Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

С.М. Гребенюк, О.Г. Спиця, І.Г. Ткаченко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

Навчальний посібник
для студентів освітнього ступеня «магістр»
спеціальності «Математика (за напрямами)»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2015

УДК: 517.9 (075.8)
ББК: В161.6я73
Г79

Гребенюк С.М. Основи теорії стійкості: навчальний посібник для студентів освітнього ступеня «магістр» спеціальності «Математика (за напрямами)» [Текст] / С.М. Гребенюк, О.Г. Спиця, І.Г. Ткаченко. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 71 с.

У представленому навчальному посібнику наведено теоретичні відомості про стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь, різновиди точок спокою. Описані методи дослідження на стійкість розв'язків систем диференціальних та різницевих рівнянь. Наведено приклади розв'язання основних типів задач. Запропонована низка задач для самостійної роботи студентів.

Навчальне видання призначене для студентів магістратури математичного факультету денної та заочної форм навчання спеціальності «Математика (за напрямами)».

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*

ЗМІСТ

Вступ……………………………………………………………………… 4
1 Стійкість розв’язку системи диференціальних рівнянь. Найпростіші типи точок спокою …………………... 5
2 Другий метод Ляпунова………………………………………………….. 14
3 Дослідження на стійкість за першим наближенням ……….......................... 19
4 Асимптотична стійкість у цілому. Стійкість за Лагранжем ………….…...... 25
5 Критерій Рауса-Гурвіца …………………………………………………… 28
6 Геометричний критерій стійкості (критерій Михайлова)…………………... 32
7 *D*-розбиття………………………………………………………………… 36
8 Стійкість розв’язків різницевих рівнянь ……………………………….. 44
Індивідуальне завдання………………………………………………… 52
Відповіді…………………………………………………………………….. 65
Література………………………………………………………………… 69

ВСТУП

Запропонований навчальний посібник «Основи теорії стійкості» розроблений згідно з програмою курсу «Основи теорії стійкості» та відповідає навчальному плану підготовки магістрів за спеціальністю «Математика (за напрямами)».

Курс «Основи теорії стійкості» є необхідною складовою частиною вивчення спеціальних курсів студента магістратури математичного факультету. Він дає можливість закріпити і поглибити знання з основних і спеціальних розділів математичного аналізу, диференціальних рівнянь, а також навчитися їх застосувати при розв'язанні задач. Курс розрахований на студентів магістратури математичного факультету спеціальності «Математика (за напрямами)».

Метою курсу є систематизація і поглиблення студентами теоретичних відомостей та практичних вмінь з основних і спеціальних розділів математичного аналізу, курсу диференціальних рівнянь, а також на прикладі математичних понять і методів, що вивчаються в курсі, показати суть наукового методу, навчити прийомам дослідження та розв'язання математично формалізованих задач, що, в свою чергу, дає можливість аналізувати та моделювати устрої, процеси та явища в галузях майбутньої діяльності студентів як фахівців.

Основним завданням курсу є навчання студентів вільно користуватися поняттями та методами дослідження систем диференціальних рівнянь на стійкість.

У результаті вивчення матеріалу студент **повинен:**

ЗНАТИ:

– основні поняття про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь;

– поняття точки спокою, стійкості за Ляпуновим, асимптотичної стійкості, стійкості в цілому, стійкості за Лагранжем;

– теореми Ляпунова, Четаєва для дослідження стійкості нульового розв'язку диференціальних рівнянь;

– критерії та умови стійкості Рауса – Гурвіца, Льєнара – Шипара для дослідження стійкості нульового розв'язку диференціальних рівнянь;

– геометричний критерій Михайлова для дослідження стійкості нульового розв'язку диференціальних рівнянь;

– поняття *D*-розбиття;

– основні поняття та методи розв'язання та дослідження на стійкість різницевих рівнянь,

ВМІТИ:

– визначати тип точки спокою;

– досліджувати нульовий розв'язок на стійкість за Ляпуновим, асимптотичну стійкість, стійкість в цілому, стійкість за Лагранжем;

– застосовувати теореми Ляпунова, Четаєва для дослідження стійкості нульового розв’язку диференціальних рівнянь;

– застосовувати критерії та умови стійкості Рауса-Гурвіца, Льєнара-Шипара для дослідження стійкості нульового розв’язку диференціальних рівнянь;

– застосовувати геометричний критерій Михайлова для дослідження стійкості нульового розв’язку диференціальних рівнянь;

– будувати D-розбиття;

– розв’язувати деякі види різницевих рівнянь;

– застосовувати критерії та умови стійкості Рауса-Гурвіца, Льєнара-Шипара для дослідження стійкості різницевого рівняння.

1 СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

Нехай маємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.1}$$

де $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $\left(i,k = \overline{1,n}\right)$ існують і неперервні, і нехай $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ є розв'язком цієї системи, що задовольняє при $t = t_0$ умовам $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ системи (1.1) називається ***стійким за Ляпуновим*** при $t \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна підібрати $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $y_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ тієї ж системи (1.1), початкові значення якого задовольняють нерівностям

$$\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta(\varepsilon) \qquad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

для всіх $t \ge t_0$, мають місце нерівності

$$\left| y_i(t) - \varphi_i(t) \right| < \varepsilon \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.2}$$

тобто близькі за початковим значенням розв'язки залишаються близькими для всіх $t \ge t_0$.

Якщо при як завгодно малому $\delta > 0$ хоча б для одного розв'язку $y_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ нерівності (1.2) не виконуються, то розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ називається ***нестійким***.

Якщо розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ не тільки стійкий, але, крім того, задовольняє умовам

$$\lim_{t \to \infty} \left| y_i(t) - \varphi_i(t) \right| = 0 \qquad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.3}$$

якщо $\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, то розв'язок $\varphi_i(t)$ називається ***асимптотично стійким***.

Питання про стійкість розв'язку $\varphi_i(t)$ системи (1.1) може бути зведене до питання про стійкість тривіального (нульового) розв'язку $x_i(t) \equiv 0$ деякої нової системи рівнянь. Вказаний тривіальний розв'язок будемо називати ***точкою спокою***, розташованою в початку координат.

Тривіальний розв'язок отримується із (1.1) лінійною заміною шуканих функцій

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \qquad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.4}$$

де $x_i(t)$ – нові невідомі функції, які дорівнюють відхиленням колишніх невідомих функцій $y_i(t)$ від функцій $\varphi_i(t)$, що визначають досліджуваний розв'язок.

Отже, надалі будемо вважати, що на стійкість досліджується саме нульовий розв'язок $x_i(t) \equiv 0$ або, що те ж саме, розташована в початку координат точка спокою системи рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{1.5}$$

У застосуванні до точки спокою $x_i(t) \equiv 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ умова стійкості виглядає так: *точка спокою* $x_i(t) \equiv 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ *системи (1.5) є стійкою за Ляпуновим, якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *можна підібрати* $\delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що з нерівності* $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ *випливає* $|x_i(t)| < \varepsilon$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ *при всіх* $t \geq t_0$.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,\ y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,\ y). \end{cases} \tag{1.6}$$

Точка $(x_0,\ y_0)$ називається ***точкою спокою*** системи (1.6), якщо $P(x_0,\ y_0) = 0$, $Q(x_0,\ y_0) = 0$.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.7}$$

де a_{ij} $(i,\ j = 1{,}2)$ – постійні. Точка (0, 0) є точкою спокою системи (1.7). Дослідимо розташування траєкторій системи (1.7) в околі цієї точки. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{kt},\ y = \alpha_2 e^{kt}. \tag{1.8}$$

Для визначення *k* одержуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{1.9}$$

Розглянемо можливі випадки.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні й різні, тоді

1) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол);

2) $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол);

3) $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою нестійка (сідло);

4) $k_1 = 0$, $k_2 > 0$. Точка спокою нестійка;

5) $k_1 = 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою стійка, але не асимптотично.

II. Корені характеристичного рівняння комплексні: $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$, тоді

1) $p < 0$, $q \neq 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий фокус);

2) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий фокус);

3) $p = 0$, $q \neq 0$. Точка спокою стійка (центр). Асимптотичної стійкості немає.

III. Корені кратні: $k_1 = k_2$, тоді

1) $k_1 = k_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол);

2) $k_1 = k_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол);

3) $k_1 = k_2 = 0$. Точка спокою нестійка. Можливий винятковий випадок, коли всі точки площини є стійкими точками спокою.

Для системи лінійних однорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1.10}$$

характеристичним рівнянням буде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{1.11}$$

1) Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (1.11) системи (1.10) від'ємні, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ асимптотично стійка.

2) Якщо, дійсна частина хоча б одного кореня характеристичного рівняння (1.11) додатна, $\operatorname{Re} k_i > 0$, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ системи (1.10) нестійка.

3) Якщо характеристичне рівняння (1.11) має прості корені з нульовою дійсною частиною (тобто нульові або чисто уявні корені), то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ системи (1.10) стійка, але не асимптотично.

Для системи двох лінійних рівнянь із постійними дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{1.12}$$

характеристичне рівняння (1.9) зводиться до квадратного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

1) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок системи (1.12) асимптотично стійкий.

2) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, або $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

3) У всіх інших випадках нульовий розв'язок нестійкий; однак при $a_1 = a_2 = 0$ можливий винятковий випадок, коли нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Доведіть, що кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{1.13}$$

стійкий.

Доведення. Дійсно, розв'язок $x_1(t)$ цього рівняння, що задовольняє початковій умові, має вигляд $x_1(t_0) = x_1^0$ $x_1(t) \equiv x_1^0 = const$.

Розглянемо інший розв'язок $x_2(t)$ рівняння (1.13), що задовольняє початковій умові

$$x_2(t_0) = x_2^0. \tag{1.14}$$

Для цих розв'язків маємо $|x_2(t) - x_1(t)| = \left| x_2^0 - x_1^0 \right|$ для всіх *t*. Отже, для всякого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що як тільки $\left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \delta$, то для розв'язків $x_2(t)$ і $x_1(t)$ буде виконуватися нерівність

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \varepsilon \text{ при всіх } t \geq t_0.$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (1.13) є стійким. Однак асимптотичної стійкості немає:

$$\lim_{t \to \infty} | x_2(t) - x_1(t) | = \lim_{t \to \infty} \left| x_2^0 - x_1^0 \right| \neq 0.$$

Приклад 2 Доведіть, що кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1.15}$$

є асимптотично стійким.

Доведення. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$x(t) = Ce^{-t}. \tag{1.16}$$

Розв'язки $x_2(t)$, $x_1(t)$ рівняння (1.15), що задовольняють початковим умовам $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, будуть

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \; x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}.$$

Отже, для всякого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що як тільки $\left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \delta$, тоді $| x_2(t) - x_1(t) | = \left| x_2^0 - x_1^0 \right| e^{-(t-t_0)} \leq \left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \delta = \varepsilon$ і

$$\lim_{t \to \infty} | x_2(t) - x_1(t) | = \lim_{t \to \infty} \left| x_2^0 - x_1^0 \right| e^{-(t-t_0)} = 0,$$

що означає асимптотичну стійкість будь-якого розв'язку рівняння (1.15).

Приклад 3 Дослідити на стійкість розв'язки $x(t) \equiv -1$ і $x(t) \equiv 1$ рівняння $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$.

Розв'язання.

$$\frac{dx}{1 - x^2(t)} = dt,$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = t + c,$$

$$\frac{1+x}{1-x}=Ae^{2t},$$

$$x(t)=\frac{Ae^{2t}-1}{Ae^{2t}+1},$$

$$x_0(t)=\frac{Ae^{2t_0}-1}{Ae^{2t_0}+1}, \text{ звідки } A=\frac{x_0+1}{e^{2t_0}(1-x_0)}.$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$x(t)=\frac{(1+x_0)e^{2(t-t_0)}-(1-x_0)}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)}+(1-x_0)}.$$

Розв'язок $x(t)\equiv -1$ рівняння нестійкий, тому що

$$\lim_{t\to\infty}\bar{x}(t)=1,\ |x_2(t)-x_1(t)|=2=\varepsilon.$$

Розв'язок $x(t)\equiv 1$ цього рівняння згідно з визначенням асимптотично стійкий:

$$|1-\bar{x}_0|<\delta,$$

$$|\bar{x}(t)-1|=\left|\frac{-1+\bar{x}_0-1+\bar{x}_0}{(1+\bar{x}_0)e^{2(t-t_0)}+(1-\bar{x}_0)}\right|=\left|\frac{2(1-\bar{x}_0)}{(1+\bar{x}_0)e^{2(t-t_0)}+(1-\bar{x}_0)}\right|\le$$

$$\le\{1-\delta<\bar{x}_0<1+\delta\}\le\frac{|2(1-\bar{x}_0)|}{\left|(1+\bar{x}_0)e^{2(t-t_0)}\right|-|(1-\bar{x}_0)|}<\frac{2\delta}{1-\delta}<\varepsilon.$$

Оберемо δ. Для визначеності без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що $\delta<1$. Тоді з нерівності $\frac{2\delta}{1-\delta}<\varepsilon$ отримуємо, що $\delta<\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, а отже

$$\begin{cases}\delta<1,\\ \delta<\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow\delta=\frac{1}{2}\min\left\{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon};1\right\} \text{ і } \lim_{t\to\infty}|x(t)-\bar{x}(t)|=0.$$

Приклад 4 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-5y-6x,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=0.$$

Розв'язання.

$$\ddot{x}=\dot{y},$$

$$\ddot{x}=-5\dot{x}-6x,$$

$$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=0,$$

$$\lambda_1=-3,\qquad \lambda_2=-2,$$

$$\begin{cases}x(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-2t},\\ y(t)=\dfrac{dx}{dt}=-3c_1e^{-3t}-2c_2e^{-2t},\end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0)=c_1+c_2=0, \\ y(0)=-3c_1-2c_2=0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Нехай

$$\begin{cases} x(0)=x_0, \\ y(0)=y_0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} c_1+c_2=x_0, \\ -3c_1-2c_2=y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1=-2x_0-y_0, \\ c_2=3x_0+y_0. \end{cases}$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x(t)=-(2x_0+y_0)e^{-3t}+(3x_0+y_0)e^{-2t}, \\ y(t)=3(2x_0+y_0)e^{-3t}-2(3x_0+y_0)e^{-2t}. \end{cases}$$

Нехай $|\bar{x}_0-x_0|=|\bar{x}_0-0|<\delta$ і $|\bar{y}_0-y_0|=|\bar{y}_0-0|<\delta$. Розглянемо

$$|\bar{x}(t)-x(t)|=|\bar{x}(t)-0|\leq|2\bar{x}_0+\bar{y}_0|+|3\bar{x}_0+\bar{y}_0|\leq 5|\bar{x}_0|+2|\bar{y}_0|\leq 7\delta<\varepsilon,$$

$$|\bar{y}(t)-y(t)|=|\bar{y}(t)-0|\leq|6\bar{x}_0+3\bar{y}_0|+|6\bar{x}_0+2\bar{y}_0|\leq 12|\bar{x}_0|+5|\bar{y}_0|\leq 17\delta<\varepsilon;$$

$$\begin{cases} \delta<\dfrac{\varepsilon}{7}, \\ \delta<\dfrac{\varepsilon}{17} \end{cases} \Rightarrow \delta<\frac{\varepsilon}{17}, \text{ наприклад } \delta=\frac{\varepsilon}{34}.$$

Асимптотична стійкість:

$$\lim_{t\to\infty}|\bar{x}(t)-x(t)|=0,$$
$$\lim_{t\to\infty}|\bar{y}(t)-y(t)|=0.$$

Отже, маємо асимптотичну стійкість.

Приклад 5 Встановити характер точки спокою (0, 0) системи

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x. \end{cases}$$

Розв'язання. У цьому випадку $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=-1$, $a_{22}=0$. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix}=0 \text{ або } k^2+1=0.$$

Корені характеристичного рівняння $k_{1,2}=\pm i$ – чисто уявні. Точка спокою стійка (центр).

Приклад 6 Визначити значення параметра α, при якому буде стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=(\alpha-1)x-\alpha y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння для даної системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha-1 & -\alpha-k \end{vmatrix}=0$$

або $k^2+\alpha k+1-\alpha=0$. Тут $a_1=\alpha$, $a_2=1-\alpha$.

Асимптотична стійкість нульового розв'язку буде мати місце при $\alpha>0$, $1-\alpha>0$, тобто при $0<\alpha<1$.

Стійкість, але не асимптотична, буде у двох випадках:

а) $\alpha>0$, $1-\alpha=0$, тобто при $\alpha=1$;

б) $\alpha=0$, $1-\alpha>0$, тобто при $\alpha=0$.

При всіх інших значеннях α нульовий розв'язок нестійкий.

Приклад 7 У площині параметрів α і β знайти області, в яких нульовий розв'язок системи рівнянь стійкий:

$$\begin{cases} \dot{x}=\alpha x+(\beta-2\alpha\beta-1)y, \\ \dot{y}=x-\beta y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} \alpha-k & \beta-2\alpha\beta-1 \\ 1 & -\beta-k \end{vmatrix}=0$$

або $k^2+(\beta-\alpha)k+1+\alpha\beta-\beta=0$. Тут $a_1=\beta-\alpha$, $a_2=1+\alpha\beta-\beta$. a_1 і a_2 є неперервними функціями від α і β, тому знаки a_1 й a_2 будуть змінюватися там, де $a_1=a_2=0$, тобто на прямій $\beta-\alpha=0$ і на гіперболі $1+\alpha\beta-\beta=0$. Ці лінії розбивають площину параметрів α, β на чотири області I, II, III, IV (рис. 1.1), у кожній з яких знаки a_1 й a_2 постійні. Візьмемо по одній довільній точці в кожній області й визначимо в цих точках знаки коефіцієнтів a_1 і a_2.

Область I: у точці (–1; 1) маємо $a_1=2>0$, $a_2=-1<0$. Нульовий розв'язок системи в цій області нестійкий.

Область II: у точці (0; 0,5), маємо $a_1=0{,}5>0$, $a_2=0{,}5>0$. Нульовий розв'язок системи в області II асимптотично стійкий.

Область III: у точці (1,0) маємо $a_1=-1<0$, $a_2=1>0$. Нульовий розв'язок в області III нестійкий.

Область IV: у точці (2; –2) маємо $a_1=-4<0$, $a_2=-1<0$. Нульовий розв'язок у цій області нестійкий.

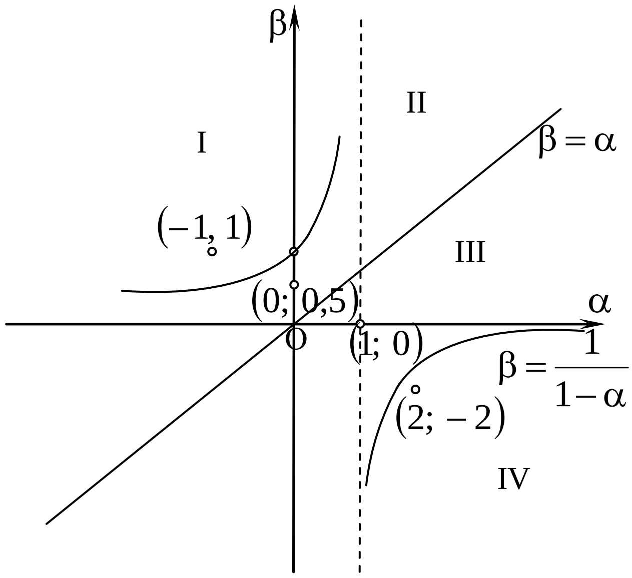


Рисунок 1.1

Досліджуємо на стійкість нульовий розв'язок на границях розглянутих вище областей.

1) $\beta=\dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha<1$ (границя між областями I і II). На цій границі $a_1>0$,

$a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично;

2) $\beta = \alpha$ (границя між областями II і III). На цій границі $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично.

3) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (границя між областями III і IV). На цій границі $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий.

Отже, нульовий розв'язок асимптотично стійкий в області II і стійкий, але не асимптотично, на границі області II.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Користуючись визначенням, дослідити на стійкість розв'язки наступних рівнянь і систем:

№ 1.1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 0,\ x(0) = 1.$

№ 1.2. $\dfrac{dx}{dt} = -t(x-1),\ x(0) = 1.$

№ 1.3. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t,\ x\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}.$

№ 1.4. $\dfrac{dx}{dt} = 2xt,\ x(0) = 0.$

№ 1.5. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t,\ x(0) = 1.$

№ 1.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases},\ x(0) = y(0) = 0.$

№ 1.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases},\ x(0) = y(0) = 0.$

Встановити характер точки спокою (0; 0) у наступних системах:

№ 1.8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

№ 1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

№ 1.10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

№ 1.11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$

№ 1.12. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

№ 1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

№ 1.14. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

№ 1.15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + y. \end{cases}$

№ 1.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$ **№ 1.17.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

Визначити значення параметра α, при яких нульові розв'язки наступних систем стійкі:

№ 1.18. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$ **№ 1.19.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

№ 1.20. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$ **№ 1.21.** $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

№ 1.22. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

Для наступних систем у площині параметрів α і β знайти області, у яких нульовий розв'язок стійкий:

№ 1.23. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases}$ **№ 1.24.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$

№ 1.25. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$ **№ 1.26.** $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$

№ 1.27. $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$ **№ 1.28.** $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$

2 ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***додатно визначеною*** в H-околі $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H\right)$ початку координат, якщо вона додатна у всіх точках цього околу, за винятком початку координат, де вона дорівнює нулю:

$$v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \text{, якщо } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,\ v(0, 0, ..., 0) = 0.$$

Наприклад, функція $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ буде додатно визначеною функцією в просторі змінних x_1, x_2, x_3. Функція $u = x_1^2 + x_2^2$ буде лише знакопостійною у цьому просторі, але не додатно визначеною, тому що вона обертається в нуль на всій осі Ox_3, а не тільки в точці (0, 0, 0), і вона ж буде додатно визначеною в просторі x_1, x_2.

Якщо $v(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ й $v(0, 0, ..., 0) = 0$, то функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***від'ємно визначеною***.

Функція $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***додатно визначеною*** *в H-околі початку координат при* $t \ge t_0$, якщо існує така незалежна від t визначено додатна функція $w(x_1, x_2, ..., x_n)$, що $v(t, x_1, x_2, ..., x_n) \ge w(x_1, x_2, ..., x_n)$ при всіх зазначених значеннях аргументів і $v(t, 0, ..., 0) = 0$.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{2.1}$$

і нехай $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ є неперервно диференційовна функція своїх аргументів. Повна похідна по t функції $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, обчислена в силу системи (2.1) (уздовж інтегральних кривих), дорівнює

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n). \tag{2.2}$$

Якщо праві частини системи (2.1) не містять явно t, то така система називається ***автономною*** або ***стаціонарною***.

I. *Теорема О.М. Ляпунова про стійкість*. Якщо система диференціальних рівнянь (2.1) така, що існує функція $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, додатно визначена при $t \ge t_0$ в деякому H-околі початку координат, похідна якої $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи (2.1), недодатна, то тривіальний розв'язок системи (2.1) стійкий.

II. *Теорема О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість (випадок автономних систем)*. Якщо автономна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2.3}$$

така, що існує функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, *додатно визначена* в деякому *H*-околі початку координат, похідна якої $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи (2.3), визначено від'ємна, то тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ асимптотично стійкий.

Функції $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ і $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, що фігурують у наведених вище теоремах, називаються ***функціями Ляпунова***.

Назвемо областю $v > 0$ певну область околу $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$ початку координат простору змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, обмежену поверхнею $v = 0$, в якій функція v приймає додатні значення.

Припустимо, що функція v має наступні властивості:

1) при як завгодно великих значеннях *t* в як завгодно малому околі початку координат існує область $v > 0$;

2) в області $v > 0$ функція v обмежена;

3) в області $v > 0$ похідна $\frac{dv}{dt}$, яка складена в силу системи рівнянь (2.2), визначено додатна.

III. *Теорема М.Г. Четаєва про нестійкість*. Якщо для системи диференціальних рівнянь (2.1) можна знайти функцію, що задовольняє умовам 1)-3), то тривіальний розв'язок цієї системи нестійкий.

Зауваження. Якщо в системі (2.1) всі f_i не залежать явно від *t*, то функцію Ляпунова потрібно шукати як незалежну явно від *t*.

Дуже часто в якості функцій Ляпунова для диференціальних систем беруть квадратичні форми.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дана система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Знайти для цієї системи функцію Ляпунова у вигляді

$$v(x, y) = F_1(x) + F_2(y),$$

де $F_1(x)$, $F_2(y)$ – деякі поки невідомі диференційовні функції.

Розв'язання. Враховуючи , що $v(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$, то будемо мати

$$\dot{v} = F_1'(x)\dot{x} + F_2'(y)\dot{y} = F_1'(x)\left(ax^3 + by\right) - F_2'(y)\left(cx - dy^3\right).$$

Зажадаємо, щоб функція $\dot{v}$ мала такий же вигляд, що й функція $v(x, y)$, тобто щоб вона представлялася у вигляді суми двох функцій: однієї, що залежить тільки від *x*, іншої – тільки від *y*. Для цього необхідно, щоб мала місце тотожність

$$F_1'(x)by - F_2'(y)cx \equiv 0.$$

Розділяючи змінні, одержимо

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)}$$

і, отже, кожен з дробів повинен бути постійною величиною, наприклад, рівною 0,5. Тоді будемо мати

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{by}{F_2'(y)} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$F_1(x) = cx^2, \qquad F_2(y) = by^2,$$

так що

$$v(x,\ y) = cx^2 + by^2.$$

Приклад 2 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x-2y)\left(1-x^2-3y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(x+y)\left(1-x^2-3y^2\right). \end{cases}$$

Розв'язання. Виберемо в якості v функцію $v = x^2 + 2y^2$. Вона є, по-перше, додатно визначеною, а, по-друге, її похідна $\dfrac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(2y-x)\left(1-x^2-3y^2\right) - 4y(x+y)\left(1-x^2-3y^2\right) =$$

$$= -2\left(1-x^2-3y^2\right)\left(x^2+2y^2\right) \le 0$$

при досить малих *x* і *y*.

Ми бачимо, що виконуються всі умови теореми О.М. Ляпунова про стійкість. Отже, тривіальний розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ стійкий.

Приклад 3 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $v = x^2 + y^2$ задовольняє умовам теореми О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість:

1) $v(x,\ y) \ge 0$, $v(0,\ 0) = 0$;

2) $\dfrac{dv}{dt} = 2x\left(-5y-2x^3\right) + 2y\left(5x-3y^3\right) = -\left(4x^4+6y^4\right) \le 0$,

тобто $\dfrac{dv}{dt} < 0$ і $\dfrac{dv}{dt} = 0$ тільки при $x = 0$, $y = 0$, і виходить, є визначено від'ємною функцією. Отже, розв’язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотично стійкий.

Приклад 4 Дослідити на стійкість тривіальний розв’язок автономної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Розв’язання. Виберемо в якості $v(x,\ y)$ функцію

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Тут областю $v > 0$ є, наприклад, область $x > 0$, $y > 0$.

В області $v > 0$ маємо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(x^2 + y\right)^2 + \left(x + y^2\right)^2 > 0.$$

Згідно з теоремою М.Г. Четаєва про нестійкість розв’язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ нестійкий.

Приклад 5 Дослідити на стійкість тривіальний розв’язок автономної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y + x)\left(1 - x^2 - 3y^2\right); \end{cases} \qquad v(x, y) = x^2 + 2y^2.$$

Розв’язання.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\dot{x} + 4y\dot{y} = -2x(x - 2y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right) -$$

$$-4y(y + x)\left(1 - x^2 - 3y^2\right) = -\left(1 - x^2 - 3y^2\right)\left(2x^2 + 4y^2\right) \le 0.$$

Отже, розв’язок стійкий за Ляпуновим.

Приклад 6 Дослідити на стійкість тривіальний розв’язок автономної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Розв’язання.

У якості функції Ляпунова візьмемо $v = x^2 + y^2$. Будемо мати

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\left(-5y - 2x^3\right) + 2y\left(5x - 3y^3\right) = -4x^4 - 6y^4 < 0$$

для будь-якого $x,\ y \ne 0$ і $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(0;\ 0)} = 0$.

Отже, розв’язок асимптотично стійкий.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем:

№ 2.1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \dfrac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases}$

№ 2.2. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$

№ 2.3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{3}x - y - x^2 y - 7y^3. \end{cases}$

№ 2.4. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$

№ 2.5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2 y - \dfrac{1}{2}y^3. \end{cases}$

№ 2.6. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}y - x^2 y - x^4 y^3. \end{cases}$

№ 2.7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - xy^4 - x^3 y^6, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}x^2 y - \dfrac{1}{4}y^3. \end{cases}$

№ 2.8. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2 y^3. \end{cases}$

№ 2.9. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$

№ 2.10. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

№ 2.11. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\dfrac{2}{3}z - 2xyz^2, \end{cases}$ $\left(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2\right).$

№ 2.12. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{3}y - x - \dfrac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{5}{2}y^3. \end{cases}$

3 ДОСЛІДЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{3.1}$$

де f_i – диференційовні в околі початку координат функції, $f_i(t,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0) \equiv 0$.

Дослідимо на стійкість точку спокою $x_i \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ системи (3.1). Представимо систему (3.1) в околі початку координат у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{3.2}$$

де R_i мають порядок вище першого відносно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (тобто фактично розкладемо праві частини (3.1) за формулою Тейлора за степенями x в околі початку координат). Замість точки спокою системи (3.1) дослідимо на стійкість точку спокою лінійної системи

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{3.3}$$

яку називають ***системою рівнянь першого наближення*** або ***лінеаризованою системою*** для системи (3.1).

Виникає питання, чи випливає зі стійкості (нестійкості) точки спокою системи (3.3) стійкість (нестійкість) точки спокою вихідної системи (3.1). Взагалі, строгого зв’язку між системами (3.1) і (3.3) немає.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \tag{3.4}$$

Тут $f(t,\ x) \equiv x^2$. Лінеаризоване рівняння для рівняння (3.4) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{3.5}$$

Розв’язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (3.5) є стійким. Він є й розв’язком вихідного рівняння (3.4), але не є для нього стійким. Насправді, кожний дійсний розв’язок рівняння (3.4) має вигляд

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad x\big|_{t=0} = x_0,$$

й перестає існувати при $t = \dfrac{1}{x_0}$.

Однак за певних умов стійкість (нестійкість) розв’язку системи першого наближення тягне за собою стійкість (нестійкість) розв’язку вихідної системи (3.1).

Обмежимося для простоти випадком, коли коефіцієнти $a_{ij}(t)$ в (3.3) постійні. У цьому випадку говорять, що система (3.2) *стаціонарна в першому наближенні*.

Теорема 3.1 Якщо система рівнянь (3.2) стаціонарна в першому наближенні, усі члени R_i обмежені по t і розкладаються у ряди за степенями $x_1, x_2, ..., x_n$ у деякій області $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$, причому розклади починаються членами не нижче другого порядку, а всі корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системи (3.2) асимптотично стійкий, тобто в цьому випадку можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.

Теорема 3.2 Якщо система рівнянь (3.2) стаціонарна в першому наближенні, усі функції R_i задовольняють умовам теореми 3.1 і хоча б один з коренів характеристичного рівняння (3.6) має додатну дійсну частину, то точка спокою $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системи (3.2) нестійка, тобто й у цьому випадку можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.

Зауваження. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (3.6) недодатні, причому дійсна частина хоча б одного кореня дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі, неможливе (у цьому випадку на стійкість тривіального розв'язку системи (3.2) починають впливати нелінійні члени R_i).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на стійкість точку спокою рівняння коливання маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0. \tag{3.7}$$

Тут x – кут відхилу маятника від вертикалі.

Розв'язання. Рівнянню (3.7) відповідає система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\sin x. \end{cases} \tag{3.8}$$

Точки спокою системи (3.8)

$$x = n\pi \ (n \text{ – ціле}),\ y = 0. \tag{3.9}$$

Дослідимо на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$, що отримуємо з (3.9) при $n = 0$. Використовуючи розвинення

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

запишемо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases} \tag{3.10}$$

характеристичне рівняння якої

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{3.11}$$

Якщо $a > 0$, $b > 0$, то корені рівняння (3.11) мають від’ємні дійсні частини, і, отже, точка спокою $x = 0$, $y = 0$ стійка за першим наближенням.

Дослідимо тепер на стійкість точку (π, 0), що відповідає значенню $n = 1$. Використовуючи розвинення

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} + \ldots$$

і переносячи початок координат у точку $x = \pi$, $y = 0$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay, \end{cases} \tag{3.12}$$

характеристичне рівняння якої

$$k^2 + ak - b = 0. \tag{3.13}$$

При $a > 0$, $b > 0$ корені цього рівняння будуть дійсними й різних знаків. Отже, точка спокою (π, 0) є нестійкою точкою для системи (3.12).

Приклад 2 Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x,\ y), \\ \dot{y} = -x - yf(x,\ y), \end{cases} \tag{3.14}$$

де функція $f(x,\ y)$ розкладається в збіжний степеневий ряд і $f(0,\ 0) = 0$.

Розв’язання. Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{3.15}$$

Точкою спокою системи (3.15) є (0, 0).

Характеристичне рівняння системи (3.15)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \text{ або } k^2 + 1 = 0 \tag{3.16}$$

має чисто уявні корені $k_{1,2} = \pm i$. Точка спокою (0, 0) системи першого наближення (3.15) стійка (центр), тому що дійсні частини коренів характеристичного рівняння (3.16) дорівнюють нулю, то, згідно із зауваженням до теореми 3.2, питання про стійкість точки спокою (0, 0) вимагає додаткового дослідження. Для дослідження на стійкість точки спокою (0, 0) системи (3.14) застосуємо другий метод Ляпунова. Беремо $v(x,\ y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ і знаходимо

$$\frac{dv}{dt} = -\left(x^2 + y^2\right) f(x,\ y).$$

Звідси можна зробити висновки: якщо $f(x,\ y) \geq 0$ в досить малому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) стійка; якщо $f(x,\ y)$ – визначено додатна функція в деякому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) асимптотично стійка; якщо $f(x,\ y) < 0$ в досить малій околиці початку координат, то точка спокою (0, 0) нестійка. Цей приклад ілюструє той факт, що в деяких випадках не можна судити про стійкість точки спокою за першим наближенням.

Приклад 3 Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \tag{3.17}$$

Розв'язання. Нелінійні члени задовольняють умовам теорем 3.1 і 3.2. Дослідимо на стійкість точку спокою системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \tag{3.18}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

має від'ємні корені $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Отже, згідно теореми 3.1, точка спокою $x = 0$, $y = 0$ систем (3.17) і (3.18) асимптотично стійка.

Приклад 4 Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t. \tag{3.19}$$

Розв'язання. Лінеаризоване рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = x. \tag{3.20}$$

Його розв'язок $x(t) = Ce^t$.

Нехай $x(t_0) = \bar{x}_0$, тоді $\bar{x}_0 = Ce^{t_0}$. Звідси $C = \bar{x}_0 e^{-t_0}$, $x = \bar{x}_0 e^{t - t_0}$, $x(t_0) = 0$ і, отже, $x = 0$. Будемо мати

$$\lim_{t \to +\infty} \left| \bar{x} - 0 \right| = \lim_{t \to +\infty} \bar{x}_0 e^{t - t_0} = +\infty.$$

Отже, розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (3.20) нестійкий.

Розглянемо асимптотичну стійкість цього розв'язку:

$$x' - x + x^3 e^t = 0,$$

$$x = uv,\ x' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - uv + u^3 v^3 e^t = 0,$$

$$v(u' - u) + uv' + u^3 v^3 e^t = 0,$$

$$u' = u, \qquad u = e^t,$$

$$e^t v' + e^{3t} v^3 e^t = 0,$$

$$v' = -e^{3t} v^3, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} e^{3t} + C}},$$

$$x = uv = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{2}{3} e^{3t} + C}}$$

і, очевидно, що $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{2}{3} e^{3t} + C}} = 0$. Отже, розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (3.19) є асимптотично стійким.

Приклад 5 Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases} \tag{3.21}$$

Розв'язання. Нелінійні члени задовольняють умовам теорем 3.1 і 3.2. Дослідимо на стійкість точку спокою системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_{1,2} = 0$. Отже, нульовий розв'язок системи першого наближення нестійкий.

Розглянемо асимптотичну стійкість цього розв'язку. У якості функції Ляпунова візьмемо функцію $v = \frac{1}{2} x^4 + y^2$. Вона задовольняє умовам теореми О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість:

1) $v(x, y) \geq 0$, $v(0, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2x^3\left(y - xy^2\right) + 2y\left(-x^3\right) = 2x^3 y - 2x^4 y^2 - 2x^3 y = -2x^4 y^2 \leq 0$, тобто $\frac{dv}{dt} < 0$ і $\frac{dv}{dt} = 0$ тільки при $x = 0$, $y = 0$, і виходить, є визначено від'ємною функцією. Отже, розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системи (3.21) асимптотично стійкий.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x = 0$, $y = 0$ у наступних системах:

№ 3.1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$

№ 3.2. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{4}x - 2y - \dfrac{1}{6}y^3. \end{cases}$

№ 3.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$

№ 3.4. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

№ 3.5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$

№ 3.6. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$

№ 3.7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2x - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

№ 3.8. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \dfrac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$

№ 3.9. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$

№ 3.10. $\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2. \end{cases}$

№ 3.11. Дослідити на стійкість точки спокою маятника, до якого прикладений обертаючий момент L:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = L, \text{ де } |L| < b.$$

4 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ У ЦІЛОМУ. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛАГРАНЖЕМ

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\, x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n),\;\; f_i(t,\, 0,\, 0,\, ...,\, 0) \equiv 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, ...,\, n), \tag{4.1}$$

і нехай ця система визначена в півпросторі

$$\Omega: \left\{ a < t < +\infty,\;\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < +\infty \right\}.$$

Говорять, що тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0$ $(i = 1,\, 2,\, ...,\, n)$ системи (4.1) ***асимптотично стійкий в цілому*** або має ***повну асимптотичну стійкість***, якщо він

1) асимптотично стійкий за Ляпуновим;

2) будь-який інший розв'язок $x_i(t)$ $(i = 1,\, 2,\, ...,\, n)$ системи (4.1) має властивість

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, ...,\, n).$$

Аналогічно визначається асимптотична стійкість у цілому нетривіального розв'язку системи (4.1).

Обмежимося автономними системами, тобто такими, праві частини яких не залежать явно від змінної t:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n),\;\; f_i(0,\, 0,\, ...,\, 0) \equiv 0 \quad (i = 1,\, 2,\, ...,\, n). \tag{4.2}$$

Функцію Ляпунова $v(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ назвемо ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого додатного числа M існує додатне число R таке, що поза сферою $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ має місце нерівність $v > M$.

Теорема 4.1 (про асимптотичну стійкість в цілому). Якщо існує нескінченно велика додатно визначена функція $v(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ така, що $\frac{dv}{dt} < 0$ поза E і $\frac{dv}{dt} \geq 0$ на E, де E – це множина, яка не містить цілих траєкторій (крім нульового положення рівноваги), то тривіальний розв'язок системи (4.2) буде асимптотично стійкий в цілому.

Може виявитися, що система (4.2) не має стійкість, але проте для неї може існувати область асимптотичної стійкості.

Під ***областю асимптотичної стійкості*** системи (4.2) розуміється область, що містить початок координат O і має властивість: всі траєкторії, що починаються в цій області, прагнуть при $t \to \infty$ до початку координат.

У лінійних системах завжди буває тільки повна стійкість, тоді як у нелінійних системах вона може не бути такою.

Теорема 4.2 Нехай $v(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ – функція, що має неперервні частинні похідні першого порядку для всіх x_i. Позначимо через Ω_l множину всіх точок, де $v(x_1, x_2, ..., x_n) < l$. Якщо множина Ω_l обмежена та в ній

1) $v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ при $x_i \neq 0$,

2) $\dot{v}(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ при $x_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$,

то початок координат – асимптотично стійке положення рівноваги системи (4.2), а Ω_i – область асимптотичної стійкості.

Стійкість за Лагранжем. Нехай маємо систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.3}$$

де $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ задовольняють умовам теореми існування й єдиності розв'язку системи (4.3) для всіх $t \in [t_0, +\infty)$ і будь-яких $x_1, x_2, ..., x_n$.

Система (4.3) називається ***стійкою за Лагранжем***, якщо всі розв'язки цієї системи визначені й обмежені на $[t_0, +\infty)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на асимптотичну стійкість в цілому нульовий розв'язок рівняння

$$\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0. \tag{4.4}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння (4.4) у вигляді еквівалентної йому системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - x^2 y. \end{cases}$$

У якості функції Ляпунова $v(x, y)$ виберемо функцію

$$v(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Маємо

$$\frac{dv}{dt} = y\dot{y} + x^3\dot{x} = -x^3 y - x^2 y^2 + x^3 y = -x^2 y^2.$$

Очевидно, що $v(x, y) \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$. Далі, $\dot{v}(x, y)$ обертається в нуль тільки на осях координат (множина *E*). Очевидно, що жодний розв'язок, за винятком точки спокою на початку координат, не залишається на цих осях при всіх $t \geq 0$. Насправді, у всіх точках осі *OY*, відмінних від початку координат *O*, кутовий коефіцієнт

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - x^2 y}{y}$$

має скінчене значення, а тому на цій осі не може лежати дуга траєкторії. З іншого боку, при підході до осі *Ox* кутовий коефіцієнт $\frac{dy}{dx} \to \infty \neq 0$ і тому на осі *Ox* не можуть перебувати дуги траєкторій. Отже, множина *E* не містить цілих траєкторій (крім початку координат).

У силу теореми 4.1 точка спокою (0, 0) має асимптотичну стійкість в цілому.

Приклад 2 Вказати область асимптотичної стійкості рівняння

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0 \qquad (\varepsilon < 0)$$

(рівняння Ван-дер-Поля).

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Єдина точка спокою – початок координат. Виберемо $v(x,\ y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$. Тоді $\dot{v}(x,\ y) = y\dot{y} + x\dot{x} = -\varepsilon x^2\left(\dfrac{x^2}{3} - 1\right)$. Очевидно, $\dot{v} \le 0$ при $x^2 \le 3$ $(\varepsilon < 0)$. Таким чином, в крузі $x^2 + y^2 < 3$ маємо: $v > 0$ при $x^2 + y^2 \ne 0$ і $\dot{v} < 0$ при $x^2 + y^2 \ne 0$, тобто цей круг міститься в області асимптотичної стійкості.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на асимптотичну стійкість в цілому нульові розв'язки рівнянь:

№ 4.1. $\ddot{x} + \dot{x}^3 + \left(\dot{x}^2 + 1\right)x = 0$.

№ 4.2. $\ddot{x} + \dot{x} + \left(\dot{x}^2 + \dot{x} + 2\right)\left(2x + x^5\right) = 0$.

№ 4.3. $\ddot{x} + x^2 e^{-x}\dot{x} + x^3 + 2x = 0$.

№ 4.4. Показати, що всі розв'язки рівняння $\ddot{x}(t) + \left(a^2 + \dfrac{1}{1+t^2}\right)x(t) = 0$ обмежені на $[1,\ +\infty)$.

№ 4.5. Показати, що всі розв'язки рівняння $\ddot{x}(t) + \left(1 + e^{-t^2} - \dfrac{1}{t+2}\right)x(t) = 0$ обмежені на $[1,\ +\infty)$.

№ 4.6. На прикладі рівнянь

а) $\ddot{x}(t) - \dfrac{2}{t}\dot{x}(t) + x(t) = 0$;

б) $\ddot{x}(t) + \dfrac{2}{t}\dot{x}(t) + x(t) = 0$

показати, що з обмеженості всіх розв'язків «граничного» рівняння $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ не випливає обмеженості розв'язків вихідного рівняння.

5 КРИТЕРІЙ РАУСА-ГУРВІЦА

Велике практичне значення мають необхідні й достатні умови того, щоб всі корені алгебраїчного рівняння з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (5.1)$$

мали від'ємні дійсні частини.

Припустимо, що $a_0 > 0$. Додатність всіх коефіцієнтів – необхідна, але не достатня умова для того, щоб всі корені рівняння (5.1) були розташовані ліворуч від уявної осі (у випадку рівнянь 1-го та 2-го степеня ця умова й достатня). Необхідні й достатні умови від'ємності дійсних частин коренів рівняння (5.1):

Умови Рауса-Гурвіца. Для того, щоб всі корені рівняння (5.1) мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб були додатними всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}. \qquad (5.2)$$

Многочлен $f(\lambda)$ степеня $n \geq 1$ називають ***стійким многочленом***, якщо всі його корені $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ мають від'ємні дійсні частини: $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$, тобто всі корені стійкого многочлена розташовані в лівій півплощині.

Матриця Гурвіца складається так. По головній діагоналі розташовуються коефіцієнти многочлена (5.1), починаючи з a_1 до a_n. Стовпці складаються по черзі з коефіцієнтів тільки з непарними або тільки з парними індексами, причому в число останніх включається коефіцієнт a_0. Усі відсутні елементи, тобто коефіцієнти з індексами, більшими n або меншими 0, заміняються нулями.

Головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1 = a_1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix}. \qquad (5.3)$$

Таким чином, умова Гурвіца виглядає так:

$$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_n > 0. \qquad (5.4)$$

Помітимо, що $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, тому остання з умов $\Delta_n > 0$ може бути замінена вимогою $a_n > 0$.

Обчислення можна вести так. Спочатку складаємо мінор Δ_n. Потім послідовно обчислюємо мінори Δ_1, Δ_2, Δ_3 і т.д. Якщо зустрівся від'ємний мінор, то система нестійка й подальші обчислення зайві.

Якщо коефіцієнти рівняння (5.1) є числами, то умови (5.4) легко перевіряються. Якщо ж коефіцієнти рівняння (5.1) містять буквені параметри, то обчислення визначників при великих k буде важким.

Можна показати, що у випадку, коли умови (5.4) виконані, то всі коефіцієнти многочлена (5.1) додатні

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0. \tag{5.5}$$

Як відзначалося, умови (5.5) є необхідними, але не достатніми для того, щоб всі корені $f(\lambda)$ розташовувалися в лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Однак при виконанні умов (5.5) нерівності (5.4) уже не є незалежними. Так, наприклад, при $n = 5$ умови Рауса-Гурвіца зводяться до двох нерівностей: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Це дозволило Л'єнару та Шипару встановити інші умови стійкості, у яких число детермінантних нерівностей приблизно вдвічі менше, ніж в умовах (5.4).

Умови Л'єнара-Шипара. Для того щоб многочлен

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{5.6}$$

мав всі корені з від'ємними дійсними частинами, необхідно й достатньо, щоб:

1) всі коефіцієнти многочлена $f(\lambda)$ були додатніми:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0;$$

2) мали місце детермінантні нерівності

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \ldots$$

(тут, як і раніше, Δ_k – визначник Гурвіца k-го порядку).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Тут $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$.

І спосіб.

Виписуємо діагональні мінори Гурвіца

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3 \cdot 14 = 8 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 24 > 0.$$

Таким чином, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Отже, тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння асимптотично стійкий.

II спосіб.

$a_0 = a_1 = 1 > 0$, $a_2 = 7 > 0$, $a_3 = 4 > 0$, $a_4 = 10 > 0$, $a_5 = 3 > 0$, тобто перша умова критерію Л'єнара-Шипара виконана.

Далі,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

тобто виконана й умова 2.

Таким чином, тривіальний розв'язок рівняння асимптотично стійкий.

Приклад 2 При яких значеннях α і β буде стійкий тривіальні розв'язок рівняння

$$y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0?$$

Розв'язання. Тут $a_0 = 1$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2$, $a_3 = \beta$, $a_4 = 1$.

Виписуємо діагональні мінори Гурвіца

$$\Delta_1 = \alpha > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - \beta > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 = -(\alpha + \beta)^2 < 0 \text{ при будь-яких } \alpha \text{ і } \beta$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 < 0.$$

Отже, тривіальний розв'язок рівняння нестійкий при будь-яких α і β.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість тривіальні розв'язки рівнянь:

№ 5.1. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.

№ 5.2. $y^{IV}+2y'''+4y''+2y'+5y=0$.

№ 5.3. $y^{IV}+y'''+3y''+2y'+y=0$.

№ 5.4. $y^{V}+2y^{IV}+3y'''+2y''+y'+y=0$.

При яких значеннях α будуть стійкі тривіальні розв'язки наступних рівнянь

№ 5.5. $y'''+\alpha y''+2y'+y=0$?

№ 5.6. $y^{IV}+2y'''+y''+\alpha y'+3y=0$?

№ 5.7. $y^{IV}+3y'''+\alpha y''+2y'+y=0$?

При яких значеннях α і β будуть стійкі тривіальні розв'язки наступних рівнянь:

№ 5.8. $y'''+\alpha y''+2y'+\beta y=0$?

№ 5.9. $y'''+\alpha y''+\beta y'+3y=0$?

№ 5.10. Який вид мають умови Гурвіца для зворотного рівняння $\lambda^4+p\lambda^3+q\lambda^2+p\lambda+1=0$ (p і q – дійсні)?

6 ГЕОМЕТРИЧНИЙ КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ (КРИТЕРІЙ МИХАЙЛОВА)

Нехай маємо диференціальне рівняння n-го порядку з постійними дійсними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{6.1}$$

Питання про стійкість розв'язку диференціального рівняння (6.1) зводиться до питання про розташування коренів характеристичного рівняння

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{6.2}$$

на комплексній площині. Останнє вирішується за допомогою нижченаведеного критерію Михайлова.

Нехай дано характеристичний многочлен

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{6.3}$$

Підставивши в нього $\lambda = iw$, одержимо

$$f(iw) = u(w) + iv(w), \tag{6.4}$$

де

$$u(w) = a_n - a_{n-2} w^2 + a_{n-4} w^4 - \ldots,$$

$$v(w) = a_{n-1} w - a_{n-3} w^3 + a_{n-5} w^5 - \ldots\ . \tag{6.5}$$

При заданому параметрі w величину $f(iw)$ згідно (6.4) і (6.5) можна зобразити на комплексній площині Ouv у вигляді вектора. Якщо змінювати параметр w в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, то кінець цього вектора опише деяку криву, кожна точка якої відповідає певному значенню w. Отриманий у такий спосіб годограф вектора $f(iw)$ називається ***кривою Михайлова*** для многочлена $f(\lambda)$ (рис. 6.1).

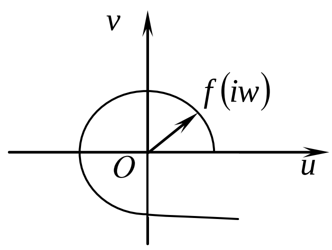


Рисунок 6.1

При зміненні w від $-\infty$ до $+\infty$ вектор $f(iw)$ повернеться на деякий кут φ. Якщо многочлен $f(\lambda)$ має m коренів із додатними дійсними частинами, а інші $n-m$ коренів – із від'ємними, то

$$\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi. \tag{6.6}$$

Зауваження. Так як функція $u(w)$ парна, то крива Михайлова симетрична відносно вісі Ou, і тому достатньо побудувати частину кривої Михайлова, що відповідає зміні параметра w від 0 до $+\infty$. Тоді формула (6.6) буде мати вигляд

$$\varphi = (n-m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n-2m)\frac{\pi}{2}. \tag{6.7}$$

Для стійкості розв'язку рівняння (6.1) необхідно й достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння $f(\lambda) = 0$ мали від'ємні дійсні частини, тобто у формулі (6.7) повинно бути $m = 0$.

Звідси випливає наступне формулювання *критерію Михайлова*: для стійкості тривіального розв'язку рівняння (6.1) необхідно й достатньо, щоб:

1) вектор $f(iw)$ при зміні w від 0 до $+\infty$ здійснив поворот на кут $\varphi = n\dfrac{\pi}{2}$, тобто зробив $\dfrac{n}{4}$ обертів проти годинникової стрілки;

2) годограф $f(iw)$ при зміні w від 0 до $+\infty$ не проходив через нульову точку.

Іншими словами, для стійкості розв'язку рівняння (6.1) необхідно й достатньо, щоб крива Михайлова проходила по черзі n квадрантів проти годинникової стрілки, оточуючи увесь час початок координат.

Почергове проходження квадрантів означає, що крива по черзі перетинає осі координат. Отже, координати $u(w)$ й $v(w)$ точок кривої Михайлова для стійкості розв'язку повинні по черзі приймати нульове значення. Звідси випливає *друге формулювання критерію стійкості Михайлова*: для стійкості розв'язку рівняння (6.1) необхідно (а за умови, що обхід кривої здійснюється проти годинникової стрілки – і достатньо), щоб між будь-якими двома дійсними коренями одного з рівнянь $u(w)=0$, $v(w)=0$ знаходився корінь іншого рівняння.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова:

$$y^{IV} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичний многочлен:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 5.$$

Підставимо в нього $\lambda = iw$, отримаємо

$$f(iw) = w^4 - 2w^2 + 8iw + 5 = w^4 - 2w^2 + 5 + i(8w),$$

$$u(w) = w^4 - 2w^2 + 5,$$

$$v(w) = 8w,$$

$$\begin{cases} w^4 - 2w^2 + 5 = 0, \\ 8w = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} w = \sqrt{1 \pm 2i}, \\ w = 0. \end{cases}$$

Корені рівняння $u(w)=0$ комплексні, причому два корені знаходяться в правій півплощині, тому нульовий розв'язок вихідного рівняння нестійкий (рис. 6.2).

До цього ж висновку можна було прийти, виходячи з критерію Л'єнара-Шипара, оскільки всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні та

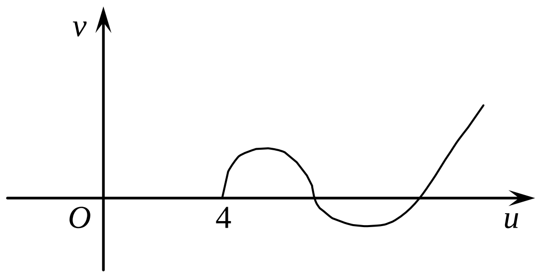


Рисунок 6.2

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

Приклад 2 Дослідити на стійкість нульовий розв’язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова:

$$2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Розв’язання. Складемо характеристичний многочлен:

$$f(\lambda) = 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Підставимо в нього $\lambda = iw$, отримаємо

$$f(iw) = 2w^4 - 4iw^3 - 3w^2 + 3iw + 1 = 2w^4 - 3w^2 + 1 + i\left(-4w^3 + 3w\right),$$

$$u(w) = 2w^4 - 3w^2 + 1,$$

$$v(w) = -4w^3 + 3w,$$

$$\begin{cases} 2w^4 - 3w^2 + 1 = 0, \\ -4w^3 + 3w = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} w = \pm 1,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ w = 0,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

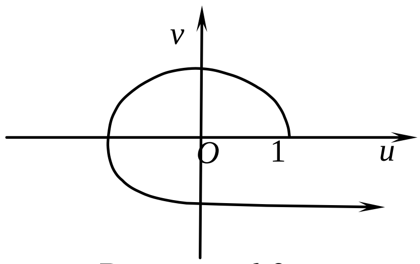


Рисунок 6.3

Будемо змінювати w від 0 до $+\infty$ й побудуємо криву (рис 6.3).

$$\begin{cases} u = u(w), \\ v = v(w), \end{cases}$$

w	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
u	1	0	–	0
v	0	+	0	–

Кут повороту годографа

$$\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}.$$

Звідси, $n - 2m = 4$, $n = 4$, отже, $m = 0$. Таким чином, всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині, тобто нульовий розв’язок даного рівняння асимптотично стійкий.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість нульові розв’язки диференціальних рівнянь:

№ 6.1. $3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

№ 6.2. $y^{V} + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0$.

№ 6.3. $y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$.

№ 6.4. $y^{V}+2y^{IV}+2y'''+46y''+89y'+260y=0$.

№ 6.5. $y^{V}+y^{IV}+7y'''+4y''+10y'+3y=0$.

№ 6.6. $y^{VII}+7y^{VI}+23y^{V}+37y^{IV}+56y'''+36y''+12y'+4y=0$.

№ 6.7. $y^{IV}+3y'''+4y''+3y'+y=0$.

№ 6.8. $y^{IV}+7y'''+18y''+22y'+12y=0$.

№ 6.9. $y^{IV}+2y'''+3y''+2y'+y=0$.

№ 6.10. $y^{IV}+11y'''+59y''+107y'+60y=0$.

№ 6.11. $y^{IV}+5y'''+18y''+53y'+60y=0$.

№ 6.12. $y^{IV}+6y'''+15y''+18y'+10y=0$.

№ 6.13. $y^{IV}+4y'''+10y''+12y'+5y=0$.

№ 6.14. $y'''+6y''+11y'+6y=0$.

№ 6.15. $y^{IV}+7y'''+12y''+23y'+10y=0$.

№ 6.16. $y^{IV}+3y'''+3y''+3y'+2y=0$.

№ 6.17. $y^{IV}+2y'''+4y''+2y'+5y=0$.

№ 6.18. $y^{V}+4y^{IV}+5y'''+2y'+4y=0$.

7 *D*-РОЗБИТТЯ

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння з постійними дійсними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (7.1)$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (7.2)$$

Для з'ясування того факту, чи є стійким розв'язок рівняння (7.1), немає необхідності обчислювати корені характеристичного рівняння. Досить лише встановити, що всі вони лежать у лівій півплощині. Звичайно зустрічаються дві постановки цієї задачі.

Перша. Вважаючи заданими всі коефіцієнти рівняння (7.1), встановити, чи стійкий розв'язок при цих значеннях коефіцієнтів.

Друга. Вважаючи заданими деякі коефіцієнти рівняння (7.1), визначити, при яких значеннях інших коефіцієнтів розв'язок рівняння стійкий.

Побудова областей стійкості

Поняття про D-розбиття. Нехай маємо характеристичне рівняння (7.2). Сукупність значень коефіцієнтів рівняння (7.1) можна розглядати як точку $(n+1)$-вимірного простору R_{n+1}. Кожній точці простору R_{n+1} відповідає певне значення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, а отже, і певне значення всіх коренів $z_1, z_2, \ldots, z_n$ характеристичного рівняння (7.2). Якщо в R_{n+1} існує така область, що кожній її точці відповідає характеристичне рівняння, всі корені якого лежать в лівій півплощині, то ця область називається ***областю стійкості***, а гіперповерхня, що обмежує її, – ***границею області стійкості***. Нехай, наприклад, у характеристичному рівнянні (7.2) всі коефіцієнти, крім двох, без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що це a_1 і a_2, – конкретні числа.

Припустимо, що при деяких певних значеннях a_1 і a_2 дане рівняння в площині коренів (тобто в площині z) має k коренів, що лежать ліворуч, і $(n-k)$ коренів, що лежать праворуч від уявної осі (рис. 7.1).

На площині *A* (площина параметрів a_1 і a_2) існує крива, що обмежує таку область (рис. 7.2), кожна точка якої визначає многочлен, що також має k коренів, що лежать ліворуч, і $(n-k)$ коренів, що лежать праворуч від уявної осі. Цю область позначимо через $D(k,\ n-k),\ k \in Z, 0 \le k \le n$.

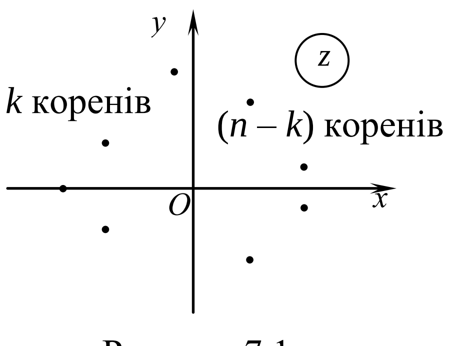


Рисунок 7.1

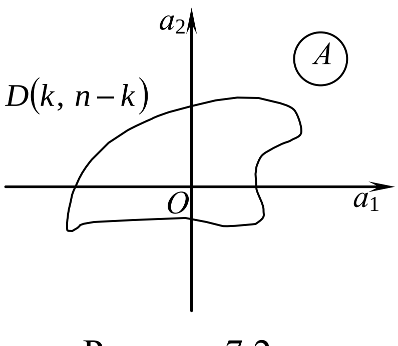


Рисунок 7.2

Наприклад, якщо степінь характеристичне рівняння третій, тобто $n = 3$, то в загальному випадку в просторі коефіцієнтів можуть бути вказані області $D(0;\,3)$, $D(1;\,2)$, $D(2;\,1)$, $D(3;\,0)$. З них область $D(3;\,0)$ і буде областю стійкості.

Зауважимо, що деякі області, зокрема $D(3;\,0)$, можуть бути відсутніми.

Розбиття простору коефіцієнтів характеристичного рівняння на області, що відповідають тому ж самому числу коренів, розташованих у лівій півплощині площини z, називається *D-**розбиттям*** простору коефіцієнтів.

Аналогічно можна побудувати *D*-розбиття простору будь-яких параметрів, від яких можуть залежати коефіцієнти характеристичного рівняння.

Припустимо, що в характеристичному рівнянні (7.2) коефіцієнти залежать від двох параметрів ξ і η (цими параметрами можуть бути, зокрема, просто два коефіцієнти розглянутого рівняння).

Розглянемо сімейство многочленів

$$f(z,\, \xi,\, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z), \tag{7.3}$$

де (ξ, η) – дійсні параметри, а *P, Q, R* – відомі многочлени від z з дійсними коефіцієнтами.

Задача ставиться так: У площині параметрів (ξ, η) (площина *w*) знайти область $D(n;\,0)$ таку, що для будь-якої точки $(\xi,\, \eta) \in D(n,\, 0)$ многочлен (7.3) буде мати всі корені z в лівій півплощині, або переконатися, що такої області немає.

Побудова областей $D(k;\, n-k)$ ґрунтується на наступних міркуваннях:

1) корені алгебраїчного рівняння неперервно залежать від його коефіцієнтів, тобто якщо коефіцієнти многочлена $f(z,\, \xi,\, \eta)$ мало змінити, то й корені його зміняться мало;

2) якщо точка (ξ, η) лежить на границі області $D(k;\, n-k)$, то хоча б один корінь многочлена (7.3) лежить на уявній осі, тобто границя *D*-розбиття є образом уявної осі площини z.

Дійсно, якщо, наприклад, точка $(\xi,\, \eta) \in D(n,\, 0)$, то многочлен (7.3) має при цьому всі корені в лівій півплощині.

Якщо (ξ, η) лежить поза $D(n;\,0)$, то многочлен (7.3) має хоча б один корінь у правій півплощині.

При неперервному русі точки (ξ, η) з області $D(n;\,0)$ в сусідню неперервно змінюються корені многочлена $f(z,\, \xi,\, \eta)$. Так як при цьому з'являється хоча б один корінь у правій півплощині, то в процесі зміни (ξ, η) він повинен перетнути уявну вісь (вісь *Oy*). Це буде, коли точка (ξ, η) перетне границю області $D(n;\,0)$.

Нехай $z = x + iy$ – корінь многочлена $D(n;\,0)$. Рівність $f(z,\, \xi,\, \eta) = 0$ рівносильна рівностям

$$\begin{cases} \xi u_1(x,\, y) + \eta u_2(x,\, y) + u_3(x,\, y) = 0, \\ \xi v_1(x,\, y) + \eta v_2(x,\, y) + v_3(x,\, y) = 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

де u_1, u_2, u_3 і v_1, v_2, v_3 – дійсні та уявні частини многочленів *P, Q* і *R* відповідно.

Якщо визначник системи (7.4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то ця система однозначно розв'язна відносно ξ і η:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\ y), \\ \eta = \eta(x,\ y). \end{cases} \tag{7.5}$$

Рівняння (7.5) у точках, де $\Delta \neq 0$, визначають однозначне відображення площини коренів многочлена $f(z,\ \xi,\ \eta)$ на площину параметрів (ξ, η).

Зворотне відображення неоднозначне: фіксованій парі значень (ξ, η) відповідає, взагалі, n коренів. Якщо визначник системи (7.4) у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ обертається в нуль, то система або несумісна, або одне рівняння є наслідком іншого.

У цьому останньому випадку на площині параметрів w існує ціла пряма, що складається з точок (ξ, η), для яких $z_0 = x_0 + iy_0$ є коренем многочлена $f(z,\ \xi,\ \eta)$. Таку точку $(x_0,\ y_0)$, а також відповідну їй пряму будемо називати *винятковими*.

Знайдемо на площині параметрів (ξ, η) ті точки, для яких многочлен (7.3) має хоча б один чисто уявний корінь $z = iy$.

Геометричне місце таких точок складається з лінії, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$\begin{cases} \xi = \xi(0,\ y), \\ \eta = \eta(0,\ y) \end{cases} \qquad (-\infty < y < +\infty) \tag{7.6}$$

і яку можна одержати, вважаючи $x = 0$ в рівняннях (7.5), а також з виняткових прямих, що відповідають винятковим точкам вісі Oy (якщо такі є).

Помітимо, що рівняння (7.6) дають образ вісі Oy при відображенні (7.5). Це геометричне місце точок будемо називати ***лінією*** L. Ця лінія розбиває площину параметрів на деяке число зв'язних областей.

Кожна з таких областей має таку властивість, що для будь-якої її точки (ξ, η) многочлен $f(z,\ \xi,\ \eta)$ має одне й те саме число коренів, розташованих у лівій півплощині, тобто є областю типу $D(k;\ n-k)$ $(0 \le k \le n)$.

Таким чином, лінія L – границя шуканого D-розбиття.

Розглянемо відображення (7.5) площини коренів на площину параметрів

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\ y), \\ \eta = \eta(x,\ y). \end{cases}$$

Проведемо через точку $(x_0,\ y_0)$ дві лінії: горизонтальну I та вертикальну II. Якщо напрямок повороту від I до II зберігається при відображенні (7.5), то говорять, що відображення зберігає орієнтацію в точці $(x_0,\ y_0)$; інакше – що воно не зберігає орієнтацію (рис. 7.3 і 7.4).

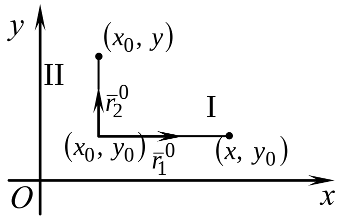


Рисунок 7.3

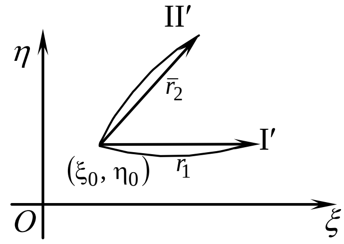


Рисунок 7.4

Якщо визначник

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

у точці (x_0, y_0), то відображення (7.5) у точці (x_0, y_0) зберігає орієнтацію. При $I < 0$ орієнтація порушується. Якщо $I = 0$, то питання про збереження або незбереження орієнтації вирішують старші похідні. Можна показати, що знак визначника I збігається зі знаком визначника Δ, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

тому якщо $\Delta > 0$, то відображення із площини коренів на площину параметрів зберігає орієнтацію, якщо $\Delta < 0$, то орієнтація змінюється.

Розглянемо знову розбиття площини w (площина параметрів) на області $D(k; n-k)$ $(k \le n)$ і позначимо через L границю цих областей. Додатним напрямком на L будемо вважати той, який відповідає зростанню y (починаючи з $y = -\infty$); при цьому крива L може складатися з декількох віток, і при повному обході вісі Oy її ділянки можуть проходитися декілька разів (не більше n, де n – степінь многочлена $f(z, \xi, \eta)$).

Розглянемо деяку ділянку $w_1 w_2$ кривої L і припустимо, що при повному обході вісі Oy вона обходиться r разів, тобто що цій ділянці відповідає r ділянок $y_1^\mu y_2^\mu$ $(\mu = 1, 2, ..., r)$ вісі Oy. Покладемо $\varepsilon_\mu = 1$, якщо напрямок $y_1^\mu y_2^\mu$ збігається з напрямком вісі Oy, і $\varepsilon_\mu = -1$ у протилежному випадку. Покладемо також $\delta_\mu = 1$, якщо на $y_1^\mu y_2^\mu$ визначник $\Delta > 0$, і $\delta_\mu = -1$ в протилежному випадку. Нехай точка w, рухаючись неперервно по деякому досить малому шляху, перетинає дугу $w_1 w_2$ зліва направо (рис. 7.5). Цьому шляху в площині z відповідає r шляхів, що перетинають відрізки $y_1^\mu y_2^\mu$ вісі Oy. Якщо $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$, то відповідний шлях йде з лівої півплощини в праву й многочлен

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z)$$

здобуває на ньому один корінь із додатною дійсною частиною та втрачає корінь із від’ємною дійсною частиною; у випадку

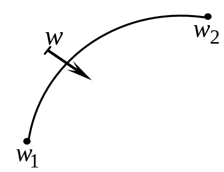


Рисунок 7.5

$\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$ – навпаки.

Дійсно, нехай $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$. Це може бути у двох випадках: 1) $\varepsilon_\mu = 1$, $\delta_\mu = 1$; 2) $\varepsilon_\mu = -1$, $\delta_\mu = -1$. У першому випадку напрямок відрізка вісі Oy збігається з додатним напрямком цієї осі ($\varepsilon_\mu = 1$) і зберігається орієнтація ($\delta_\mu = 1$), тобто якщо в площині w ми переходимо дугу $w_1 w_2$ зліва направо, то й у площині z ми переходимо з лівої півплощини в праву (тобто вісь Oy перетинаємо теж зліва направо, рис. 7.6).

У другому випадку вектор $y_1^\mu y_2^\mu$ спрямований у напрямку, протилежному напрямку вектора $\overrightarrow{Oy}$ ($\varepsilon_\mu = -1$). Так як $\delta_\mu = -1$, то орієнтація в цьому випадку змінюється, і при переході зліва направо у площині w знову одержуємо перехід зліва направо у площині z через вісь Oy. Аналогічно розглядається випадок $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$. Отже, при переході з лівої сторони дуги $w_1 w_2$ кривої L на праву сторону многочлен $f(z, \xi, \eta)$ втрачає

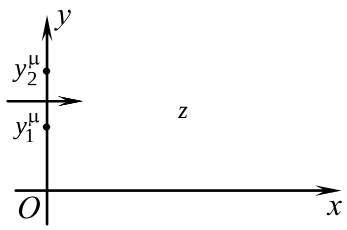


Рисунок 7.6

$$N = \varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 + ... + \varepsilon_r \delta_r$$

коренів із від'ємною дійсною частиною.

Приклад Вишнеградського. Дано многочлен $f(z) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1$. Знайти область $D(3;\, 0)$.

Розв'язання. Покладаючи $z = iy$ і розділяючи дійсну й уявну частини, знайдемо параметричні рівняння кривої L:

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \qquad \eta = y^2.$$

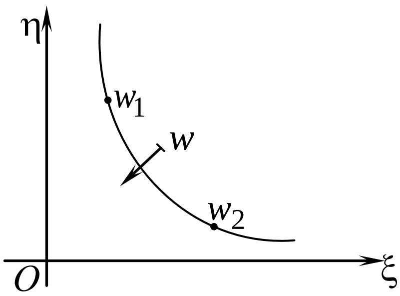


Рисунок 7.7

Це – вітка гіперболи $\xi\eta = 1$, яка лежить в першому квадранті. При повному обході вісі Oy (y змінюється від $-\infty$ до $+\infty$) гіпербола описується два рази, тобто $r = 2$; при цьому один раз гіпербола проходиться в одному напрямку при зміні y від $-\infty$ до 0. При подальшій зміні y від 0 до $+\infty$ гіпербола проходиться другий раз, але вже в протилежному напрямку. Таким чином, відрізку $w_1 w_2$ кривої L відповідають два відрізки вісі Oy: $y_1^1 y_2^1$ і $y_1^2 y_2^2$ (рис. 7.7 і 7.8). Визначник Δ на вісі Oy дорівнює $\Delta = -y^3$. Отже, $\delta_1 = 1$ (так як при $\mu = 1$ $y < 0$), а $\delta_2 = -1$ (так як при $\mu = 2$ $y > 0$). При переході точки w через $w_1 w_2$ зліва направо губиться N коренів із від'ємною частиною, де

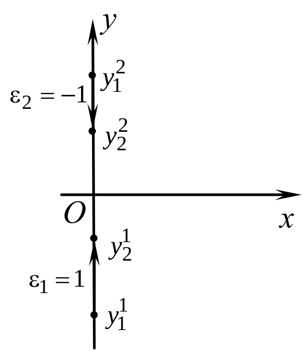


Рисунок 7.8

$$N = \varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 = 2.$$

На початку координат $\xi=\eta=0$ многочлен $f(z)$ приймає вигляд z^3+1 і має корені $z_1=-1$, $z_{2,3}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, отже, область під гіперболою є $D(1;\,2)$. Область над гіперболою є область $D(3;\,0)$. Насправді, при переході із цієї області в $D(1;\,2)$ многочлен $f(z)$ втратив два корені з від'ємною дійсною частиною й перетворився в многочлен, що має один корінь із від'ємною дійсною частиною. Отже, в області над гіперболою було три корені з від'ємною дійсною областю (рис. 7.9). Для перевірки можна взяти точку $\xi=\eta=3$, в якій многочлен приймає вигляд

$$z^3+3z^2+3z+1$$

і має трикратний корінь $z=-1$.

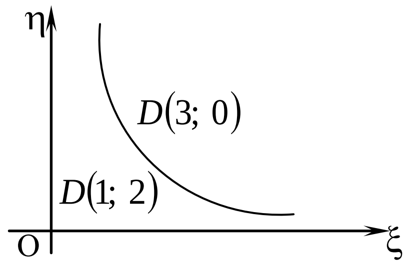


Рисунок 7.9

Таким чином, для побудови D-областей будемо робити так:

1) у многочлені $f(z,\,\xi,\,\eta)$ покладаємо $z=iy$, відокремлюємо дійсну й уявну частини й прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\xi u_1(y)+\eta u_2(y)+u_3(y)=0,\\ \xi v_1(y)+\eta v_2(y)+v_3(y)=0.\end{cases} \tag{7.7}$$

Розв'язуючи (7.7) відносно ξ і η, одержуємо

$$\begin{cases}\xi=\xi(y),\\ \eta=\eta(y)\end{cases}$$

– параметричні рівняння лінії L.

2) Будуємо криву L на площині параметрів, змінюючи y в межах від $-\infty$ до $+\infty$, причому якщо в рівняннях (7.7) ξ – перша змінна, а η – друга, то при побудові кривої L система координат ξOη повинна бути правою.

Якщо при деякому значенні y визначник системи (7.7) і визначники

$$\Delta_\xi=\begin{vmatrix}-u_3 & u_2\\ -v_3 & v_2\end{vmatrix} \text{ і } \Delta_\eta=\begin{vmatrix}u_1 & -u_3\\ v_1 & -v_3\end{vmatrix}$$

обертаються в нуль, то при цьому значенні y одне з рівнянь (7.7) є наслідком іншого, і для цього значення y одержуємо в площині $\xi O\eta$ не точку, а пряму лінію (особлива або виняткова пряма). Її ми також включаємо в границю D-розбиття.

Якщо коефіцієнт при старшому члені характеристичного рівняння залежить від параметрів ξ і η, то, прирівнюючи цей коефіцієнт нулю, одержуємо рівняння ще однієї особливої прямої, що відповідає $y=\infty$.

Якщо, нарешті, визначник системи (7.7) $\Delta\equiv 0$, то границею D-розбиття служать тільки особливі прямі.

3) Виділяємо зв'язні області, на які L розбиває площина параметрів. Це й будуть області $D(k,\,n-k)$ $(0\le k\le n)$.

4) Визначаємо характер цих областей, тобто знаходимо k і $n-k$. Для

цього вибираємо в кожній з областей $D(k,\, n-k)$ по одній точці $(\xi_0,\, \eta_0)$ й досліджуємо отриманий многочлен $f(z,\, \xi_0,\, \eta_0)$ із числовими коефіцієнтами на стійкість за допомогою викладених вище критеріїв стійкості Рауса-Гурвіца або Михайлова.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Побудувати *D*-області для наступного многочлена

$$f(z) = z^3 + (z^2 + 2)\xi + \eta z - 4.$$

Розв'язання. Покладаючи $z = iy$ і розділяючи дійсну й уявну частини, знайдемо параметричні рівняння кривої *L*:

$$f(iy) = -iy^3 + (-y^2 + 2)\xi + i\eta y - 4,$$

$$\operatorname{Re} f = (-y^2 + 2)\xi - 4, \qquad \operatorname{Im} f = -y^3 + \eta y,$$

$$\xi = \frac{4}{2 - y^2}, \ \ \eta = y^2;$$

$$\xi = \frac{4}{2 - \eta}, \quad \eta > 0.$$

Це вітки гіперболи $\xi = \frac{4}{2-\eta}$, які лежать в першій та другій координатних чвертях (оскільки $\eta > 0$) (рис. 7.10).

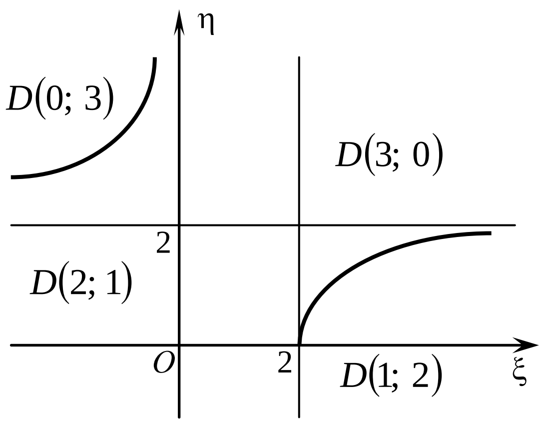


Рисунок 7.10

$$\Delta(iy) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y^2 + 2 & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = y(2 - y^2).$$

Якщо $y \in (-\infty; -\sqrt{2})$, то $\Delta < 0$, отже $\delta_1^{**} = -1$; якщо $y \in (-\sqrt{2};\, 0)$, то $\Delta > 0$, отже $\delta_1^{*} = 1$; якщо $y \in (0;\, \sqrt{2})$, то $\Delta < 0$, отже $\delta_2^{*} = -1$; якщо $y \in (\sqrt{2};\, +\infty)$, то $\Delta > 0$, отже $\delta_2^{**} = 1$.

При переході точки через гіперболу зліва направо (рис. 7.11):

$$N^{*} = \varepsilon_1^{*}\delta_1^{*} + \varepsilon_2^{*}\delta_2^{*} = 2,$$

$$N^{**} = \varepsilon_1^{**}\delta_1^{**} + \varepsilon_2^{**}\delta_2^{**} = -2,$$

отже, губиться 2 корені і здобувається 2 корені з від'ємною дійсною частиною.

y	$-\infty$	$-\sqrt{2}-0$	$-\sqrt{2}+0$	0	$\sqrt{2}-0$	$\sqrt{2}+0$	$+\infty$
ξ	–0	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$	$-\infty$	–0
η	$+\infty$	2+0	2–0	0	2+0	2–0	$+\infty$

$y=0$ – особлива лінія і при цьому $\xi=2$. Розглянемо $\xi=\eta=3$. Многочлен $f(z)$ приймає вигляд $f(z)=(z+1)^3+1$ і має корені $z_1=-2$, $z_{2,3}=\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, отже, область під гіперболою є $D(2;\,1)$. Область над гіперболою є область $D(0;\,3)$. Насправді, при переході із цієї області в $D(2;\,1)$ многочлен $f(z)$ втратив два корені з від'ємною дійсною частиною й перетворився в многочлен, що має один корінь із від'ємною дійсною частиною. При переході з області $D(1;\,2)$ в область $D(3;\,0)$ многочлен $f(z)$ здобув два корені з від'ємною дійсною частиною.

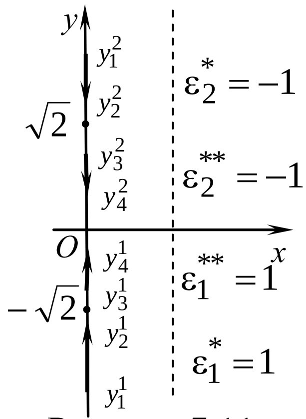


Рисунок 7.11

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Побудувати *D*-області для наступних многочленів:

№ 7.1. $z^3+\xi z^2+\eta z+6$.

№ 7.2. $z^4+\xi z^3+\eta z^2+4z+1$.

№ 7.3. $z^3+\xi z^2+11z+\eta$.

№ 7.4. $z^4+2z^3+\xi z^2+z+\eta$.

№ 7.5. $z^3+3z^2+\xi z+\eta$.

№ 7.6. $z^3+\xi z^2+(z+1)\eta+1$.

№ 7.7. $z^3+\eta z^2+\xi z+6$.

№ 7.8. $z^3+2z^2+(z-1)\xi+\eta$.

№ 7.9. $z^3+\left(z^2+z\right)\xi+z+2\eta$.

№ 7.10. $\xi z^3+3z^2+\eta z+1$.

№ 7.11. $\left(z^3+z^2\right)\xi+\eta\left(z^2+1\right)+2z$.

№ 7.12. $\left(z^3-z\right)\xi+\eta\left(z^2+z-1\right)+1$.

8 СТІЙКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

I. *Розв’язання однорідних лінійних різницевих рівнянь із постійними коефіцієнтами*. Нехай маємо різницеве рівняння порядку *k*:

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=0, \qquad (8.1)$$

де $a_k \neq 0$; $f(n)$ – шукана функція цілочислового аргументу; a_1, a_2, …, a_k – дійсні постійні. Для знаходження нетривіальних (ненульових) розв’язків рівняння (8.1) запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1}+\ldots+a_k=0, \qquad (8.2)$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – корені рівняння (8.2). Можливі наступні випадки:

1) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – дійсні та попарно різні. Загальним розв’язком рівняння (8.1) буде

$$f(n)=C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n+\ldots+C_k\lambda_k^n, \qquad (8.3)$$

де $C_1, C_2, ..., C_k$ – довільні сталі, які можуть бути визначені, якщо задані початкові умови

$$f(0)=f_0, \quad f(1)=f_1, \quad \ldots, \quad f(k-1)=f_{k-1}.$$

2) Корені характеристичного рівняння дійсні, але серед них є кратні. Нехай, наприклад, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_j=\tilde{\lambda}$, тобто $\tilde{\lambda}$ є j-кратним коренем рівняння (8.2), а всі інші $k-j$ корені попарно різні.

Загальним розв’язком рівняння (8.1) буде

$$f(n)=C_1\tilde{\lambda}^n + C_2 n\tilde{\lambda}^n+\ldots+C_j n^{j-1}\tilde{\lambda}^n + C_{j+1}\lambda_{j+1}^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \qquad (8.4)$$

3) Серед коренів характеристичного рівняння (8.2) є прості комплексні корені. Нехай, наприклад, для визначеності

$$\lambda_1=\alpha+i\beta, \qquad \lambda_2=\alpha-i\beta,$$

$$\lambda_3=\gamma+i\delta, \qquad \lambda_4=\gamma-i\delta,$$

інші корені дійсні та різні. Тоді загальний розв’язок (8.1) має вигляд

$$f(n)=C_1|\lambda_1|^n\cos(n\arg\lambda_1)+C_2|\lambda_1|^n\sin(n\arg\lambda_1)+C_3|\lambda_3|^n\cos(n\arg\lambda_3)+$$

$$+C_4|\lambda_3|^n\sin(n\arg\lambda_3)+C_5\lambda_5^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \qquad (8.5)$$

4) У випадку, якщо $\lambda_1=\alpha+i\beta$ є j- кратним коренем рівняння (8.2) $\left(j\le\frac{k}{2}\right)$, то $\lambda_2=\alpha-i\beta$ також буде j- кратним коренем і загальний розв’язок (8.1) має вигляд

$$f(n)=\left(C_1+C_2n+\ldots+C_jn^{j-1}\right)|\lambda_1|^n\cos(n\arg\lambda_1)+$$

$$+\left(C_{j+1}+C_{j+2}n+\ldots+C_{2j}n^{j-1}\right)|\lambda_1|^n\sin(n\arg\lambda_1)+C_{2j+1}\lambda_{2j+1}^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \qquad (8.6)$$

Зауваження. Корінь $\lambda=0$ відповідає тривіальному (нульовому) розв’язку $f(n)\equiv 0$.

II. *Розв’язання неоднорідних лінійних різницевих рівнянь із постійними коефіцієнтами*. Нехай маємо неоднорідне лінійне різницеве рівняння *k*-го порядку

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=g(n) \qquad (8.7)$$

з постійними дійсними коефіцієнтами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$. Загальний розв'язок цього рівняння являє собою суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

1) Нехай права частина $g(n)$ рівняння (8.7) має вигляд

$$g(n)=r^n u(n),$$

де $u(n)$ – многочлен від n степеня m, а r – дійсне число. Якщо r не є коренем характеристичного рівняння (8.2), то частинний розв'язок $\tilde{f}(n)$ шукається у вигляді

$$\tilde{f}(n)=r^n \tilde{u}(n),$$

де $\tilde{u}(n)$ – многочлен степеня m; якщо ж r є j-кратним коренем рівняння (8.2), то $\tilde{u}(n)$ – многочлен степеня $m+j$.

2) Якщо права частина $g(n)$ рівняння має вигляд

$$g(n)=u(n)\sin \alpha n \ \text{ або } \ g(n)=u(n)\cos \alpha n,$$

то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\tilde{f}(n)=\tilde{u}(n)\sin \alpha n+\tilde{\tilde{u}}(n)\cos \alpha n.$$

3) Якщо $g(n)=u(n)\operatorname{sh}\alpha n$ або $g(n)=u(n)\operatorname{ch}\alpha n$, то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\tilde{f}(n)=\tilde{u}(n)\operatorname{sh}\alpha n+\tilde{\tilde{u}}(n)\operatorname{ch}\alpha n.$$

Тут $\tilde{u}(n)$ и $\tilde{\tilde{u}}(n)$ – многочлени, степінь яких визначається за правилом, зазначеному в п. 1).

III. *Стійкість розв'язків різницевих рівнянь*. Розв'язок $f^*(n)$ різницевого рівняння порядку k, що задовольняє початковим умовам

$$f^*(0)=f_0^*,\ f^*(1)=f_1^*,\ \ldots,\ f^*(k-1)=f_{k-1}^*,$$

називається ***стійким***, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для будь-якого розв'язку $f(n)$ рівняння (8.1), що задовольняє початковим умовам

$$f(0)=f_0,\ f(1)=f_1,\ \ldots,\ f(k-1)=f_{k-1},$$

із сукупності нерівностей

$$\left| f_0-f_0^* \right|<\delta,\ \left| f_1-f_1^* \right|<\delta,\ \ldots,\ \left| f_{k-1}-f_{k-1}^* \right|<\delta$$

випливає нерівність $\left| f(n)-f^*(n) \right|<\varepsilon$ при кожному $n\geq 0$.

Якщо при як завгодно малому $\delta(\varepsilon)>0$ нерівність $\left| f(n)-f^*(n) \right|<\varepsilon$ не виконується для деякого розв'язку $f(n)$, то розв'язок $f^*(n)$ називається ***нестійким***.

Якщо крім виконання нерівності $\left| f(n)-f^*(n) \right|<\varepsilon$ виконується також умова

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(n)-f^*(n)\right]=0,$$

то розв'язок $f^*(n)$ називається ***асимптотично стійким***.

Дослідження на стійкість розв'язку $f^*(n)$ неоднорідного лінійного різницевого рівняння

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=g(n)$$

за допомогою заміни $\varphi(n)=f(n)-f^*(n)$ зводиться до дослідження стійкості нульового (тривіального) розв'язку однорідного рівняння

$$\varphi(n+k)+a_1\varphi(n+k-1)+\ldots+a_k\varphi(n)=0.$$

Надалі ми обмежимося дослідженням стійкості тільки тривіальних розв'язків однорідних рівнянь.

Для дослідження на стійкість нульового розв'язку $f(n)\equiv 0$ рівняння (8.1) користуються наступним загальним правилом:

1) якщо всі корені характеристичного рівняння (8.2) за модулем менше одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння (8.1) асимптотично стійкий.

2) Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння за модулем більше одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ нестійкий.

3) Якщо характеристичне рівняння має простий корінь з модулями, рівними одиниці, а інші корені, якщо вони є, за модулем менше одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ стійкий, але не асимптотично.

4) Якщо характеристичне рівняння має хоча б один кратний корінь із модулем, рівним одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ нестійкий.

Зазначене правило зводить питання про стійкість нульового розв'язку рівняння (8.1) до з'ясування того, які модулі мають корені характеристичного рівняння (8.2).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2)+4f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2+4\lambda+1=0.$$

Його корені $\lambda_1=-2-\sqrt{3}$, $\lambda_2=-2+\sqrt{3}$ різні й дійсні; отже,

$$f(n)=C_1\left(-2-\sqrt{3}\right)^n+C_2\left(-2+\sqrt{3}\right)^n.$$

Приклад 2 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \text{ або } (\lambda-1)^3=0.$$

Звідси $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Загальним розв'язком буде

$$f(n)=\left(C_1+C_2n+C_3n^2\right)\cdot 1^n=C_1+C_2n+C_3n^2.$$

Приклад 3 Знайти загальний розв’язок рівняння

$$f(n+2)-2f(n+1)+2f(n)=0.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

має прості комплексні корені

$$\lambda_1=1+i,\ \lambda_2=1-i.$$

Знаходимо

$$|1\pm i|=\sqrt{2}, \qquad \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}.$$

Загальний розв’язок має вигляд

$$f(n)=C_1 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+C_2 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}=2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Приклад 4 Знайти загальний розв’язок рівняння

$$f(n+4)+2f(n+3)+4f(n+2)-2f(n+1)-5f(n)=0.$$

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^4+2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-5=0.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)=0.$$

Коренями цього рівняння будуть

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-1+2i,\ \lambda_4=-1-2i.$$

Тут

$$|-1\pm 2i|=\sqrt{5}, \qquad \arg(-1+2i)=\pi-\operatorname{arctg}2.$$

Загальним розв’язком даного рівняння буде

$$f(n)=C_1+C_2(-1)^n+5^{\frac{n}{2}}\left[C_3\cos n(\pi-\operatorname{arctg}2)+C_4\sin n(\pi-\operatorname{arctg}2)\right]$$

або

$$f(n)=C_1+C_2(-1)^n+(-1)^n 5^{\frac{n}{2}}\left[C_3\cos(n\operatorname{arctg}2)-C_4\sin(n\operatorname{arctg}2)\right].$$

Приклад 5 Знайти загальний розв’язок рівняння

$$f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=2^n(n+1). \tag{8.8}$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2-4\lambda+3=0$ має корені $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2.$$

Так як число 2 не є коренем характеристичного рівняння, та частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{f}(n)=2^n(An+B), \tag{8.9}$$

де A і B – невизначені коефіцієнти. Підставляючи (8.9) в (8.8), одержимо:

$$2^{n+2}(An+2A+B)-4\cdot 2^{n+1}(An+A+B)+3\cdot 2^n(An+B)=2^n(n+1)$$

або
$$4(An+2A+B)-8(An+A+B)+3(An+B)=n+1.$$
Звідси знаходимо
$$4A-8A+3A=1,$$
$$8A+4B-8A-8B+3B=1.$$
Розв'язуючи отриману систему, будемо мати, що $A=-1,\ B=-1$.

Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння запишеться у вигляді:
$$\tilde{f}(n)=-2^n(n+1);$$
загальний розв'язок –
$$f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2-2^n(n+1).$$

Приклад 6 Виходячи з визначення стійкості різницевого рівняння, дослідити на стійкість розв'язок рівняння
$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0, \tag{8.10}$$
який задовольняє початковим умовам $f(0)=0,\ f(1)=0$.

Розв'язання. Розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам $f(0)=0,\ f(1)=0$, є
$$f(n)\equiv 0,$$
тому що з (8.10)
$$f(n+2)=f(n+1)-\frac{1}{2}f(n).$$

Будь-який розв'язок цього рівняння, що задовольняє умовам $f(0)=f_0$, $f(1)=f_1$ має вигляд
$$f^*(n)=\frac{1}{2^{n/2}}\left[f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right].$$

Виберемо довільне $\varepsilon>0$ й покажемо, що існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $|f_0-0|<\delta$ і $|f_1-0|<\delta$ має місце нерівність
$$\left|0-f^*(n)\right|=\frac{1}{2^{n/2}}\left[f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right]<\varepsilon$$
для всіх $n\geq 0$. Це й буде означати згідно з визначенням, що нульовий розв'язок $f^*(n)\equiv 0$ є стійким.

Очевидно, що
$$\frac{f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}}\leq\frac{|f_0|+|f_1-f_0|}{2^{n/2}}\leq$$
$$\leq|f_0|+|f_1-f_0|\leq|f_0|+|f_1|+|f_0|\leq 2(|f_0|+|f_1|)$$
для всіх $n\geq 0$. Тому, якщо $|f_0|+|f_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, то й $\left|0-f^*(n)\right|<\varepsilon$ для всіх $n\geq 0$.

Отже, якщо, наприклад, вибрати $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}$, то при $|f_0|<\delta$ і $|f_1|<\delta$ буде виконуватися нерівність $\left|0-f^*(n)\right|<\varepsilon$ для всіх $n\ge 0$, так що нульовий розв'язок даного рівняння стійкий. Ця стійкість асимптотична, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\left[0-f^*(n)\right]=-\lim_{n\to\infty}\frac{f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}}=0.$$

Приклад 7 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $2\lambda^2-2\lambda+1=0$. Його корені $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm i}{2}$. Маємо

$$\left|\lambda_{1,2}\right|=\left|\frac{1\pm i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Отже, розв'язок $f(n)\equiv 0$ цього рівняння асимптотично стійкий.

Приклад 8 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$f(n+2)-2f(n+1)+5f(n)=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2-2\lambda+5=0$ має корені $\lambda_1=1+2i$, $\lambda_2=1-2i$. Маємо

$$\left|\lambda_1\right|=\left|\lambda_2\right|=\left|1\pm 2i\right|=\sqrt{5}>1.$$

Обидва кореня за модулем більше одиниці, отже, розв'язок $f(n)\equiv 0$ нестійкий.

Відомо, що функція $\lambda=\frac{w+1}{w-1}$ відображає внутрішню частину одиничного кола площини λ на ліву півплощину площини *w*. Коренями характеристичного рівняння (8.2), що лежать усередині одиничного кола $\left|\lambda\right|<1$ (тобто за модулем менше одиниці), будуть відповідати кореням перетвореного рівняння

$$(w+1)^k+a_1(w+1)^{k-1}(w-1)+\ldots+a_k(w-1)^k=0$$

або

$$b_0w^k+b_1w^{k-1}+\ldots+b_n=0, \qquad (8.11)$$

які лежать в лівій півплощині площини w.

Питання про розташування коренів рівняння (8.11) може бути вирішено за допомогою критерію Рауса-Гурвіца або критерію Михайлова.

Приклад 9 Знайти необхідні й достатні умови того, що корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \qquad (8.12)$$

знаходяться в одиничному колі $\left|\lambda\right|<1$.

Розв'язання. Вважаємо $\lambda=\frac{w+1}{w-1}$. Тоді рівняння (8.12) прийме вигляд

$$(w+1)^2+a_1(w+1)(w-1)+a_2(w-1)^2=0$$

або

$$(1+a_1+a_2)w^2+(2-2a_2)w+(1-a_1+a_2)=0. \qquad (8.13)$$

До многочлена (8.13) застосовуємо критерій Рауса-Гурвіца. Матриця Гурвіца має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1=2-2a_2, \qquad \Delta_2=(2-2a_2)(1-a_1+a_2).$$

У силу зазначеного критерію повинно бути

$$1+a_1+a_2>0, \quad 1-a_2>0, \quad 1-a_1+a_2>0. \qquad (8.14)$$

Отже, характеристичне рівняння (8.12) має в крузі $|\lambda|<1$ корені тоді й тільки тоді, коли виконуються умови (8.14).

Наслідок. Лінійне однорідне різницеве рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$f(n+2)+a_1 f(n+1)+a_2 f(n)=0$$

має асимптотично стійкий нульовий розв’язок $f(n)\equiv 0$ тоді й тільки тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умовам (8.14).

Приклад 10 Дослідити на стійкість нульовий розв’язок $f(n)\equiv 0$ рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв’язання. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$f(n+2)-f(n+1)+0{,}5f(n)=0.$$

Тут $a_1=-1,\ a_2=0{,}5$. Тому

$$1+a_1+a_2=0{,}5>0,$$
$$1-a_2=0{,}5>0,$$
$$1-a_1+a_2=2{,}5>0.$$

Умови (8.14) критерію Рауса-Гурвіца виконані. Виходить, розв’язок $f(n)\equiv 0$ асимптотично стійкий.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Розв’язати наступні різницеві рівняння:

№ 8.1. $3f(n+2)-2f(n+1)-8f(n)=0$.

№ 8.2. $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$.

№ 8.3. $4f(n+2)-8f(n+1)+5f(n)=0$.

№ 8.4. $f(n+3)-8f(n)=0$.

№ 8.5. $f(n+4)-f(n+2)+2f(n+1)+2f(n)=0$.

У наступних завданнях знайти загальні розв’язки даних неоднорідних лінійних різницевих рівнянь:

№ 8.6. $f(n+2)-2f(n+1)-f(n)=n$.

№ 8.7. $f(n+2)+2f(n+1)+f(n)=3^n\cdot 32$, $\qquad f(0)=0$, $f(1)=0$.

№ 8.8. $f(n+2)+f(n)=\sin 2n$, $f(0)=0$, $f(1)=1$.

№ 8.9. $f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=e^{n}$.

№ 8.10. $f(n+3)+8f(n)=2^{n}$.

Виходячи з визначення стійкості, дослідити на стійкість нульові розв'язки наступних різницевих рівнянь:

№ 8.11. $8f(n+2)+2f(n+1)-f(n)=0$.

№ 8.12. $f(n+2)+f(n)=0$.

№ 8.13. $4f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.

№ 8.14. $f(n+2)-6f(n+1)-7f(n)=0$.

Для наступних різницевих рівнянь знайти необхідні й достатні умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку:

№ 8.15. $a_0 f(n+3)+a_1 f(n+2)+a_2 f(n+1)+a_3 f(n)=0$.

№ 8.16. $f(n+4)+pf(n+2)+qf(n)=0$.

№ 8.17. $f(n+5)+pf(n)=0$.

№ 8.18. $af(n+5)-bf(n)=0$, $a\neq 0$, $b>0$.

Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца, дослідити на стійкість нульовий розв'язок наступних різницевих рівнянь:

№ 8.19. $11f(n+4)-8f(n+3)+8f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.

№ 8.20. $f(n+4)+f(n+3)+f(n)=0$.

№ 8.21. $12f(n+4)-3f(n+3)+2f(n+2)+2f(n+1)-2f(n)=0$.

№ 8.22. $7f(n+4)-4f(n+3)+30f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=0$.

№ 8.23. $f(n+5)-f(n+1)+f(n)=0$.

№ 8.24. $f(n+5)-f(n+2)-f(n)=0$.

№ 8.25. $f(n+5)+f(n+1)-f(n)=0$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Дослідити на стійкість розв'язок $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y'=f(x,y)$, *що задовольняє початковій умові* $\varphi(x_0)=y_0$, *використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

1.1. $y'=\dfrac{1-2x}{y^2}$, $\varphi(0)=1$.

1.2. $y'=(1+y)\operatorname{ctg}x$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

1.3. $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1)=e^2$.

1.4. $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y}{x}}$, $\varphi(1)=0$.

1.5. $y'=xe^{-x^2}-2xy$, $\varphi(0)=3$.

1.6. $y'=\dfrac{2xy}{1+x^2}+x^2+1$, $\varphi(-1)=2$.

1.7. $y'=1+\dfrac{2x-1}{x^2}y$, $\varphi(1)=1+e$.

1.8. $y'=y^2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1)=1$.

1.9. $y'=\dfrac{2y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$, $\varphi(2)=1$.

1.10. $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1)=1$.

Дослідити на стійкість частинний розв'язок $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y''=f(x,y,y')$, *що задовольняє початковим умовам* $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y'_0$, *використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

2.1. $y''=\dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}$, $\varphi(1)=-2$, $\varphi'(1)=1$.

2.2. $y''=y'+x$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$.

2.3. $y''=\dfrac{2y'^2}{y-1}$, $\varphi(-1)=0$, $\varphi'(-1)=-0{,}5$.

2.4. $y''=\dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}$, $\varphi(-1)=-2$, $\varphi'(-1)=-1$.

2.5. $y''=\dfrac{y'^2}{y}$, $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=-1$.

2.6. $y''=\dfrac{\ln y+1}{\ln y-1}\cdot\dfrac{y'^2}{y}$, $\varphi(0)=e^{-1}$, $\varphi'(0)=\dfrac{2}{e}$.

2.7. $y'' = \dfrac{y'^2}{y}$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1$.

2.8. $y'' = \dfrac{y' - xy'^2}{x+1}$, $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi'(1) = 2$.

2.9. $y'' = \dfrac{1 - y'^2}{y}$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi'(2) = 0$.

2.10. $y'' = \dfrac{-y'^2}{2y}$, $\varphi(5) = 3$, $\varphi'(5) = 2$.

Дано однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку й частинний розв'язок однорідного рівняння $y_1 = \varphi(x)$. *Дослідити на стійкість розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам* $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, *використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

3.1. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$, $\varphi(0) = -2$, $\varphi'(0) = 4$.

3.2. $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$, $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$, $\varphi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3.3. $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1-x)y = 0$, $y_1 = e^x$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = 1$.

3.4. $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, $y_1 = 4x^3 - 3x$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi'(0) = 2$.

3.5. $y'' - y'\,\mathrm{tg}x + 2y = 0$, $y_1 = \sin x$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 2$.

При будь-яких початкових умовах $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$ *дослідити на стійкість розв'язок даного диференціального рівняння, використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим.*

3.6. $2y'' + 5y' = \cos^2 x$.

3.7. $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$.

3.8. $2y'' + y' - y = 12e^{-x}$.

3.9. $4y'' + 16y' + 15y = e^{\frac{5}{2}x}$.

3.10. $y'' + y + \mathrm{ctg}^2 x = 0$.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь, використовуючи відповідні теореми Ляпунова про стійкість і нестійкість, характеристичні числа й умови Рауса-Гурвіца.

4.1. $y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

4.2. $5y''' - 15y'' + y' - 2y = 0$.

4.3. $3y''' + 2y'' + 6y' + 3y = 0$.

4.4. $y''' - 2y'' + y' - y = 0$.

4.5. $3y^{(4)} + 10y'' - 8y = 0$.

4.6. $3y^{(4)} + 11y''' + 27y'' + 29y' + 10y = 0$.

4.7. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \dfrac{y_2}{3}, \\ y_2' = \dfrac{y_1}{3} - y_2 + \dfrac{y_3}{3}, \\ y_3' = \dfrac{y_2}{3} - y_3. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_3' = -2y_2 - y_3. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ y_2' = -y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -2y_3. \end{cases}$

Дослідити нульовий розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь на стійкість: за першим наближенням; за допомогою функції Ляпунова v.

5.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y^3 - 4x^3, \end{cases}$ $\qquad v = x^4 + 2x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$.

5.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 2y^5 - 4x^3, \end{cases}$ $\qquad v = x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$.

5.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + xy - x^3 - \dfrac{1}{2}xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y + xy + x^2y - \dfrac{1}{2}xy^2, \end{cases}$ $\qquad v = 3x^2 - 2xy + y^2$.

5.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3, \end{cases}$ $\qquad v = x^4 + 2y^2$.

5.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $\qquad v = x^2 + y^6$.

5.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^2 y, \end{cases}$ $\qquad v = 2x^2 + y^4$.

5.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y - x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y^3, \end{cases}$ $\qquad v = 3x^2 + 4y^2$.

5.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y - 2x^3 - 4y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $\qquad v = \dfrac{1}{2}x^2 + 2y^2 + y^4$.

5.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x\left(x^2 + y^4\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y\left(x^2 + y^4\right), \end{cases}$ $\qquad v = x^2 + y^2$.

5.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + xy + xy^3 - \dfrac{1}{2}x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + xy - y^3 - \dfrac{1}{2}x^2 y, \end{cases}$ $\qquad v = x^2 - 2xy + 3y^2$.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь.

6.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(3 + \sin y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(1 + \cos 2x). \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x(1 + \cos y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(2 + \sin x). \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(e^x - 1\right) - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \sin y. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y\cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y + y^2 e^y. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{1-6x} + 2y - 1. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2e^{y}. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 2\sin\, y, \\ \dfrac{dy}{dt} = e^{x} - 3y - 1. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln\left(4x + e^{-3y}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 1 + \sqrt[3]{1-6y}. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + e^{y} - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\sin\, x - 5y. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 1 + \sqrt[3]{1-6y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln\left(4x + e^{-3y}\right). \end{cases}$

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова.

7.1. $y^{(4)} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0$.

7.2. $y^{(4)} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0$.

7.3. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

7.4. $y^{(4)} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0$.

7.5. $y^{(4)} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0$.

7.6. $y^{(4)} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0$.

7.7. $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.

7.8. $y^{(4)} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.

7.9. $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0$.

7.10. $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0$.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок різницевих рівнянь, використовуючи критерій Рауса-Гурвіца.

8.1. $11f(n+4)-8f(n+3)+8f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.
8.2. $f(n+4)+f(n+3)+f(n)=0$.
8.3. $12f(n+4)-3f(n+3)+2f(n+2)+2f(n+1)-2f(n)=0$.
8.4. $7f(n+4)-4f(n+3)+30f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=0$.
8.5. $f(n+4)+2f(n+3)+4f(n+2)+2f(n+1)+5f(n)=0$.
8.6. $f(n+4)+2f(n+2)+8f(n+1)+5f(n)=0$.
8.7. $f(n+5)-f(n+1)+f(n)=0$.
8.8. $f(n+5)-f(n+2)-f(n)=0$.
8.9. $f(n+5)+f(n+1)-f(n)=0$.
8.10. $f(n+5)+4f(n+4)+5f(n+3)+2f(n+1)+4f(n)=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

1. *Дослідити на стійкість розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y'=f(x,y)$, *що задовольняє початковій умові* $\varphi(x_0)=y_0$, *використовуючи визначення стійкості й нестійкості за Ляпуновим*:

1) $y'+\dfrac{y}{x}=1+2\ln x$, $\varphi(1)=1$;

2) $y'=\dfrac{e^{2x}y}{1+e^{2x}}$, $\varphi(0)=2$;

3) $y'=y\,\mathrm{ctg}x+\dfrac{y^3}{\sin x}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання.

1) Розв'яжемо дане лінійне рівняння:

$$y'+\frac{y}{x}=1+2\ln x;$$

заміна: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$;

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=1+2\ln x,$$

$$v\left(u'+\frac{u}{x}\right)+uv'=1+2\ln x,$$

$$u'+\frac{u}{x}=0,\ u'=-\frac{u}{x},\ \ln u=-\ln x,\ u=\frac{1}{x};$$

$$\frac{v'}{x}=1+2\ln x,\ v'=x(1+2\ln x),\ v=x^2\ln x+c;$$

$$y=f(x)=uv=\frac{1}{x}\left(x^2\ln x+c\right)=x\ln x+\frac{c}{x}.$$

Використовуючи початкову умову, обчислюємо значення довільної постійної:

$$1=1\cdot\ln 1+\frac{c}{1},\ c=1.$$

Отже, частинний розв’язок має вигляд $y=\varphi(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$. Для того, щоб дослідити його на стійкість, виберемо будь-який інший розв’язок $y=f(x)$ даного диференціального рівняння при початкових даних $(x_0,\ y_0)$, що досить мало відрізняються від початкових даних $(1,1)$. Тоді c буде досить мало відрізнятися від 1 і $f(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$. Далі

$$|\,f(x)-\varphi(x)|=\left|\frac{c}{x}-\frac{1}{x}\right|\to 0 \text{ при } x\to+\infty,$$

тобто модуль зазначеної різниці можна зробити меншим кожного наперед заданого $\varepsilon>0$, що й означає, згідно з визначенням, стійкість даного частинного розв’язку. Більше того, тому що модуль цієї різниці прагне до нуля при кожному *c*, то даний частинний розв’язок стійкий асимптотично в цілому.

2) Знаходимо загальний розв’язок диференціального рівняння зі змінними, що розділяються:

$$y'=\frac{e^{2x}y}{1+e^{2x}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x}y}{1+e^{2x}},\ \frac{dy}{y}=\frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}},$$

$$\int\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+e^{2x}\right)}{1+e^{2x}},$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+\ln c,$$

$$y=f(x)=c\sqrt{1+e^{2x}}.$$

При даній початковій умові

$$2=c\sqrt{1+e^{2\cdot 0}},\ c=\sqrt{2}$$

і $\varphi(x)=\sqrt{2}\sqrt{1+e^{2x}}$, тому

$$|\,f(x)-\varphi(x)|=\left|c-\sqrt{2}\right|\sqrt{1+e^{2x}}.$$

Якщо $x\to+\infty$, то модуль зазначеної різниці прямує до нескінченності й перевершує кожне наперед задане $\varepsilon>0$, яке б не було $\delta>0$. Це означає, що даний розв’язок нестійкий.

3) Загальний розв’язок даного рівняння Бернуллі буде:

$$y'=y\,\mathrm{ctg}x+\frac{y^3}{\sin x},$$

$$\text{заміна: } y=uv,\ y'=u'v+uv';$$

$$u'v+uv'-uv\,\mathrm{ctg}x=\frac{u^3v^3}{\sin x},$$

$$v(u'-u\,\mathrm{ctg}x)+uv'=\frac{u^3v^3}{\sin x},$$

$$u'-u\,\mathrm{ctg}x=0,\ u'=\frac{u\cos x}{\sin x},\ \ln u=\ln\sin x,\ u=\sin x;$$

$$\sin x\,v'=v^3\sin^2 x,\ v'=v^3\sin x,\ v=\frac{1}{\sqrt{2\cos x+c}};$$

$$y=f(x)=uv=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+c}}.$$

При початковій умові

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{2}+c}},\ c=4$$

і частинний розв’язок $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+4}}$, тому

$$|\,f(x)-\varphi(x)|=|\sin x|\left|\sqrt{2\cos x+4}-\sqrt{2\cos x+c}\right|\cdot\left|\sqrt{2\cos x+c}\sqrt{2\cos x+4}\right|^{-1}.$$

При значеннях *c*, досить близьких до 4 (досить малих $\delta>0$), цей вираз можна зробити меншим кожного наперед заданого $\varepsilon>0$ при будь-яких $x\geq\frac{\pi}{2}$, тобто даний частинний розв’язок стійкий (неасимптотично).

2. *Дослідити на стійкість частинний розв’язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* $y''=f(x,y,y')$, *що задовольняє початковим умовам* $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y_0'$, *використовуючи визначення стійкості та нестійкості за Ляпуновим.*

1) $y''=\dfrac{y-xy'}{x^2}$, $\varphi(2)=1$, $\varphi'(2)=-1$;

2) $y''=\dfrac{2y'^2}{y-1}$, $\varphi(0)=2$, $\varphi'(0)=-2$.

Розв’язання.

1) Введемо заміну: $y'=yt$, $y''=y't+yt'=yt^2+yt'$. Будемо мати

$$yt^2+yt'=\frac{y-xyt}{x^2},$$

$$t^2+t'=\frac{1}{x^2}-\frac{t}{x},\ t'+\frac{t}{x}=\frac{1}{x^2}-t^2,$$

$$t=uv,\ t'=u'v+uv',$$

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2}-u^2v^2,$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{1}{x^2} - u^2 v^2,$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0,\ u' = -\frac{u}{x},\ \ln u = -\ln x,\ u = \frac{1}{x};$$

$$\frac{v'}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{v^2}{x^2},\ v' = \frac{1-v^2}{x},\ v = \frac{c_1 + x^2}{x^2 - c_1},$$

$$t = uv = \frac{1}{x} \cdot \frac{c_1 + x^2}{x^2 - c_1};$$

$$y' = y\frac{1}{x} \cdot \frac{c_1 + x^2}{x^2 - c_1},\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{c_1 + x^2}{x^2 - c_1},$$

$$y = f(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x}.$$

Знайдемо довільні постійні, використовуючи початкові умови: $c_1 = -\frac{1}{4},\ c_2 = 3$. Шуканий частинний розв'язок

$$\varphi(x) = -\frac{x}{4} + \frac{3}{x}.$$

Тоді

$$|\ f(x) - \varphi(x)| = \left|\left(c_1 + \frac{1}{4}\right)x - \frac{c_2 - 3}{x}\right| \to \left|\left(c_1 + \frac{1}{4}\right)\right|\,|\,x\,| \text{ при } x \to +\infty,$$

тобто модуль зазначеної різниці не можна зробити меншим кожного наперед заданого $\varepsilon > 0$, отже, знайдений частинний розв'язок нестійкий.

2) Введемо заміну: $y' = yt(y),\ y'' = t + yt'$. Будемо мати

$$t + yt' = \frac{2yt}{y-1},$$

$$yt' = \frac{t(y+1)}{y-1},\ \frac{t'}{t} = \frac{y+1}{y(y-1)},$$

$$t = \frac{c_1(y-1)^2}{y},$$

$$y' = y\frac{c_1(y-1)^2}{y},\ y' = c_1(y-1)^2,$$

$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{c_1 x + c_2}.$$

Частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам, має вигляд

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2x+1}.$$

Тоді

$$|\,f(x)-\varphi(x)|=\left|1+\frac{1}{c_1x+c_2}-\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)\right|\to\left|\frac{1}{c_1x+c_2}-\frac{1}{2x+1}\right|.$$

Якщо $c_1\neq 0$ и $c_2\neq 0$, то модуль зазначеної різниці прагне до нуля при $x\to\infty$. Звідси випливає, що знайдений частинний розв'язок стійкий асимптотично в цілому.

3. *Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь, використовуючи відповідні теореми Ляпунова про стійкість та нестійкість, характеристичні числа й умови Рауса-Гурвіца.*

1) $6y^{(4)}+19y'''+46y''+39y'+10y=0$;

2) $\begin{cases} y_1'=-y_1+2y_2, \\ y_2'=5y_1-y_2+2y_3, \\ y_3'=5y_2-y_3. \end{cases}$

Розв'язання.

1) Запишемо характеристичне рівняння:

$$6\lambda^4+19\lambda^3+46\lambda^2+39\lambda+10=0 \text{ або } \lambda^4+\frac{19}{6}\lambda^3+\frac{23}{3}\lambda^2+\frac{13}{2}\lambda+\frac{5}{3}=0.$$

Складемо матрицю й перевіримо виконання умов Рауса-Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{13}{2} & \frac{23}{3} & \frac{19}{6} & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{13}{2} & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1=\frac{19}{6}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{19}{6} & 1 \\ \frac{13}{2} & \frac{23}{3} \end{vmatrix}=\frac{437}{18}-\frac{13}{2}=\frac{160}{9}>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} \frac{19}{6} & 1 & 0 \\ \frac{13}{2} & \frac{23}{3} & \frac{19}{6} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{13}{2} \end{vmatrix}=\frac{10675}{108}>0,\ \Delta_4=\frac{5}{3}\cdot\Delta_3=\frac{53375}{324}>0.$$

Умови Рауса-Гурвіца виконані. Отже, дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння мають від'ємні значення й, згідно з відповідною теоремою Ляпунова, нульовий розв'язок даного рівняння стійкий асимптотично.

2) Маємо лінійну систему. Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(1+\lambda)^3 + 20(1+\lambda) = 0,\ (1+\lambda)\left(-(1+\lambda)^2 + 20\right) = 0,\ (1+\lambda)\left(-\lambda^2 - 2\lambda + 19\right) = 0.$$

Це рівняння має два від'ємні та один додатний корені. Тому, згідно з теоремою Ляпунова про нестійкість, нульовий розв'язок нестійкий.

4. *Дослідити нульовий розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь на стійкість: за першим наближенням; за допомогою функції Ляпунова* v.

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(x^4 + y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(x^4 + y^2\right), \end{cases}$ $\qquad v = x^2 + y^2;$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y^5, \end{cases}$ $\qquad v = 4x^2 + 3y^2.$

Розв'язання.

1) Запишемо дану систему в першому наближенні та її характеристичне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 1 = 0.$$

Характеристичні корені $\lambda_{1,2} = \pm i$, тому загальний розв'язок лінійної системи буде лінійною комбінацією функцій $\sin t$ і $\cos t$. Звідси випливає стійкість (неасимптотична) нульового розв'язку системи за першим наближенням.

Скористаємося функцією Ляпунова. Знайдемо $\dot{v} = \dfrac{dv}{dt}$ в силу даної системи

$$\dot{v} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x\left(-y + x\left(x^4 + y^2\right)\right) + 2y\left(x + y\left(x^4 + y^2\right)\right) =$$
$$= 2\left(x^6 + x^4y^2 + x^2y^2 + y^4\right) \ge 0,$$

яка, як і функція Ляпунова v, є додатно-означеною. Згідно з першою теоремою Ляпунова про нестійкість, нульовий розв'язок даної системи нестійкий.

2) Запишемо дану систему в першому наближенні та її характеристичне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + 12 = 0.$$

Характеристичні корені $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}i$, тому загальний розв'язок лінійної системи буде лінійною комбінацією функцій $\sin 2\sqrt{3}t$ и $\cos 2\sqrt{3}t$. Звідси випливає стійкість (неасимптотична) нульового розв'язку системи за першим наближенням.

Скористаємося функцією Ляпунова. Для цього знайдемо її повну похідну

$$\dot{v} = 8x\dot{x} + 6y\dot{y} = 8x\left(3y - x^3\right) + 6y\left(-4x - y^5\right) = -2\left(4x^4 + 3y^6\right) \le 0.$$

Вона від'ємно-означена й, згідно з теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість, нульовий розв'язок даної системи асимптотично стійкий.

5. *Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова*:

$$y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичний многочлен:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

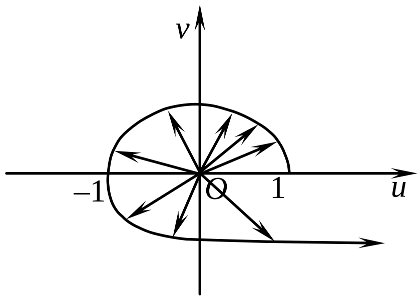
Підставимо в нього $\lambda = iw$, одержимо

$$f(iw) = w^4 - 2iw^3 - 3w^2 + 2iw + 1 = w^4 - 3w^2 + 1 + i\left(-2w^3 + 2w\right),$$

$$u(w) = w^4 - 3w^2 + 1,$$

$$v(w) = \left(-2w^3 + 2w\right) = -2w\left(1 - w^2\right) = -2w(1+w)(1-w).$$

Будемо змінювати w від 0 до $+\infty$ й побудуємо криву (див. рис.)



$$\begin{cases} u = u(w), \\ v = v(w), \end{cases}$$

w	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	–1	0
v	0	+	0	–

Кут повороту радіус-вектора

$$\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}.$$

Звідси, $n - 2m = 4$, $n = 4$, отже, $m = 0$. Таким чином, всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині, тобто нульовий розв'язок даного рівняння асимптотично стійкий.

6. *Дослідити на стійкість нульовий розв'язок різницевого рівняння* $f(n+2) + f(n+1) + 2f(n) = 0$, *використовуючи критерій Рауса-Гурвіца*.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Покладемо $\lambda = \dfrac{w+1}{w-1}$, тоді характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$2w^2 - w + 1 = 0.$$

Складемо матрицю й перевіримо виконання умов Рауса-Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = -1 < 0\,,\ \Delta_2 = 1 \cdot \Delta_1 = -1 < 0\,.$$

Умови Рауса-Гурвіца не виконані. Отже, нульовий розв’язок даного рівняння нестійкий.

ВІДПОВІДІ

№ 1.1. Асимптотично стійкий. **№ 1.2.** Асимптотично стійкий. **№ 1.3.** Нестійкий. **№ 1.4.** Нестійкий. **№ 1.5.** Стійкий, але неасимптотично. **№ 1.6.** Асимптотично стійкий. **№ 1.7.** Нестійкий. **№ 1.8.** Нестійкий фокус. **№ 1.9.** Центр. **№ 1.10.** Стійкий фокус. **№ 1.11.** Сідло. **№ 1.12.** Нестійкий вузол. **№ 1.13.** Нестійкий вузол. **№ 1.14.** Стійкий вузол. **№ 1.15.** Точка спокою нестійка (нестійкий фокус). **№ 1.16.** Точка (0, 0, 0) стійка. **№ 1.17.** Точка (0, 0, 0) нестійка. **№ 1.18.** Асимптотично стійкий при $\alpha < 0$. У всіх інших випадках нестійкий. **№ 1.19.** Асимптотично стійкий при $\alpha < 0$ і $\alpha > 1$; стійкий, але не асимптотично при $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$; нестійкий при $0 < \alpha < 1$. **№ 1.20.** Нестійкий при всіх α. **№ 1.21.** $\alpha \le 0$. **№ 1.22.** $\alpha \le -\dfrac{1}{2}$. **№ 1.23.** Асимптотично стійкий при $\alpha\beta < 1$; стійкий, але не асимптотично при $\alpha\beta = 1$. **№ 1.24.** Асимптотично стійкий при $\beta < \alpha^2$ $(\alpha < 0)$; стійкий, але не асимптотично при: 1) $\alpha = 0$ $(\beta < 0)$; 2) $\beta = \alpha^2$ $(\alpha < 0)$. **№ 1.25.** Асимптотично стійкий при $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha > 0$ $(\alpha < 1)$; стійкий, але не асимптотично при: 1) $\alpha = 1$ $(|\beta| > 1)$; 2) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 0$ $(0 < \alpha < 1)$. **№ 1.26.** Нестійкий при всіх значеннях α і β. **№ 1.27.** Асимптотично стійкий при $\alpha^2 + \beta^2 - \beta < 0$; стійкий, але не асимптотично при $\alpha^2 + \beta^2 - \beta = 0$ $(\alpha \ne 0,\ \beta \ne 0)$. **№ 1.28.** Стійкий, але не асимптотично при $\beta + 2\alpha + 1 = 0$; асимптотично стійкий при всіх інших значеннях α і β.

№ 2.1. Асимптотично стійкий. **№ 2.2.** Асимптотично стійкий. **№ 2.3.** Асимптотично стійкий. **№ 2.4.** Стійкий. **№ 2.5.** Асимптотично стійкий. **№ 2.6.** Асимптотично стійкий. **№ 2.7.** Асимптотично стійкий. **№ 2.8.** Нестійкий. **№ 2.9.** Нестійкий. **№ 2.10.** Асимптотично стійкий. **№ 2.11.** Асимптотично стійкий. **№ 2.12.** Асимптотично стійкий.

№ 3.1. Нестійка. **№ 3.2.** Стійка. **№ 3.3.** Нестійка. **№ 3.4.** Стійка. **№ 3.5.** Нестійка. **№ 3.6.** Нестійка. **№ 3.7.** Асимптотично стійка. **№ 3.8.** Стійка. **№ 3.9.** Дослідження за першим наближенням неможливе. За допомогою функції Ляпунова встановлюємо, що точка (0, 0) асимптотично стійка. **№ 3.10.** Точка спокою стійка. **№ 3.11.** Якщо $a > 0$, $b > 0$, то умова стійкості має вигляд $\cos T > 0$, де $T = (-1)^k x_0 + \pi k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $x_0 = \arcsin \dfrac{L}{b}$.

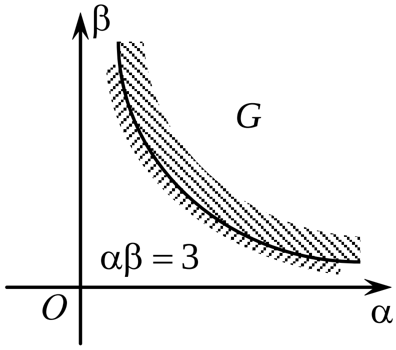


Рис. до № 5.9.

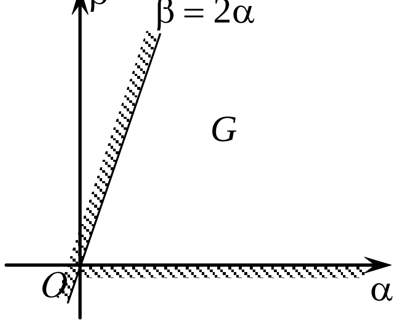


Рис. до № 5.8.

№ 5.1. Стійкий. **№ 5.2.** Нестійкий. **№ 5.3.** Стійкий. **№ 5.4.** Нестійкий. **№ 5.5.** При $\alpha > 0{,}5$. **№ 5.6.** Розв’язок нестійкий при будь-якому α. **№ 5.7.** При $\alpha > \frac{13}{6}$. **№ 5.8.** При будь-яких (α, β) з області *G* (див. рис.). **№ 5.9.** При будь-яких (α, β) з області *G*: $\alpha\beta > 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (див. рис.). **№ 5.10.** $p > 0$, $q > 2$.

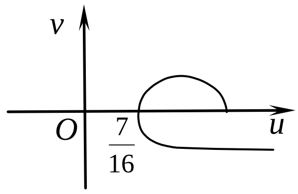


Рис. до № 6.1.

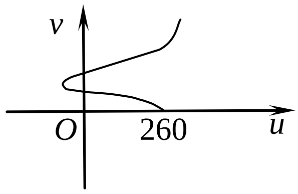


Рис. до № 6.4.

№ 6.1. Два кореня в лівій півплощині, два корені в правій; розв’язок нестійкий (див. рис.). **№ 6.2.** Стійкий. **№ 6.3.** Стійкий. **№ 6.4.** Два корені в правій півплощині; розв’язок нестійкий (див. рис.). **№ 6.5.** Стійкий (див. рис.). **№ 6.6.** Стійкий. **№ 6.7.** Стійкий. **№ 6.8.** Стійкий. **№ 6.9.** Розв’язок стійкий. **№ 6.10.** Стійкий. **№ 6.11.** Стійкий. **№ 6.12.** Стійкий. **№ 6.13.** Стійкий. **№ 6.14.** Стійкий (див. рис.). **№ 6.15.** Стійкий. **№ 6.16.** Чисто уявні корені; розв’язок нестійкий (див. рис.). **№ 6.17.** Два корені в правій півплощині; розв’язок нестійкий. **№ 6.18.** Два корені в правій півплощині; розв’язок нестійкий.

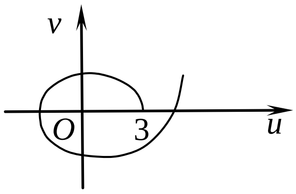


Рис. до № 6.5.

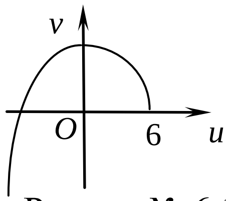


Рис. до № 6.14.

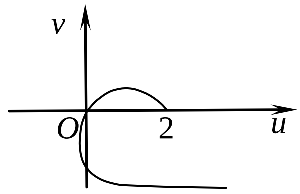


Рис. до № 6.16.

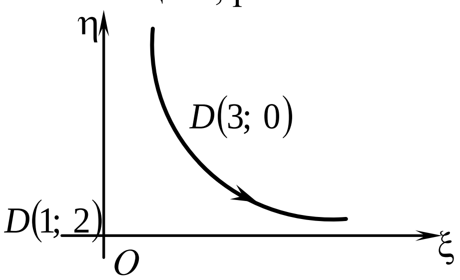


Рис. до № 7.1.

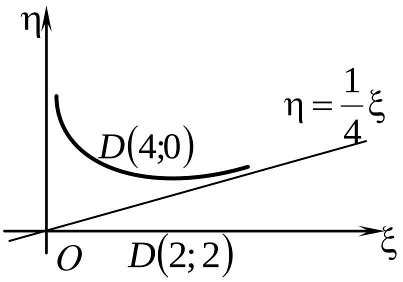


Рис. до № 7.2.

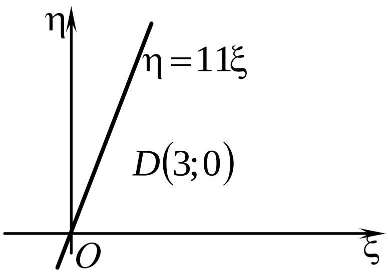


Рис. до № 7.3.

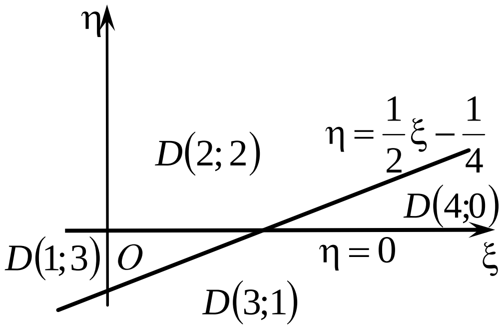


Рис. до № 7.4.

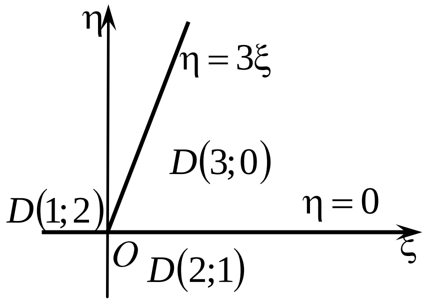


Рис. до № 7.5.

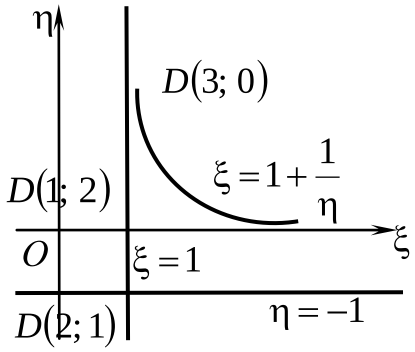


Рис. до № 7.6.

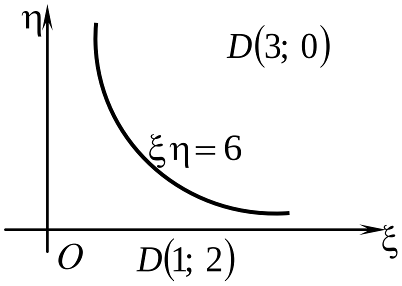


Рис. до № 7.7.

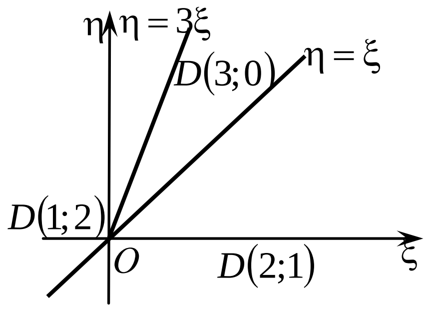


Рис. до № 7.8.

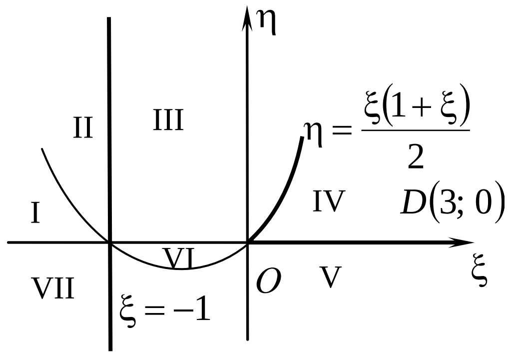


Рис. до № 7.9.

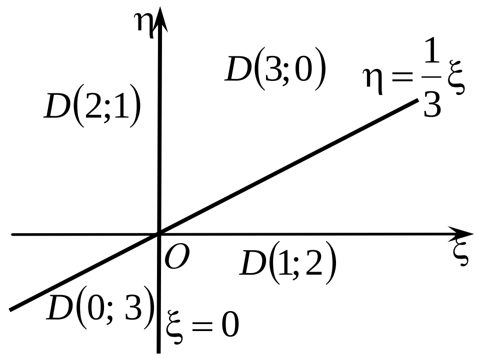


Рис. до № 7.10.

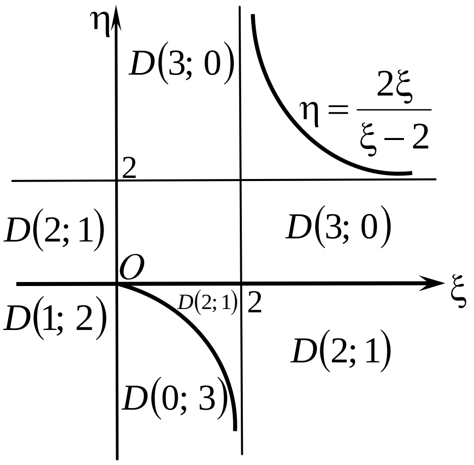


Рис. до № 7.11.

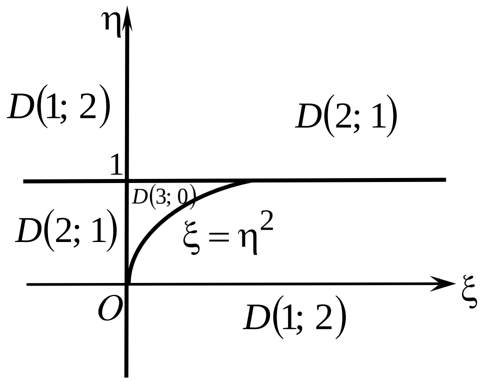


Рис. до № 7.12.

№ 8.1. $f(n)=C_1\cdot 2^n+C_2\left(-\frac{4}{5}\right)^n$. **№ 8.2.** $f(n)=(-1)^n\left(4n^2-7n+1\right)$.

№ 8.3. $f(n)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(C_1\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+C_2\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right)$.

№ 8.4. $f(n)=2^n\left(C_1+C_2\cos\frac{2\pi n}{3}+C_3\sin\frac{2\pi n}{3}\right)$.

№ 8.5. $f(n)=(-1)^n(C_1+C_2n)+2^{\frac{n}{2}}\left(C_3\cos\frac{\pi n}{4}+C_4\sin\frac{\pi n}{4}\right)$.

№ 8.6. $f(n)=C_1\left(1-\sqrt{2}\right)^n+C_2\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\frac{n}{2}$. **№ 8.7.** $f(n)=2\cdot 3^n+(-1)^n(8n-2)$.

№ 8.8. $f(n)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\cdot\cos\frac{\pi n}{2}+\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{\sin 2(n-1)}{2\cos 2}$.

№ 8.9. $f(n)=C_1+C_2n+C_3n^2+\frac{e^n}{(e-1)^3}$.

№ 8.10. $f(n)=2^n\left(\frac{1}{16}+C_1\cos\frac{\pi n}{3}+C_2\sin\frac{\pi n}{3}\right)+C_3(-2)^n$.

№ 8.11. Асимптотично стійкий. **№ 8.12.** Стійкий, але не асимптотично. **№ 8.13.** Асимптотично стійкий. **№ 8.14.** Нестійкий.

№ 8.15. $a_0+a_1+a_2+a_3>0$, $a_0-a_1+a_2-a_3>0$, $3a_0+a_1-a_2-3a_3>0$, $3a_0-a_1-a_2+3a_3>0$, $a_0^2+a_1a_3-a_0a_2-a_3^2>0$.

№ 8.16. $1-q>0$, $1+p+q>0$, $1-p+q>0$. **№ 8.17.** $-1<p<1$. **№ 8.18.** $|a|>b$.

№ 8.19. Асимптотично стійкий. **№ 8.20.** Нестійкий. **№ 8.21.** Асимптотично стійкий. **№ 8.22.** Нестійкий. **№ 8.23.** Нестійкий. **№ 8.24.** Нестійкий. **№ 8.25.** Нестійкий.

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости [Текст] / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 224 с.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости [Текст] / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1997. – 356 с.

3. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 286 с.

4. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика: учебное пособие [Текст] / А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 336 с.

5. Сніжко Н.В. Елементи теорії стійкості [Текст] / Н.В. Сніжко. – Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 50 с.

6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1999. – 240 с.

Додаткова:

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

2. Гусак А.А. Высшая математика: в 2 т. Т. 2 [Текст] / А.А. Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1999. – 356 с.

3. Дубошин Г.Н. Лекции по математической теории устойчивости: Учеб. Пособие. – М.: Изд-во Мос. ун-та, 1952. – 319 с.

4. Жевняк Р.М. Высшая математика: в 5 ч. [Текст] / Р.М. Жевняк. – Минск: Вышэйшая школа, 1984-1988. – Ч.4. – 1987. – Ч. 5. – 1988.

5. Краснов М.Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и примеры с подроб. решениями: учеб. пособие [Текст] / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 176 с.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 3 [Текст] / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2006. – 351 с.

7. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения [Текст] / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1987. – 274 с.

8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. Т. 2 [Текст] / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

9. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: типовые расчеты [Текст] / В.Ф. Чудесенко. – М.: Высш. шк., 1999. – 126 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович
Спиця Оксана Геннадіївна
Ткаченко Ірина Григорівна

ОСНОВИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

**Навчальний посібник
для студентів ступеня «магістр»
спеціальності «Математика (за напрямами)»**

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *О.Г. Спиця*