

Практичне заняття № 4. Інтегрування раціональних функцій

4.1 Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у квадратному тричлені знаменника. Маємо: $x^2 + 4x + 10 = (x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) + 10 - 2^2 = (x + 2)^2 + 6$.
Отже, отримуємо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} &= \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 6} = \left\| \begin{matrix} x + 2 = t, \\ dx = dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx$.

Розв'язання. Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну знаменника. Оскільки $(x^2 - 2x - 5)' = 2x - 2$, то представимо чисельник у вигляді: $x + 3 = \frac{1}{2}(2x - 2) + 4$. Тоді заданий інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 2)}{x^2 - 2x - 5} dx + 4 \int \frac{dx}{(x - 1)^2 - 6}.$$

Оскільки

$$\int \frac{(2x - 2)}{x^2 - 2x - 5} dx = \left\| \begin{matrix} x^2 - 2x - 5 = t, \\ dt = 2x - 2 \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C_1 = \ln |x^2 - 2x - 5| + C_1,$$

$$\int \frac{dx}{(x - 1)^2 - 6} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x - 1 - \sqrt{6}}{x - 1 + \sqrt{6}} \right| + C_2,$$

то остаточно отримуємо:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у підкореневому виразі. Отримуємо:

$$\begin{aligned} 2-3x-4x^2 &= -4 \left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{8}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \right) = -4 \left(\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{41}{64} \right) = \\ &= 4 \left(\frac{41}{64} - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Отже, заданий інтеграл набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4 \left(\frac{41}{64} - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2 \right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64} - \left(x + \frac{3}{8}\right)^2}} = \left\| x + \frac{3}{8} = t, \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{8}\right)^2 - t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{8t}{\sqrt{41}} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$.

Розв'язання. Похідна підкореневого виразу у знаменнику дробу під знаком інтеграла $(x^2+4x+10)' = 2x+4$. Виділимо її у чисельнику:

$$5x + 3 = \frac{5}{2}(2x + 4 - 4) + 3 = \frac{5}{2}(2x + 4) - 7.$$

Запишемо заданий інтеграл у наступному вигляді:

$$\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) - 7}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}}.$$

Обчислимо інтеграли у правій частині отриманої рівності:

$$\int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \left\| \begin{array}{l} x^2 + 4x + 10 = t, \\ (2x + 4) dx = dt. \end{array} \right\| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C_1 = 2\sqrt{x^2 + 4x + 10} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 6}} = \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10} \right| + C_2.$$

Остаточно отримуємо значення заданого інтеграла у вигляді:

$$\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10} \right| + C.$$

Приклад 5. Отримати рекурентну формулу для інтеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Користуючись цією формулою, знайти інтеграл $J = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}.$

Розв'язання. Для отримання рекурентної формули використаємо інтегрування частинами. Нехай $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$, $dv = dx$. Звідси отримуємо:

$$du = -\frac{2nxdx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x. \text{ Отже, маємо:}$$

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}. \end{aligned}$$

З отриманого рівняння відносно J_{n+1} знаходимо:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} J_n.$$

При цьому інтеграл $J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Використаємо знайдену рекурентну формулу для обчислення інтеграла $J = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3} = J_3$. Тут $a^2 = 4$, $a = 2$, $n+1=3$, $n=2$,

$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C_1$. Далі послідовно знаходимо:

$$J_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2^2} \cdot \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{4} J_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{x}{x^2 + 4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + C_2.$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} \cdot \frac{x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} J_2 = \frac{1}{16} \left(\frac{x}{(x^2 + 4)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{x^2 + 4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) \right) + \\ &+ C_3. \end{aligned}$$

4.2 Інтегрування раціональних дробів

Нехай $P_m(x)$ та $Q_n(x)$ – це многочлени степенів відповідно m та n .

Відношення цих многочленів $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називають *раціональною функцією* або *раціональним дробом*. Раціональний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника ($m < n$), у іншому випадку ($m \geq n$) раціональний дріб називають *неправильним*. Будь-який неправильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми многочлена степеня $m - n$ та правильного раціонального дроби, поділивши чисельник раціонального дроби на знаменник.

Елементарними раціональними дробами називають раціональні дроби таких чотирьох видів: 1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

Тут A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Інтеграли від елементарних раціональних дроби виду 1) та 2) є табличними:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{A}{-n+1} (x-a)^{-n+1} + C = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Обчислення інтегралів виду 3) розглянуто у п.4.1 (інтеграли I_1 та I_2). За схемою, аналогічною обчисленню інтеграла виду 3), знаходять і інтеграл виду 4). Розглянемо обчислення такого інтеграла на прикладі.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є елементарним дробом виду 4), тобто $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$. Для знаходження інтегралу від цього дроби виділимо у

чисельнику похідну від квадратного тричлена $x^2 + px + q$, тобто для даного

прикладу похідну від квадратного тричлена $x^2 + 2x + 10$. Вона дорівнює $2x + 2$, тому підінтегральну функцію перетворимо до вигляду

$$\frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} = \frac{\frac{3}{2}(2x + 2) - 1}{(x^2 + 2x + 10)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} - \frac{1}{((x + 1)^2 + 9)^2}.$$

Інтеграл $I = \int \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx = \frac{3}{2} \cdot I_1 - I_2$, де

$$I_1 = \int \frac{d(x^2 + 2x + 10)}{(x^2 + 2x + 10)^2} = -\frac{1}{x^2 + 2x + 10} + C_1,$$

а інтеграл $I_2 = \int \frac{dx}{((x + 1)^2 + 9)^2}$ заміною $x + 1 = t$ зводиться до інтеграла виду

$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, що обчислюється за рекурентною формулою, наведеною у

прикладі 5:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{t}{t^2 + 9} + \frac{1}{54} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C_2.$$

Остаточнo отримуємо:

$$I = \int \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx = \frac{3}{2} \cdot I_1 - I_2 = -\frac{3}{2(x^2 + 2x + 10)} - \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C.$$

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладено на

множники:

$$Q_n(x) = a(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_s)^{\alpha_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{\beta_r}, \quad (1)$$

де $a_1, \dots, a_s$ – дійсні корені многочлена $Q_n(x)$, кратності яких відповідно дорівнюють $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, квадратні тричлени $x^2 + p_ix + q_i$, $p_i \in \mathbb{R}$, $q_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, r$, не мають дійсних коренів, $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_r = n$. Тоді цей дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{B_1}{x - a_s} + \frac{B_2}{(x - a_s)^2} + \dots \\ & + \frac{B_{\alpha_s}}{(x - a_s)^{\alpha_s}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\beta_1}x + N_{\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \dots \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_rx + q_r} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_rx + q_r)^2} + \dots + \frac{C_{\beta_r}x + D_{\beta_r}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{\beta_r}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Цю суму називають *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дроби*.

Для знаходження чисел $A_1, \dots, D_{\beta_r}$ можна використати метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод полягає у тому, що знаходять суму елементарних дробів у правій частині останньої рівності, привівши їх до спільного знаменника, після чого прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x у чисельнику отриманого дробу та многочлені $P_m(x)$ – чисельнику раціонального дробу з лівої частини рівності. Отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_1, \dots, D_{\beta_r}$, з якої визначають ці числа.

Приклад 7. Знайти розклад на елементарні дроби раціонального дробу $\frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2}$.

Розв’язання. Заданий раціональний дріб є правильним, оскільки степінь чисельника ($m = 4$) менший, ніж степінь знаменника ($n = 5$). Розклад дробу на елементарні дробу має вигляд:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + 1)^2}.$$

Знайшовши суму дробів у правій частині цієї рівності, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Mx + N)x}{x(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи чисельники у лівій та правій частинах отриманої рівності, знаходимо, що $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Mx + N)x$ або $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + M)x^2 + (C + N)x + A$. Тепер прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої та правої частини цієї рівності. Отримаємо систему:

$$A + B = 1, C = 2, 2A + B + M = 5, C + N = 0, A = -1.$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо значення невідомих коефіцієнтів: $A = -1, B = 2, C = 2, M = 5, N = -2$. Підставивши їх у розклад заданого дробу на елементарні дробу, отримуємо:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} + \frac{5x - 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Розклад правильного раціонального дробу на елементарні дробу дозволяє обчислити інтеграли від будь-яких раціональних функцій.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} dx$.

Розв'язання. Дріб $\frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2}$ є правильним (ступінь чисельника є меншим, ніж ступінь знаменника), його розклад у суму елементарних дробів має вигляд:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A , B та C , для чого приведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}.$$

Знаменники дробів у лівій та правій частинах цієї рівності є однаковими, тому повинні співпадати і знаменники. Маємо

$$x^2 + 4x + 4 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах останньої рівності, отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів A , B та C :

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -2A - B + C = 4, \\ A = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4, \\ B = -3, \\ C = 9. \end{cases}$$

Таким чином, розклад підінтегральної функції на елементарні дробі має вигляд:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}.$$

Підставивши даний розклад у інтеграл I , отримуємо:

$$I = \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} dx = 4 \int \frac{dx}{x} - 3 \int \frac{dx}{x-1} + 9 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = 4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^2 - x + 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} dx$.

Розв'язання. $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Знайдемо розклад підінтегральної функції на елементарні дробі.

$$\frac{x^2 - x + 4}{(x+1)(x^2 - 5x + 6)} = \frac{x^2 - x + 4}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Після приведення суми дробів у правій частині до спільного знаменника, прирівнявши чисельники, отримаємо:

$$x^2 - x + 4 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2).$$

Для знаходження коефіцієнтів A , B та C замість прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x можна обчислити значення правої та лівої частин даної рівності при трьох різних значеннях змінної x . Для цього зручно вибрати корені знаменника підінтегральної функції $x = -1$, $x = 2$ та $x = 3$. При

$x = -1$ отримуємо $12A = 6$, $A = \frac{1}{2}$. При $x = 2$ $-3B = 6$, $B = -2$, при $x = 3$ маємо $4C = 10$, $C = \frac{5}{2}$.

Таким чином, отримуємо:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - 2 \int \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{2} \ln|x+1| - 2 \ln|x-2| + \frac{5}{2} \ln|x-3| + C.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)} dx$.

Розв'язання. Розклад дробу $\frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)}$ у суму елементарних дробів

шукаємо у вигляді:

$$\frac{3x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)^2 (x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Систему для визначення коефіцієнтів даного розкладу отримаємо, звівши дробу у лівій частині даної рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x у чисельнику:

$$3x^2 - x + 2 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 1).$$

Вибравши $x = 1$, знаходимо $A = 1$. З рівності коефіцієнтів при однакових степенях x випливає:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -B + C = 0, \\ 2A - C + D + B = 3, \\ A - C - E = 2. \end{cases}$$

З врахуванням $A=1$ з даної системи знаходимо решту коефіцієнтів:
 $B=C=-1, D=1, E=0$.

$$I = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Нехай потрібно обчислити інтеграл від раціонального дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Якщо даний дріб неправильний, то його можна представити у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Останній можна розкласти на суму елементарних дробів. Отже, задача звелася до інтегрування многочлена та суми елементарних раціональних дробів.

—

Оскільки розклад на елементарні дроби здебільшого потребує значних затрат часу, то при обчисленні інтегралів від раціональних функцій корисно виконувати спрощення або заміну змінних у підінтегральному виразі, що дозволяє полегшити обчислення інтеграла.

Приклад 13. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$.

Розв'язання.
$$\frac{1}{(x-3)(x+4)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{(x+4) - (x-3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4} \right).$$

Підставивши в інтеграл, отримаємо:

$$I = \frac{1}{7} \left(\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x+4} \right) = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-3}{x+4} \right| + C.$$

Приклад 15. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}$.

Розв'язання. Домножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $3x^2$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x^2 dx}{3x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{x^3(1-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u(1-u)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{(1-u)+u}{u(1-u)^2} \\ &= \frac{1}{3} \left[\int \frac{du}{u(1-u)} + \int \frac{du}{(1-u)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\int \frac{u+(1-u)}{u(1-u)} du - \frac{1}{u-1} \right] = \frac{1}{3} \left[\int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{u} - \frac{1}{u-1} \right] = \frac{1}{3} \left[\ln \frac{x^3}{x^3-1} - \frac{1}{x^3-1} \right] + C. \end{aligned}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} dx$.

Розв’язання. Оскільки дріб під знаком інтеграла є неправильним (ступінь чисельника є більшим, ніж ступінь знаменника), то перед його розкладом на прості дроби необхідно спочатку виділити цілу частину. Ділимо $x^3 - x$ на квадратний тричлен $x^2 - 5x + 6$ та отримуємо:

$$\begin{array}{r} - \frac{x^3 + 0x^2 - x + 0}{x^2 - 5x + 6} \quad \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 5} \right. \\ \hline \frac{5x^2 - 7x}{5x^2 - 25x + 30} \\ \hline \phantom{\frac{5x^2 - 7x}{5x^2 - 25x + 30}} 18x - 30. \end{array}$$

Звідки

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{18x - 30}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{18x - 30}{(x - 2)(x - 3)}.$$

Розкладемо дріб у правій частині рівності на прості дроби:

$$\frac{18x - 30}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях x у чисельниках, маємо $A + B = 18$, $-3A - 2B = -30$. Звідси знаходимо $A = -6$, $B = 24$. Таким чином,

$$I = \int (x + 5) dx - 6 \int \frac{dx}{x - 2} + 24 \int \frac{dx}{x - 3} = \frac{x^2}{2} + 5x - 6 \ln|x - 2| + 24 \ln|x - 3| + C. \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2} dx$.

Розв'язання. Підінтегральний раціональний дріб є неправильним, тому спочатку виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник «стовпчиком»:

$$\begin{array}{r|l}
 x^{10} + 0x^9 + 0x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 + x - 2 \\
 \underline{x^{10} + x^9 - 2x^8} & \\
 -x^9 + 2x^8 + 0x^7 & \\
 \underline{-x^9 - x^8 + 2x^7} & \\
 3x^8 - 2x^7 + 0x^6 & \\
 \underline{3x^8 + 3x^7 - 6x^6} & \\
 -5x^7 + 6x^6 + 0x^5 & \\
 \underline{-5x^7 - 5x^6 + 10x^5} & \\
 11x^6 - 10x^5 + 0x^4 & \\
 \underline{11x^6 + 11x^5 - 22x^4} & \\
 -21x^5 + 22x^4 + 0x^3 & \\
 \underline{-21x^5 - 21x^4 + 42x^3} & \\
 43x^4 - 42x^3 + 0x^2 & \\
 \underline{43x^4 + 43x^3 - 86x^2} & \\
 -85x^3 + 86x^2 + 0x & \\
 \underline{-85x^3 - 85x^2 + 170x} & \\
 171x^2 - 170x + 0 & \\
 \underline{171x^2 + 171x - 342} & \\
 -341x + 342 &
 \end{array}$$

Звідки отримаємо

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} \right) dx = \\
 &= \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \int \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} dx.
 \end{aligned}$$

Тепер розглянемо підінтегральну функцію в інтегралі $\int \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} dx$ і

розкладемо цей дріб на найпростіші:

$$\frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} = \frac{-341x + 342}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Знаходимо невизначені коефіцієнти.: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1024}{3}$. Після чого одержимо

$$\int \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1024}{3(x+2)} \right) dx = \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1024}{3} \ln |x+2| + C.$$

Об'єднуючи разом усі отримані результати, отримаємо:

$$I = \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \\ + \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1024}{3} \ln |x+2| + C. \blacksquare$$