{\ln 18} + C.$

3. $\int x\sqrt{x} dx.$

Відповідь: $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}.$

Відповідь: $\frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + C.$

5. $\int \frac{2 - x^4}{1 + x^2} dx.$

Відповідь: $\operatorname{arctg} x + x - \frac{x^3}{3} + C$

6. $\int \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

7. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

Відповідь: $\operatorname{tg} x - x + C$

8. $\int (3 \operatorname{sh} x - 5 \cos x) dx.$

Відповідь: $3 \operatorname{ch} x - 5 \sin x + C.$

9. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C.$

10. $\int (2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x)^2 dx.$

Відповідь: $4\operatorname{tg}x - 9\operatorname{ctg}x - x + C$.

11. $\int (3x + 2)^{100} dx$.

Відповідь: $\frac{(3x + 2)^{101}}{303} + C$.

12. $\int 10^{2x-5} dx$.

Відповідь: $\frac{10^{2x-5}}{2\ln 10} + C$.

13. $\int \sqrt{7x + 2} dx$.

Відповідь: $\frac{2}{21}(7x + 2)^{\frac{3}{2}} + C$.

14. $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x-1}{2} + C$.

16. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} \frac{x-3}{4} + C$.

$$17. \int \frac{dx}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$18. \text{ Довести, що } \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

$$19. \int \frac{2xdx}{8 + x^2}.$$

$$\text{Відповідь: } \ln(8 + x^2) + C.$$

$$20. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$\text{Відповідь: } -\ln(\cos x) + C.$$

$$21. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \ln(\sin x) + C.$$

$$22. \int \frac{1 + 2\sin^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3}{2} \operatorname{tg} x - x + C.$$