**Побудова евклідової геометрії на базі системи аксіом Гільберта.**

Аксіоматичне обґрунтування геометрії вперше було дано **Гільбертом** в 1899 р. після того, як була відкрита неевклідова геометрія. Потім з’явились системи аксіом Пеано, Кагана, Шура, **Погорєлова**, Александрова, Вейля та ін.

**Завдання.** Порівняти системи аксіом Гільберта і Погорєлова:

**Неозначувані об’єкти:**

Гільберт-

Погорєлов-

**Неозначувані відношення:**

Гільберт-

Погорєлов-

**а) Огляд системи аксіом Гільберта евклідової геометрії.**

Система аксіом Гільберта складається з 20 аксіом, які розбиті на п’ять груп.

В першій групі містяться вісім *аксіом належності (інцидентності)*. Вони описують властивості основних об’єктів – *точок, прямих, площин*, пов’язаних основним відношенням – *відношенням інцидентності*.

**Який висновок випливає з аксіом** 1.7.-1.8? (про розмірність простору)

Друга група аксіом містить чотири *аксіоми порядку.* Основне відношення – *лежати між* – формулюється для трьох точок, інцидентних одній прямій.

Аксіоми третьої групи називаються *аксіомами конгруентності*. Вони описують властивості основного відношення цієї групи – *відношення конгруентності*. Воно задається на множинах відрізків та кутів.

Четверта група аксіом називається групою *аксіом неперервності*. В ній немає основного відношення. Дві аксіоми цієї групи описують властивості неперервності розташування точок на прямій (взаємно однозначна відповідність між множиною точок прямої і множиною дійсних чисел) і є базою для введення понять довжини відрізка та величини кута.

**Як в школі вводиться довжина відрізка та величина кута?**

Обидві ці аксіоми можна замінити одним твердженням – аксіомою Дедекінда

П’ята група складається з однієї аксіоми – *аксіоми паралельності.* Ця аксіома відіграє ключову роль в побудові саме евклідової геометрії, без неї неможливо довести такі важливі теореми: сума кутів будь-якого трикутника дорівнює ; навколо кожного трикутника можна описати коло; вписаний в коло кут, що спирається на його діаметр, є прямим; в будь-якому прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів та ін..

**б) Наслідки з аксіом перших трьох груп.**

**Зауваження.** Прослідкуємо лише за побудовою аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Її система аксіом включає аксіоми 1.1-1.3 системи Гільберта та всі аксіоми інших груп цієї системи.

Послідовність введення означень понять і доведення теорем про властивості цих понять можна прослідкувати в **Додатку Г**.

**Зокрема, після формулювання аксіом перших трьох груп можна дати означення відрізка, кута, трикутника. Спробуйте це зробити.**

Серед наслідків з аксіом перших трьох груп особливу роль відіграє теорема про зовнішній кут трикутника.

**Яка теорема про зовнішній кут трикутника відома зі школи?**

**Теорема 30.** Зовнішнійкут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним**.**

**Яка теорема сильніша: теорема 30 чи шкільна теорема?**

***Доведення****.* Розглянемо трикутник . За теоремою 23 існує єдина точка  така, що . На промені  існує єдина точка  така, що (аксіома 3.1). Проведемо відрізок . Далі розглянемо трикутники  та , які за теоремою 14 будуть рівні, отже . Розглянемо дві півплощини  та  відносно прямої . Оскільки за побудовою відрізок  перетинається з  в точці , то за теоремою 10 точки  і  лежать в різних півплощинах. Також, з того, що  перетинається з  в точці , випливає, що точки  і  лежать різних півплощинах відносно прямої . Отже, точки  і  лежать в одній півплощині. Тоді промінь  є внутрішнім променем кута , звідки . Аналогічно доводиться, що .

**в) Обґрунтування теорії вимірювання відрізків за допомогою аксіом четвертої групи. Поняття абсолютної геометрії.**

Дотепер ми порівнювали відрізки або кути за допомогою неозначуваного поняття третьої групи «конгруентність». Для введення поняття довжини відрізка аксіом перших трьох груп недостатньо. Аксіоми Архімеда і Кантора системи Гільберта дозволяють обґрунтувати теорію вимірювання відрізків і кутів. В системі аксіом Погорєлова евклідового простору (**додаток В**) в четвертій групі є лише одна аксіома – Дедекінда. Виявляється, що аксіома Дедекінда еквівалентна сукупності аксіом Архімеда і Кантора. Доведення відповідних теорем можна знайти, наприклад, в книзі [8].

Задача вимірювання довжин відрізків полягає в тому, щоб задати відношення будь-якого відрізка до деякого фіксованого відрізка дійсним числом. Цей фіксований відрізок називають *лінійною одиницею* (або одиницею вимірювання довжин).

**Означення.** Нехай задана відповідність, при якій кожному відрізку зіставляється певне додатне число так, що:

1. конгруентним відрізкам відповідають рівні числа;
2. якщо *В* – внутрішня точка відрізка *АC* та відрізку *AB* відповідає число *а*, а відрізку *ВС* відповідає число *b*, то відрізку *AC* буде відповідати число *a+b*;
3. існує відрізок, якому відповідає число 1.

Тоді число, що відповідає відрізку, називається його *довжиною*.

Таке означення вимагає доведення його коректності. В аксіоматичній теорії за Гільбертом, викладеній в книзі [8] це зроблено наступним чином. Спочатку із припущення існування такої відповідності доводиться, що вона єдина, тобто доводиться

**Теорема**. Якщо вказана в означенні відповідність існує та задовольняє умовам 1, 2, 3, то вона єдина.

Далі доводиться

**Теорема.** Вказана у визначенні відповідність існує та задовольняє умовам 1, 2 та 3.

Важливим моментом в доведенні останньої теореми є використання аксіоми Архімеда. Фактично доведення є певною мірою конструктивним, оскільки містить описання процесу, який дозволяє для обраного відрізка знаходити відповідне йому додатне дійсне число.

Але відомий в евклідовій геометрії факт, що довжини всіх відрізків вичерпують всі додатні дійсні числа, не випливає з аксіом перших трьох груп і аксіоми Архімеда. Тому далі доводиться

**Теорема.** Для будь-якого дійсного числа  існує відрізок, довжина якого дорівнює .

При доведенні цієї теореми використовується друга з аксіом неперервності – аксіома Кантора.

Аналогічні міркування потрібні для введення поняття величини кута. Якщо одиницю вимірювання кутів вибрати так, щоб прямому куту відповідало число , то між множиною всіх кутів і множиною всіх дійсних чисел з інтервалу  встановлюється взаємно однозначна відповідність. Прийнято одиницю вимірювання кутів вибирати так, щоб прямому куту відповідало дійсне число .

**Порівняйте процеси введення довжини відрізка і величини кута в шкільній геометрії і в аксіоматичній теорії з книги** [8] **Єфімова.**

Після обґрунтування процесу вимірювання відрізків і кутів з’являється можливість користуватись в геометрії алгеброю. Зокрема, можна ввести систему координат на прямій, на площині, в просторі. А введення координат на прямій, в свою чергу, дозволяє сформулювати наступну важливу теорему.

**Теорема.** Між впорядкованою множиною всіх точок прямої і впорядкованою множиною всіх дійсних чисел існує така взаємно однозначна відповідність, при якій відповідні елементи знаходяться у відповідних відношеннях порядку.

**Зауваження.** Вказана властивість прямої називається *неперервністю.* Також ця теорема показує ізоморфізм двох моделей однієї математичної структури, яку називають *лінійним порядком.*

*Абсолютною геометрією* називається аксіоматична теорія, побудована на перших чотирьох групах аксіом Гільберта.

Прикладами теорем абсолютної геометрії є всі теореми з номерами 1– 46 аксіоматичної теорії, викладеної в книзі [8] (див. також **Додаток Г**). Наведемо ще список важливих теорем абсолютної геометрії, які були доведені в роботах Саккері, Лежандра, Ламберта в ході їх досліджень, пов’язаних з проблемою п’ятого постулату.

**Теорема.** Сума всіх внутрішніх кутів довільного трикутника не перевищує .

**Теорема.** Якщо сума кутів хоча б одного трикутника дорівнює двом прямим кутам, то сума кутів будь-якого трикутника дорівнює двом прямим кутам.

**Теорема.** Якщо в даному трикутника сума всіх внутрішніх кутів дорівнює  і цей трикутник ділиться трансверсаллю на два трикутники, то сума внутрішніх кутів кожного з цих трикутників теж дорівнює .

**Теорема.** Якщо існує трикутник, в якому сума всіх внутрішніх кутів не перевищує , то і в будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів не перевищує .