

Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

Розглянемо основні методи знаходження інтегралів від виразів, що містять тригонометричні функції. Вираз, що містить функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, над якими виконуються дії додавання, віднімання, множення та ділення, будемо позначати $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, де R – знак раціональної функції.

Обчислення невизначених інтегралів $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx$ можна звести до обчислення інтегралів від раціональної функції з допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тоді отримуємо:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Оскільки у цьому випадку $x = 2\operatorname{arctg} t$, то $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією аргументів $\sin x$ та $\cos x$, тому для інтегрування доцільно застосувати універсальну тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. Тоді тригонометричні функції виражаються через раціональні дробби:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Підставляючи ці вирази в інтеграл, маємо:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.$$

На практиці застосовують і інші, простіші підстановки у залежності від властивостей та вигляду підінтегральної функції. Зокрема, застосовують наступні правила.

1. Інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу, якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, тобто виконується рівність $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. У цьому випадку використовують підстановку $\cos x = t$.

2. Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто виконується рівність $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\sin x = t$ зводить інтеграл до інтеграла від раціонального дробу.

3. Функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ та $\cos x$, тобто є справедливою рівність $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Використовуємо підстановку $\tan x = t$. Ця ж підстановка використовується і коли підінтегральна функція має вигляд $R(\tan x)$.

Розглянемо методи обчислення інтегралів виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$. Для знаходження таких інтегралів використовують наступні методи.

1. Якщо n є цілим додатним непарним числом, то використовують підстановку $\sin x = t$.

2. Якщо m є цілим додатним непарним числом, то використовують підстановку $\cos x = t$.

3. Якщо m та n є цілими невід'ємними парними числами, то використовують формули пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$.

Розв'язання. Маємо інтеграл виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де $m = -6$, $n = 3$. Оскільки n – непарне ціле додатне число, то доцільно застосувати підстановку $\sin x = t$. Перейдемо до змінної t :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^6 x} = \left\| t = \sin x \right\| \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^6} = \\ &= \int t^{-6} dt - \int t^{-4} dt = -\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{3t^3} + C. \end{aligned}$$

Виконаємо зворотну заміну:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx$.

Розв'язання. Тут $m=3$ – непарне додатне число, тому використаємо заміну змінної $\cos x = t$. Для цього запишемо інтеграл у вигляді:

$$I = - \int \frac{(1 - \cos^2 x) d(\cos x)}{(\cos x)^{\frac{4}{3}}} = \int \frac{(t^2 - 1) dt}{t^{\frac{4}{3}}} = \int \left(t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}} \right) dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C.$$

Перейшовши до змінної x , отримаємо:

$$I = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int \sin^4 x \cos^4 x dx$

Розв'язання. $I = \int \sin^4 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^4 dx$.

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}; (\sin x \cos x)^4 = \frac{\sin^4 2x}{16} = \frac{1}{16} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 = \frac{1}{64} (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) = \frac{1}{64} \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) = \frac{1}{64} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{\cos 8x}{2} \right).$$

$$I = \frac{1}{64} \int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{\cos 8x}{2} \right) dx = \frac{1}{64} \left(\frac{3}{2} x - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{16} \right) + C.$$

Задачі для самостійної роботи

$$1. \quad I = \int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)}. \text{ Відповідь: } \frac{1}{2} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}. \text{ Відповідь: } -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}} \right| + C.$$

$$3. \quad \int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx. \text{ Відповідь: } \ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

4. $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x) dx}{1 - 2\sin^2 x}$. Відповідь: $\frac{\cos x}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C$.

5. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$. Відповідь: $-\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$.