**Тема 2.** **Аксіоматичні теорії натуральних, цілих і раціональних чисел**.

**Ключові поняття:** натуральне число, аксіоми Пеано, числові системи, розширення множини, переріз на множині.

**1. Аксіоматика Пеано системи натуральних чисел і наслідки з неї**.

Вперше питання про створення аксіом арифметики поставив Лобачевський. Існують різні аксіоматики системи натуральних чисел. Ми розглянемо аксіоматику, створену італійським математиком Пеано. Неозначуваними поняттями в ній є: об’єкти «одиниця», «натуральне число» та відношення «безпосередньо слідує за». Список аксіом складається з чотирьох аксіом:

. Одиниця – натуральне число.

. Для кожного натурального числа  існує єдине натуральне число , яке безпосередньо слідує за .

. Для кожного натурального числа , відмінного від одиниці, існує єдине натуральне число  таке, що число  безпосередньо слідує за .

 (аксіома індукції). Якщо будь-яка підмножина *М* натуральних чисел містить одиницю і з припущення що *М* містить натуральне число  випливає, що *М* містить натуральне число , то *М* є множиною  всіх натуральних чисел.

**Зауваження.** Остання аксіома є обґрунтуванням методу доведення істинності тверджень, сформульованих для натуральних чисел – методу математичної індукції.

Умовимось позначати: одиницю символом 1, натуральне число  (що безпосередньо слідує за 1) символом 2,  – символом 3,  – символом  і т.д. Розглянемо початки аксіоматичної теорії натуральних чисел.

**Означення.** *Сумою натурального числа  і одиниці* будемо називати натуральне число , яке безпосередньо слідує за . *Сумою натурального числа  і натурального числа * (що безпосередньо слідує за ) називається натуральне число .

Користуючись цим означенням, можна, наприклад, обґрунтувати, що . Дійсно, запишемо таку послідовність рівностей.

.

**Теорема.** Додавання натуральних чисел асоціативне і комутативне.

**Зауваження.** Доведення властивостей слід проводити саме в тій послідовності, яка запропонована в формулюванні. Для доведення властивостей додавання суттєве значення має аксіома індукції.

**Означення.** *Добутком натурального числа  і одиниці* будемо називати саме натуральне число . *Добутком натурального числа  і натурального числа * (що безпосередньо слідує за ) називається натуральне число .

Доведемо, що .

Дійсно, .

**Теорема.** Множення натуральних чисел пов’язане із додаванням дистрибутивним законом. Множення натуральних чисел асоціативне і комутативне.

**Означення.** Натуральне число  називається *більшим* за натуральне число , якщо існує таке натуральне число , що . Позначають . При цьому число  називають *меншим* за число  і пишуть .

Це відношення між натуральними числами має такі **властивості**:

1. ;

2. якщо  і , то .

3. для будь-яких двох натуральних чисел  і  має місце лише одне з трьох співвідношень: , , .

При доведенні останньої властивості теж використовується аксіома індукції.

**Означення.** *Різницею* натурального числа  і натурального числа  називається таке натуральне число , що .

**Теорема.** Різниця натурального числа  і натурального числа  існує і єдина тоді і тільки тоді, коли .

Той факт, що в множині натуральних чисел не завжди виконується операція віднімання, робить доцільною необхідність розширення цієї множини.

**Принцип розширення полягає в наступному:**

1). якщо множина *А* розширюється до множини *В*, то .

2). операція, яка виконувалась у множині *А,* повинна виконуватись і мати ті самі властивості у множині *В.*

3). операція, яка не виконувалась або не завжди виконувалась у множині *А,* повинна виконуватись у множині *В.*

4). розширення повинне бути мінімальним, тобто розширення не повинне містити відмінних від *А* підмножин із такими ж, що і у *А,* властивостями.

Першим розширенням є поповнення множини натуральних чисел нулем, який позначають символом 0. Це число уводиться за допомогою таких аксіом:

1. .

2. .

3. 0+0=0, .

4. число 0 є меншим будь-якого натурального числа.

**2. Аксіоматичне означення цілих чисел. Множина цілих чисел як розширення множини натуральних чисел.**

**Означення.** Нехай дано множину . Множиною цілих чисел називається множина , на якій операції порівняння, додавання, множення елементів уведені за такими правилами (аксіомами):

1.1) ,

1.2) ,

1.3) .

2) ,

3) 

**Наслідок.** Ціле число не зміниться, якщо до кожної компоненти пари додати або, якщо можливо, відняти одне і те саме натуральне число.

В справедливості наслідку легко переконатись за допомогою першої аксіоми.

З наслідку випливає, що уведену множину впорядкованих пар можна розбити на класи, в кожному з яких міститимуться всі попарно рівні (в сенсі аксіоми 1.3) пари. Отже,

**Ціле число - це клас попарно рівних між собою впорядкованих пар.**

**Теорема.** Додавання цілих чисел комутативне і асоціативне.

**Теорема.** Множення цілих чисел комутативне, асоціативне і дистрибутивне по відношенню до додавання.

Доведення легко проводиться на мові пар.

**Означення.** Різницею цілого числа  і цілого числа  називається таке ціле число , що .

**Теорема.** Різниця цілих чисел завжди існує і єдина.

**Доведення** випливає з формули

,

яку неважко отримати, використовуючи означення різниці.

Розглянемо цілі числа, друга компонента яких дорівнює 0, тобто множину . Легко отримати рівності:

,

,

, якщо .

Тобто, якщо ввести взаємно однозначну відповідність  за правилом , то для неї виконуються вимоги ізоморфізму. З’ясувалося, що множина *М* ізоморфна множині , або, інакше, що множина  є підмножиною множини . А це, в свою чергу, означає, що  є розширенням множини  і важливо відмітити, що в цьому розширенні операція віднімання чисел завжди виконується.

В силу введеної відповідності  рівність  можна переписати у вигляді

,

який будемо називати *другою формою запису цілого числа*.

**Означення.** Будь-яке ціле число, менше за число , називається *від’ємним.*

За аксіомою 1.2) отримаємо

,

тобто від’ємним є ціле число, в якому перша компонента менша за другу.

Віднявши від обох компонент від’ємного числа його першу компоненту, отримаємо , . Якщо ввести позначення , то від’ємне ціле число набуде вигляду . Це дає можливість продовжити введену відповідність  на множину від’ємних чисел. Дійсно, якщо замість  писати різницю  (друга форма запису цілого числа), то очевидно відповідність   буде взаємно однозначною і на множині від’ємних чисел. Фактично, ми ввели поняття знаку цілого числа.

**Теорема.** Добуток двох цілих чисел одного знаку є додатним цілим числом (натуральним числом). Добуток двох цілих чисел різних знаків є від’ємним цілим числом.

У сформульованій властивості цілих чисел легко переконатись, якщо задавати цілі числа парами.

Далі можна довести властивості нерівностей, ввести дії над нерівностями, означити операцію ділення цілих чисел і показати, що ця операція не завжди виконується в множині . Отже, знову виникає ситуація необхідності розширення множини.

**3. Аксіоматичне означення раціональних чисел. Множина раціональних чисел як розширення множини цілих чисел.**

**Означення.** Нехай дано множину  цілих чисел, які будемо позначати . Множиною раціональних чисел називається множина , на якій операції порівняння, додавання, множення елементів уведені за такими правилами (аксіомами):

1.1) ,

1.2) ,

1.3) .

2) ,

3) .

**Наслідок.** Раціональне число не зміниться, якщо кожну компоненту пари помножити або, якщо можливо, розділити (націло) на одне і те саме відмінне від нуля ціле число.

В справедливості наслідку легко переконатись за допомогою аксіоми 1.3). З наслідку випливає, що уведену множину впорядкованих пар можна розбити на класи, в кожному з яких міститимуться всі попарно рівні (в сенсі аксіоми 1.3) пари. Отже,

**Раціональне число** – **це клас попарно рівних між собою впорядкованих пар.**

**Теорема.** Додавання раціональних чисел комутативне і асоціативне.

**Теорема.** Множення раціональних чисел комутативне, асоціативне і дистрибутивне по відношенню до додавання.

Доведення легко проводиться на мові пар.

**Означення.** *Різницею* раціонального числа  і раціонального числа  називається таке раціональне число , що .

**Теорема.** Різниця раціональних чисел завжди існує і єдина.

**Доведення** випливає з формули

,

яку легко отримати, використовуючи означення різниці.

**Означення.** Часткою від ділення раціонального числа  на раціональне число  називається таке раціональне число , що . При цьому число  називається діленим, а число  – дільником.

**Теорема.** Частка двох раціональних чисел завжди існує і єдина, якщо перша компонента дільника не дорівнює 0.

**Доведення** випливає з формули

,

яку легко отримати, використовуючи означення різниці.

Покажемо , що множина раціональних чисел є мінімальним розширенням множини цілих чисел. Розглянемо раціональні числа, друга компонента яких дорівнює 1, тобто множину . Легко отримати співвідношення:

,

,

.

,

.

,

, якщо ціле число  ділиться на ціле число .

Тобто, якщо ввести взаємно однозначну відповідність  за правилом , то для неї виконуються вимоги ізоморфізму. Ми отримали, що множина *М* ізоморфна множині , або, інакше, що множина  є підмножиною множини . А це, в свою чергу, означає, що  є розширенням множини  і важливо відмітити, що в цьому розширенні операція ділення чисел завжди виконується.

В силу введеної відповідності  рівність  можна переписати у вигляді

,

який будемо називати *другою формою запису раціонального числа*. Отже, раціональне число – це частка двох цілих чисел при умові, що друге число не дорівнює нулю.

**Означення.** Будь-яке раціональне число, менше за число , називається від’ємним.

За аксіомою 1.2) отримаємо , тобто від’ємним є раціональне число, в якому компоненти мають різні знаки. Розділивши обидві компоненти від’ємного раціонального числа на його другу компоненту, отримаємо

, .

Далі можна доводити властивості нерівностей, ввести дії над нерівностями. Наведемо, для прикладу одну з цих теорем.

**Теорема.** При множенні обох частин вірної нерівності  на від’ємне раціональне число  отримується вірна нерівність

.

**Доведення.** За умовою , тобто за аксіомою 1.2) , . Число  від’ємне, значить . Помножимо обидві частини нерівності  на від’ємне ціле число . За властивостями нерівностей для цілих чисел отримаємо , з якої за аксіомою 1.1) можемо записати , а за аксіомою 3) отримаємо нерівність

,

яку і треба було довести.