

2.1 Метод підстановки (заміни змінної) у невизначеному інтегралі

У теоретичній частині було розглянуто обґрунтування застосування методу підстановки (заміни змінної) для знаходження невизначеного інтеграла та деякі приклади використання підстановок $u = \varphi(x)$ або $x = \varphi(t)$. На прикладах розглянемо особливості застосування даного методу.

Приклад 2.1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sin^2(\ln x) dx}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то доцільно використати підстановку

$u = \ln x$. Отримуємо

$$I = \int \sin^2 u du = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2u) du = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) + C = \frac{\ln x}{2} - \frac{\sin 2(\ln x)}{2} + C.$$

Приклад 2.2. Обчислити інтеграли а) $\int \frac{f'(x) dx}{f(x)}$ б) $\int \frac{f(x) \cdot f'(x) dx}{1 + f(x)}$, де

$f(x)$ – неперервно диференційовна на своїй області визначення функція, $f(x) \neq -1$.

Розв'язання.

$$\text{а) } \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \left\| \begin{array}{l} u = f(x), \\ du = f'(x) dx \end{array} \right\| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$$

б)

$$\int \frac{f(x) \cdot f'(x) dx}{1 + f(x)} = \left\| \begin{array}{l} t = f(x); \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right\| = \int \frac{t dt}{1+t} = \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = t - \ln(t+1) + C.$$

Перейшовши до змінної x , отримуємо:

$$\int \frac{f(x) \cdot f'(x) dx}{1 + f(x)} = f(x) - \ln|1 + f(x)| + C.$$

Приклад 2.3 Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin x}$.

Розв'язання. Скориставшись результатом прикладу 2.2 (б) та прийнявши $f(x) = \sin x$, отримаємо:

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin x} = \sin x - \ln|1 + \sin x| + C.$$

Приклад 2.4. Знайти інтеграл $I = \int x(1-x)^{20} dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл можна знайти, використавши для піднесення до 20-го степеню формулу бінома Ньютона, проте більш доцільно скористатися методом підстановки. Оскільки $x = 1 - (1 - x)$, то інтеграл I можна представити у вигляді:

$$I = \int x(1-x)^{20} dx = \int (1 - (1-x))(1-x)^{20} dx.$$

Виконаємо підстановку $1-x=t$, $dx=-dt$. Отримуємо інтеграл:

$$I = \int (t-1) \cdot t^{20} dt = \int (t^{21} - t^{20}) dt = \frac{t^{22}}{22} - \frac{t^{21}}{21} + C = \frac{(1-x)^{22}}{22} - \frac{(1-x)^{21}}{21} + C.$$

Приклад 2.5. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^{n-1} dx}{x^{2n} + a^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $d(x^n) = nx^{n-1} dx$, доцільно виконати підстановку $z = x^n$. Маємо інтеграл

$$\int \frac{x^{n-1} dx}{x^{2n} + a^2} = \frac{1}{n} \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{na} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C = \frac{1}{na} \operatorname{arctg} \frac{x^n}{a} + C.$$

Приклад 2.6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x} dx$.

Розв'язання. Використаємо підстановку $3 + x \ln x = t$, $dt = (1 + \ln x) dx$.

Отримаємо:

$$I = \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \ln x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |3 + x \ln x| + C.$$

Приклад 2.7. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x \times \cos^2 x}}$.

Розв'язання. Оскільки $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, то інтеграл I можна представити у вигляді ($u = \operatorname{tg} x$):

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x \times \cos^2 x}} = \int u^{-\frac{3}{5}} du = \frac{5}{2} u^{\frac{2}{5}} + C = \frac{5}{2} \sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x} + C.$$

Приклад 2.8. Знайти інтеграл $\int \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2} dx$.

Розв'язання. Використавши підстановку $z = x^4 + x^2$, зведемо інтеграл до табличного:

$$\int \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln|z| + C = \frac{1}{2} \ln|x^4 + x^2| + C.$$

Приклад 2.9 Знайти інтеграл $\int \frac{5^x dx}{9 + 25^x}$.

Розв'язання. Для спрощення інтеграла застосуємо підстановку $t = 5^x$, $dt = \ln 5 \cdot 5^x dx$. Отримуємо табличний інтеграл:

$$\int \frac{5^x dx}{9 + 25^x} = \frac{1}{\ln 5} \int \frac{dt}{9 + t^2} = \frac{1}{3 \ln 5} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3 \ln 5} \operatorname{arctg} \frac{5^x}{3} + C.$$

Приклад 2.10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Підстановка $\sqrt[3]{x} = t$, $dt = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ зводить даний інтеграл до інтеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \sqrt[3]{x}} = 3 \int \frac{dt}{\cos^2 t} = 3 \operatorname{tg} t + C = 3 \operatorname{tg} \sqrt[3]{x} + C.$$

Приклад 2.11. Знайти інтеграл $I = \int \frac{(1 + \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Для раціоналізації підінтегрального виразу використаємо підстановку $x = t^6$, диференціал $dx = 6t^5 dt$. Маємо інтеграл:

$$I = \int \frac{(1 + \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{(1 + t^3) t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6 \int \frac{t^3 + t^6}{t - 1} dt = 6 \int \frac{(t^3 - 1) + (t^6 - 1) + 2}{t - 1} dt = 6(I_1 + I_2 + I_3).$$

$$I_1 = \int \frac{t^3 - 1}{t - 1} dt = \int (t^2 + t + 1) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + C_1;$$

$$I_2 = \int \frac{t^6 - 1}{t - 1} dt = \int (t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1) dt = \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + C_2;$$

$$I_3 = \int \frac{2}{t - 1} dt = 2 \ln|t - 1| + C_3.$$

$$I = 6(I_1 + I_2 + I_3) = 6 \left(\frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + t^2 + 2t + \frac{2}{t - 1} \right) + C.$$

Виконавши зворотну підстановку $t = \sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I = 6 \left(\frac{x}{6} + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{4} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3} + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 2 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} - 1 \right| \right) + C =$$

$$= 6 \left(\frac{x}{6} + \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{2\sqrt{x}}{3} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 2 \ln \left| \sqrt[6]{x} - 1 \right| \right) + C.$$

Приклад 2.12. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Перейшовши до нової змінної, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + C.$$

Приклад 2.13. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^7}}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^7}} = \int \frac{x^6 dx}{x^7 \sqrt{1+x^7}} = \left\| \begin{array}{l} 1+x^7 = t^4; \\ 7x^6 dx = 4t^3 dt. \end{array} \right\| = \frac{4}{7} \int \frac{t^3 dt}{(t^4-1) \cdot t} = \frac{4}{7} \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)(t^2+1)}.$$

Отриманий інтеграл перетворимо наступним чином:

$$\frac{4}{7} \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{2}{7} \int \frac{(t^2-1) + (t^2+1)}{(t^2-1)(t^2+1)} dt = \frac{2}{7} \int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{2}{7} \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{2}{7} \left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C.$$

Перейшовши до змінної x ($t = \sqrt[4]{1+x^7}$), отримуємо значення інтеграла I :

$$I = \frac{2}{7} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^7} + \frac{1}{7} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^7}-1}{\sqrt[4]{1+x^7}+1} \right| + C.$$

Розглянемо підстановки, що використовуються при інтегруванні виразів виду $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $a > 0$. Тут можливі наступні випадки.

1. Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{a^2 - x^2}$, доцільно використовувати підстановку $x = a \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. У цьому випадку отримуємо $dx = a \cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$.

2. Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2 - a^2}$, позбутися ірраціональності можна з допомогою підстановки $x = \frac{a}{\cos t}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t}, \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3. У випадку, коли під знаком інтеграла маємо корінь $\sqrt{a^2 + x^2}$, можна позбутися радикала, використавши заміну змінної $x = a \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Маємо

$$dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

У цих випадках можуть також бути використані гіперболічні підстановки, а саме: для випадку 1 – $x = a \operatorname{th} t$, для випадку 2 – $x = a \operatorname{ch} t$, для випадку 3 – $x = a \operatorname{sh} t$.

Приклад 2.14. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить корінь $\sqrt{a^2 + x^2}$, то маємо випадок 3, тому використаємо підстановку $x = a \operatorname{tg} t$. Отримуємо:

$$I = \int \frac{a^3 \operatorname{tg}^2 t \cos^3 t dt}{a^3 \cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{1 - \sin^2 t} = \left\| \begin{array}{l} \sin t = u, \\ du = \cos t dt. \end{array} \right\| = \int \frac{u^2 du}{1 - u^2}.$$

Виконаємо перетворення у отриманому інтегралі:

$$\int \frac{u^2 du}{1 - u^2} = - \int \frac{(1 - u^2) - 1}{1 - u^2} du = - \int du + \int \frac{du}{1 - u^2} = -u - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C = -\sin t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin t - 1}{\sin t + 1} \right| + C.$$

Оскільки $x = a \operatorname{tg} t$, $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, то, скориставшись тотожністю $\sin(\operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$

, при $\alpha = \frac{x}{a}$ маємо $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Остаточнo отримуємо:

$$I = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt{a^2 + x^2}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \right| + C.$$

Приклад 2.15. Обчислити інтеграл $I = \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Розв'язання. Для даного інтеграла маємо випадок 1, тому використовуємо заміну змінної $x = a \sin t$.

$$I = \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) + C$$

Виконаємо зворотню заміну. $t = \arcsin \frac{x}{a}$. Виразимо через змінну x величину $\sin 4t$.

$$\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t).$$

При $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ маємо $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$.

Для $t = \arcsin \frac{x}{a}$ маємо $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, $a > 0$. Підставивши ці залежності у вираз для $\sin 4t$, отримаємо $\sin 4t = \frac{4x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{8x^3}{a^4} \sqrt{a^2 - x^2}$. Підставимо цей вираз у отримане значення інтеграла I :

$$I = \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{a^2 x}{8} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^3}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Приклад 2.16. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить $\sqrt{x^2 - a^2}$, то для даного інтеграла доцільно використати підстановку випадку 2:
 $x = \frac{a}{\cos t}, 0 < t < \frac{\pi}{2}.$

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \int \frac{a \operatorname{tg} t \cos t}{a} \cdot \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = a \int \operatorname{tg}^2 t dt = a \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = a (\operatorname{tg} t - t) + C.$$

Перейдемо до змінної x . $\cos t = \frac{a}{x}$, $t = \arccos \frac{a}{x}$, $\operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$.

Таким чином, $I = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{x} + C$.

Приклад 2.17. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить радикал виду $\sqrt{x^2 - a^2}$, то для знаходження даного інтегралу можна використати гіперболічну підстановку $x = 3 \operatorname{ch} t$. Тоді $dx = 3 \operatorname{sh} t dt$, підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$\frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} = \frac{3 \operatorname{sh} t dt}{9 \operatorname{ch}^2 t \cdot \sqrt{9 \operatorname{ch}^2 t - 9}} = \frac{3 \operatorname{sh} t dt}{9 \operatorname{ch}^2 t \cdot 3 \operatorname{sh} t} = \frac{dt}{9 \operatorname{ch}^2 t}.$$

Підставимо його у інтеграл I :

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{9} \operatorname{th} t + C.$$

Перейдемо до змінної x , використавши для цього формулу для функції $y = \operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$:

$$I = \frac{1}{9} \operatorname{th} t + C = \frac{1}{9} \operatorname{th} \left(\operatorname{arch} \frac{x}{3} \right) + C = \pm \frac{1}{9} \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 - 9}}{3} - \frac{3}{x + \sqrt{x^2 - 9}}}{\frac{x + \sqrt{x^2 - 9}}{3} + \frac{3}{x + \sqrt{x^2 - 9}}} + C = \pm \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 9} \right)^2 - 9}{\left(x + \sqrt{x^2 - 9} \right)^2 + 9} + C$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1. $\int x \cos(x^2) dx.$

Відповідь: $\frac{1}{2} \sin(x^2) + C.$

2. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

Відповідь: $\ln |\ln |x|| + C.$

3. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx.$

Відповідь: $\frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} + C.$

4. $\int \cos(\sin x) \cos x dx.$

Відповідь: $\sin(\sin x) + C.$

5. $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Відповідь: $-3 \cos \sqrt[3]{x} + C.$

6. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx.$

Відповідь: $\frac{2}{9}(x^3 + 5)\sqrt{x^3 + 5} + C.$

7. $\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx.$

Відповідь: $\frac{1}{8}(2 \ln x + 3)^4 + C.$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$

Відповідь: $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$

9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^4 x}} dx.$

Відповідь: $-\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$

10. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}.$

Відповідь: $\frac{1}{5} \ln |x^5 + \sqrt{x^{10} - 2}| + C.$

11. $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}.$

Відповідь: $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{2} + C.$

12. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5}.$

Відповідь: $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{e^{2x} - \sqrt{5}}{e^{2x} + \sqrt{5}} \right| + C.$

13. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}} dx}{\sqrt{2x-1}}.$

Відповідь: $e^{\sqrt{2x-1}} + C.$

14. $\int x^3 (1-2x^4)^2 dx.$

Відповідь: $-\frac{1}{32} (1-2x^4)^4 + C.$

15. $\int x \cdot \operatorname{ch}(5x^2 + 3) dx.$

Відповідь: $\frac{1}{10} \operatorname{sh}(5x^2 + 3) + C.$